Fundamentos para el Examen de ingreso al Nivel superior

POLITÉCNICO

Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas

Ciencias Médico Biológicas

Ciencias Sociales y Administrativas

IPN

CONAMAT
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Fundamentos para el Examen de ingreso al Nivel superior POLITÉCNICO

Áreas

- Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas
- CienciasMédico Biológicas
- Ciencias Sociales y Administrativas

CONAMAT MR
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Acapulco ▪ Aguascalientes ▪ Cancún ▪ Cuernavaca
Distrito Federal ▪ Guadalajara ▪ León ▪ Monterrey ▪ Oaxaca ▪ Puebla
Metepec, Edo. México ▪ Querétaro ▪ Toluca

Datos de catalogación bibliográfica

COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Fundamentos para el examen de ingreso al Nivel Superior, Politécnico

Segunda edición, febrero, 2013

COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS, México,
ISBN: 978-968-5126-58-8
Formato 21.59 x 27.94 Páginas: 698

"Tan sólo por la educación puede el hombre llegar a ser hombre. El hombre no es más que lo que la educación hace de él".

Inmanuel Kant

Primera edición, 2005
Segunda edición, 2013

Uxmal No. 182 Col. Narvarte Del. Benito Juárez, C.P. 03020 México, D. F. (MÉXICO)
Miembro No. 3056 de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
ISBN: 978–968–5126–58–8
INDAUTOR: 03–2007–090513254600–01

IMPRESO EN MÉXICO – PRINTED IN MÉXICO

Esta obra se terminó de imprimir se terminó en febrero de 2013, en los talleres de GAMA SUCESORES, S.A. de C. V., calle Ingenieros Civiles No. 94 colonia Nueva Rosita Iztapalapa, C.P. 09420, México, D. F.
Esta edición consta de 5 000 ejemplares.

Presentación

A lo largo de más de 20 años, el Colegio Nacional de Matemáticas (Conamat) ha realizado la labor de preparar a aquellos estudiantes que aspiran ingresar a Nivel Superior. La experiencia de ese tiempo, se refleja en esta obra que es un auxiliar didáctico para el aspirante a Nivel Superior.

La guía, ***Fundamentos para el examen de ingreso a Nivel Superior***, ha sido elaborada con el propósito de asesorar al aspirante a Nivel Superior. Por ello, la exposición de los temas se presenta de manera que, el aspirante realice actividades en las cuales compruebe su aprendizaje.

Con esta guía se busca que el aspirante a Nivel Superior refuerce los conocimientos adquiridos durante el curso del bachillerato y, que a su vez, desarrolle las habilidades y aptitudes en las diferentes áreas.

Esta obra consta de cuatro partes que constituyen las áreas fundamentales del bachillerato, las cuales evalúan los conocimientos disciplinarios, las habilidades intelectuales, en seis rubros del saber; dos que evalúan la habilidad del razonamiento (matemático y verbal) y cuatro que miden diversos conocimientos disciplinarios equivalentes a los de un bachiller: Comunicación (Comprensión de lectura en español e inglés), Matemáticas, Ciencias Naturales (Física, Química y Biología), Ciencias Sociales (Historia de México, Entorno Socioeconómico, Civismo y Filosofía).

Cada una de las materias se divide en lecciones, presentan los temas que se considera que el aspirante a Nivel Superior debe repasar, y al final de cada una se encuentran los ejercicios propuestos que lo orientarán con el fin de verificar el aprendizaje adquirido.

Las diferentes materias que integran esta guía, corresponden a las áreas de: Ingeniería y Ciencias Físico Matemáticas, Ciencias Médico Biológicas, Ciencias Sociales y Administrativas, por lo que, el alumno deberá poner atención en los temas que debe preparar, según el área a la que desea ingresar.

El COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS desea comunicarle que, este material didáctico facilita el aprendizaje del aspirante a Nivel Superior, el resultado a favor, dependerá del interés y el empeño que ponga en el estudio de este curso.

Y recuerde, ***"EL ÉXITO NO SE LOGRA CON LA SUERTE, ES EL RESULTADO DE UN ESFUERZO CONSTANTE"***.

La guía *Fundamentos para el examen de ingreso a Nivel Superior, Politécnico* fue realizada por el Colegio Nacional de Matemáticas, S. C., con la colaboración de los siguientes profesores de la misma institución.

Español
José Manuel Servín González
Maricarmen García Ibáñez

Comprensión de textos en Español
María del Rosario Hernández Cortés

Inglés
José Manuel Servín González

Matemáticas
Arturo Aguilar Márquez
Fabián Valapai Bravo Vázquez
Herman Aurelio Gallegos Ruiz
Miguel Cerón Villegas
Ricardo Reyes Figueroa

Física
Herman Aurelio Gallegos Ruiz
Miguel Cerón Villegas
Ricardo Reyes Figueroa

Química
Dulce María Desachy Castanedo

Biología
Ana Luisa Montañez Colín

Historia de México
Víctor Hugo Osorio Saldívar

Estructura Socioeconómica de México
Lourdes Guadalupe Delgadillo Díaz Leal

Civismo
Rosalía Fascinetto Dorantes

Filosofía
María del Rosario Hernández Cortés

Diseño de interiores
Rodrigo Flores Rosales

Diseño de portada
Guadalupe Villa Ramírez

Coordinación académica
José Manuel Servín González

Índice

Español

Unidad 1 Categorías gramaticales
1. El nombre o sustantivo
2. El pronombre
3. El artículo
4. El adjetivo
5. El verbo
6. Formas impersonales del verbo
7. El adverbio

Unidad 2 La oración
1. Clasificación de las oraciones
2. El sujeto
3. Complementos del sujeto
4. El predicado

Unidad 3 La acentuación
1. La sílaba
2. Acento ortográfico y acento diacrítico
3. Clasificación de las palabras
4. Acento diacrítico
5. Sinónimos, antónimos y pleonasmos

Unidad 4 La puntuación
1. El punto
2. La coma
3. El punto y coma
4. Los dos puntos
5. Los puntos suspensivos
6. El paréntesis
7. Las comillas

Unidad 5 Uso de grafías
1. Uso de S, Z, C
2. Uso de B, V
3. Uso de G, J
4. Uso de LL, Y
5. Uso de H
6. Uso de R, RR

Unidad 6 Razonamiento verbal
1. Completar oraciones
2. Analogías y relaciones
3. Construcción y reconstrucción de textos
4. Comprensión de textos
5. Inferencias lógicas



1 Categorías gramaticales

Propósito: el alumno identificará las categorías gramaticales a partir de un enunciado propuesto.

El nombre o sustantivo

Un sustantivo es el nombre de cualquier persona, animal, cosa o concepto abstracto. Así pues, los sustantivos se dividen en propios, comunes y abstractos.

Sustantivos propios. Son los nombres de personas, nombres geográficos, de instituciones o de mascotas, y siempre deben escribirse con mayúscula.
Ejemplos:

Sara
Inglaterra
Facultad de Filosofía y Letras
Gogó

Sustantivos comunes. Son aquellos que nombran cosas, personas o animales.
Ejemplos:

niña
país
escuela
perro

Sustantivos abstractos. Son aquellos que nombran seres que tienen una existencia irreal o pensada. Generalmente, son cualidades, sentimientos, acciones o conceptos.
Ejemplos:

amor
odio
moral
agradecimiento

El pronombre

Pronombre significa en lugar del nombre, y es una palabra que se utiliza para designar a una persona o cosa sin mencionar su nombre.
Ejemplos:

Natalia comió mariscos el sábado.

En la oración anterior, el nombre está escrito en negritas.

Ella comió mariscos el sábado.

En esta segunda oración, el pronombre está escrito en negritas. La idea es la misma. Sólo sustituimos el nombre propio por un pronombre.
Los pronombres se clasifican en personales, posesivos y demostrativos.

Pronombres personales	Pronombres posesivos
Yo	Mío, mía
Tú	Tuyo, tuya
Él, ella	Suyo, suya
Nosotros	Nuestro, nuestra
Ustedes	Suyo, suya
Ellos	Suyo, suya

Pronombres demostrativos
Éste, ése, aquél
Ésta, ésa, aquélla
Éstos, ésos, aquéllos
Éstas, ésas, aquéllas

El artículo

Los artículos son palabras que anteceden al sustantivo. Lo determinan y concuerdan con él en género y número. Hay artículos determinados o definidos e indeterminados o indefinidos, y los hay en singular, plural, masculino y femenino.

Los artículos determinados se refieren a seres o cosas previamente conocidas por los hablantes.

Género	Singular	Plural	Ejemplos
Masculino	el	los	El monstruo está en el jardín. / Los niños están perdidos.
Femenino	la	las	La canción es larga. / Las canciones son largas.

Los artículos indeterminados se refieren a seres o cosas no conocidas o imprecisas.

Género	Singular	Plural	Ejemplos
Masculino	un	unos	Un monstruo está en el jardín. / Unos niños están perdidos.
Femenino	una	unas	Una canción es larga. / Unas canciones son largas.

El adjetivo

El adjetivo es la palabra que modifica al sustantivo, lo califica o lo determina.
Ejemplos:

Música revolucionaria
Mujer inmadura
Hombres problemáticos
Libros inspiradores

El verbo

Esta palabra expresa acción física o anímica. Pueden ser acciones visibles o imperceptibles.

Ejemplos de acciones visibles:

corrieron
ilumino
escribiré
bailamos

Ejemplos de movimientos imperceptibles:

pensaré
amo
odiamos

Formas impersonales del verbo

Las formas impersonales del verbo no están conjugadas con las personas gramaticales, y su función sintáctica es acompañar un verbo auxiliar. Desempeñan funciones de sustantivo, adjetivo o adverbio. Estas formas impersonales son también llamadas *verboides*, y son el infinitivo, el gerundio y el participio.

Infinitivo. Se encuentran en infinitivo todos los verbos terminados en ar, er, ir.
Ejemplos:

lavar	leer
cantar	escribir
amar	dormir
comer	vivir
correr	

Gerundio. Sus terminaciones son ando, iendo.
Ejemplos:

lavando
cantando
comiendo
viviendo

Participio. Le corresponden las terminaciones ado, ido, to, so, cho.
Ejemplos:

terminado
redimido
frito
impreso
satisfecho

El adverbio

Los adverbios son palabras que califican verbos, adjetivos u otros adverbios.

Ejemplos:

Baila **graciosamente** (Para calificar un verbo)
Un refresco **exageradamente** frío (Para calificar un adjetivo)
Estuvo **muy** mal (Para calificar un adverbio)

En los ejemplos anteriores, los adverbios están escritos en negritas.

Ejercicios

1. Selecciona la opción que tiene un sustantivo propio en negritas:
   a) La **niña** come muy pocas proteínas
   b) Mi **perro** rompe todo
   c) **Minerva** baila mucho en las fiestas
   d) Todas esas cosas las aprendí en la **escuela**

2. Selecciona la opción que tiene un sustantivo abstracto en negritas:
   a) Me encanta la canción que habla de Mary y de **Sandra**
   b) Es la **casa** que siempre esperé
   c) Perdí gracias a que a la baraja le falta una **carta**
   d) En todas las épocas, ha habido personas sin **moral**

3. Selecciona la opción que tiene un pronombre personal en negritas:
   a) Ella no entiende de **eso**
   b) **Yo** no entiendo de eso.
   c) **Aquélla** es mi mejor alumna.
   d) **Esto** no es lo que nosotros esperábamos.

4. Selecciona la opción que tiene un pronombre demostrativo en negritas:
   a) El juicio no empezó gracias a **esos** desajustes.
   b) **Ésta** está mal
   c) **Aquel** rincón del mundo es el único seguro.
   d) Luego te cuento qué pasó con **aquello**.

5. Selecciona la opción que tiene un artículo determinado en negritas:
   a) **Ése** se quedó con su abuela.
   b) **Ese** niño se quedó con su abuela.
   c) **Un** niño se quedó con su abuela.
   d) **El** niño se quedó con su abuela.

6. Selecciona la opción que tiene un adjetivo en negritas:
   a) Era un **refresco** muy sabroso.
   b) **Había** muchos ratones en la bodega.
   c) Corre conejo; corre veloz, que va alcanzarte el lobo **feroz**.
   d) Nunca creí **que** diría algo como eso.

7. Selecciona la opción que contiene un verbo conjugado:
   a) Estuve **escribiendo** toda la tarde.
   b) **Hice** toda mi tarea el sábado.
   c) El documento está **impreso** desde ayer.
   d) Ya está listo el platillo con camarón **frito**.

8. Selecciona la opción que tiene un gerundio en negritas:
   a) Adriana nunca estudia porque siempre está **moviendo** bigote
   b) La rata **se escondió** entre todos los escombros del desván
   c) Cuando era niño, **tocaba** el piano
   d) Nunca supo **amar** sin ser correspondido

9. Selecciona la opción que tiene un adverbio en negritas:
   a) Él es un **estudiante** muy inteligente
   b) La niña siempre estudia **silenciosamente**
   c) **Necesito** comprarme un vestido negro
   d) No sé bailar **eso**

2 La oración

Propósito: el alumno reconocerá el sujeto y el predicado a partir de una oración propuesta.

Definición de oración

Una oración es la unidad mínima del lenguaje con sentido completo. Es decir, la oración es la palabra o conjunto de palabras con que se expresa una idea completa. Una oración que está formada por una sola palabra se llama unimembre, por ejemplo: ¡Vete! ¡Adelante! Este tipo de expresiones poseen una idea completa. Aunque las forma una sola palabra, pueden llevar otras que la acompañen, y de todos modos son unimembres. Por el contrario, la oración bimembre se compone de sujeto y predicado.

Clasificación de las oraciones

Las oraciones, según su intención, pueden ser exclamativas, interrogativas o imperativas.

- **Exclamativas.** Proporcionan características fonéticas respecto a sentimientos de tensión, placer, o excitación. Para escribir estas oraciones, utilizamos los signos de exclamación (¡!).
  Ejemplos:

  ¡Qué bonita muñeca! ¡Hola! ¡Qué hermosa canción!

- **Interrogativas.** Son las expresiones que se dirigen a uno o varios oyentes en espera de una respuesta que resuelva la pregunta. Para escribir estas oraciones, utilizamos los signos de interrogación (¿?).
  Ejemplo:

  ¿Te gustan los Beatles?

- **Imperativas.** Expresan un ruego, un mandato o una exhortación.

Ejemplo:

Sal de mi cuarto ahora mismo.
Quítate de mi vista.
Dame tu opinión.

Las oraciones imperativas poseen un carácter exclamativo; en ocasiones, se escriben entre signos de exclamación.

El sujeto

El sujeto es un sustantivo o frase sustantivada que coincide con el verbo en género y número, ya que es de él de quien se habla en la oración.

El sujeto puede ocupar cualquier lugar en la oración. Lo importante es localizarlo; para ello, se pregunta quién o qué hace la acción del verbo.

Ejemplos de sujetos:

La maestra de gimnasia
El escritor de novelas de misterio
La influencia de la tauromaquia en la vida sexual de los samuráis
Lo positivo de lo negativo

Los sujetos anteriores pueden encontrarse en cualquier parte de la oración.
Ejemplos:

Como si tuviera 15 años, **la maestra de gimnasia** dio un salto impresionante.

Ganó un premio de Literatura **el escritor de novelas de misterio**.

Tipos de sujeto

Sujeto explícito	Sujeto tácito
Se llama así al que está escrito en la oración. Un sujeto es explícito cuando podemos verlo, como en el siguiente ejemplo. El sujeto está en negritas: **Alan** es el encargado de diseñar todos nuestros planes.	Es aquel que no está escrito sino implícito en el verbo de la oración. Ejemplo: Lo creo pero no lo imagino. En el enunciado anterior, el sujeto es *yo*.

Sujeto simple y sujeto complejo

Sujeto simple	Sujeto complejo
Puede estar formado por una o varias palabras: **Don Juan** vuelve a la lucha. **El maestro de canto** es argentino. En los ejemplos anteriores, el sujeto está escrito en negritas.	El sujeto complejo es aquel que siempre tiene la estructura de Sutano y Mengano. Ejemplo: **John Lennon y Paul McCartney** escribieron las mejores canciones del mundo.

Complementos del sujeto

Núcleo del sujeto. El núcleo del sujeto es el sustantivo. En las oraciones con sujeto simple, con un solo sustantivo, el núcleo siempre es esa misma palabra.
Ejemplos:

Viridiana trabajaba mucho todos los días.

En la oración anterior, el núcleo del sujeto está en negritas.

Bianca y **Marcela** son hermanas.

Cuando se trata de un sujeto complejo, el núcleo lo conforman los dos sustantivos.

Modificador directo. Los modificadores directos del sujeto son los artículos determinados (el, la, los, las) e indeterminados (un, una, unos, unas) y los adjetivos.

Ejemplo:

El **árbol** de manzanas creció mucho durante mi ausencia.

En la oración anterior, el núcleo del sujeto está en negritas, y el modificador directo, en cursivas. Si hubiera un adjetivo junto al sustantivo, éste también sería un modificador directo del mismo.

Ejemplo:

El **árbol** *grande* de manzanas creció mucho durante mi ausencia.

En esta nueva oración, tenemos dos modificadores directos. Mismos que están escritos en cursivas.

Modificador indirecto. En el modificador directo, no interviene otra palabra para transformar el núcleo del sujeto. En cambio, el modificador indirecto se caracteriza por emplear una preposición, como *de*, *con*, *para*, *sobre*, *sin*.
Ejemplo:

El **pavo** de *Navidad* es para compartir con la familia.

En el ejemplo anterior, el sustantivo está escrito en negritas; el modificador indirecto, en cursivas, y el modificador directo, subrayado. Es indirecto porque requiere de la preposición *de* para modificar al sujeto.

Los modificadores también pueden ser modificados por otros modificadores. Suena complicado pero en realidad es algo muy sencillo.
Ejemplo:

El **relleno** *del* **pavo** navideño es lo único que me gusta de la cena.

En el ejemplo anterior, el artículo inicial *el* es modificador directo del sustantivo *relleno*.
La palabra *del* está formada por la preposición *de* más el artículo *el*. (*de* + *el*). Por lo tanto, podemos decir que la preposición *de* ayuda a la palabra *pavo* a modificar el sustantivo *relleno*; así que es su modificador indirecto. El artículo *el* contenido en la palabra *del* es modificador directo del modificador indirecto *pavo*.

El predicado

El predicado es lo que se dice del sujeto, y su núcleo es el verbo. El verbo concuerda con el sujeto en número y género y siempre debe estar conjugado.
Ejemplo:

Viridiana ***estaba*** *muy ocupada*.

En el ejemplo anterior, el sujeto está subrayado; el predicado, en cursivas; el verbo, en negritas.

Complemento directo
Algunos autores también lo llaman complemento de objeto directo. Quien realiza la acción del verbo es el sujeto, pero a veces la acción se transfiere a un objeto.
Ejemplo:

Patricia abrió **la puerta**.

En el ejemplo anterior, el complemento directo es *la puerta*. Para localizar el complemento directo, preguntamos ¿qué? al verbo. ¿Qué abrió Patricia? La respuesta es *la puerta*.
No todos los verbos admiten complemento directo; aquellos que lo aceptan son los transitivos. Se llaman así porque transfieren la acción a algún objeto.
Ejemplos de verbos transitivos:

Escribir, leer, tocar, ver, llevar, oler.

Podemos decir que escribimos un cuento, que leemos una novela, que tocamos un instrumento, que vemos una película, que llevamos tal o cual cosa o que olemos un perfume.

Los verbos que no transfieren la acción se llaman intransitivos.
Ejemplos de verbos intransitivos:

Llover, tambalear.

En el caso de estos verbos, no podemos decir que llovemos algo o que tambaleamos algo o a alguien. Por eso son intransitivos. No transfieren su acción a ningún objeto.

Complemento indirecto
El complemento indirecto es la persona o cosa que se ve perjudicada o beneficiada con la acción verbal. Antes del objeto indirecto, casi siempre se encuentra la preposición *a*. Así pues, para localizarlo en una oración nos preguntamos ¿a quién afecta la acción verbal?, ¿para qué o para quién?

Ejemplos:

Compré alimento **para mi perro**.
Le hice un dibujo **a la maestra de Geografía.**

En los ejemplos anteriores, el objeto indirecto está en negritas.

Complemento circunstancial
El complemento circunstancial aparece cuando al verbo lo acompañan palabras que se refieren a tiempo, modo, lugar, finalidad, etcétera. Cada tipo de complemento circunstancial responde a su correspondiente pregunta, por ejemplo: ¿dónde?, de lugar; ¿cuándo?, de tiempo; ¿cómo?, de modo; ¿para qué?, de finalidad.
Ejemplos:

Complemento	Ejemplo	Pregunta	Respuesta
De modo	Mariana cayó **de rodillas**.	¿Cómo cayó Mariana?	De rodillas
De lugar	Cecilia fue **al mercado**.	¿Adónde fue Cecilia?	Al mercado
De finalidad	Cecilia fue a **dirigir su puesto**.	¿A qué fue Cecilia?	A dirigir su puesto
De tiempo	Cecilia fue a dirigir su puesto **al día siguiente**.	¿Cuándo fue Cecilia?	Al día siguiente

Ejercicios

1. Selecciona la opción que tiene el sujeto en negritas:
   a) El perro **rompió mis zapatos nuevos**
   b) Han transcurrido **10 años** desde entonces
   c) **Viví demasiado** tiempo en provincia
   d) Sin importar qué suceda, **siempre seremos diferentes**

2. Selecciona la opción que tiene una oración con sujeto tácito:
   a) Yo no creo en fantasmas ni en cosas del más allá
   b) Todas las tardes, Viridiana hace un dibujo nuevo
   c) Natalia habló por teléfono con su amiga
   d) Puedo imaginarte como el ratón vaquero

3. Selecciona la opción que tiene una oración con sujeto complejo:
   a) Sandra me explicó cómo organizar mis documentos.
   b) El perro del vecino se perdió en nuestro jardín.
   c) Alan y Enrique son buenos amigos.
   d) Los extranjeros admiran la arquitectura de nuestro país.

4. Selecciona la opción que tiene una oración con el predicado en negritas:
   a) Escribieron novelas interesantes **los alumnos del taller**.
   b) **Nuestro equipo** ganó el primer trofeo.
   c) La administración de la empresa **pasó a manos de mi hermano.**
   d) **El verano pasado** duró demasiado tiempo.

5. Selecciona la opción que tiene el sujeto subrayado:
   a) Muy lentamente, me escapé del salón de clases.
   b) Ha pasado demasiado tiempo desde entonces.
   c) Algunos niños aprenden mejor en un ambiente familiar.
   d) Los libros leídos son sueños realizados.

6. Selecciona la opción que tiene una oración con sujeto explícito:
   a) Ana Claudia tiene una cita con Manuel.
   b) Terminará el trabajo.
   c) Creo que puedo hacerlo sola.
   d) Lo sabemos todo.

7. Selecciona la opción que tiene una oración con sujeto simple:
   a) Los músicos y los escritores son mi debilidad.
   b) Natalia llevó a Sissi al parque.
   c) Tú y yo traemos zapatos iguales.
   d) Karla y Mary son gemelas.

8. Selecciona la oración que tiene el predicado subrayado:
   a) Las mentiras con el tiempo salen a la luz.
   b) Mientras no tengan nada importante que decir, los muñecos guardan silencio.
   c) Los animales son demasiado inocentes.
   d) Tarde o temprano, el bien todo lo alcanza.

3 La acentuación

Propósito: el alumno identificará las palabras acentuadas correctamente a partir de un ejemplo dado.

La sílaba

Las palabras se forman por una o más sílabas. La sílaba es la mínima unidad de sonido del lenguaje oral. Puede estar integrada por una, dos o tres vocales, acompañadas o no de una, dos, tres o cuatro consonantes. En el español hay cinco vocales: tres fuertes y dos débiles.

Vocales
- Fuertes: a, e, o
- Débiles: i. u

Las vocales pueden formar diptongos y triptongos.

Vocales
- Diptongos: ai, au, oi, ei, eu, ou, iu, ia, ua, io, ui, ie, ue, uo
- Triptongos: iai, uai, iei, uei

Una palabra se puede formar con:

sólo vocales	consonantes y vocales	consonantes y diptongos	consonantes y triptongos
oía	va–so	sie–te	Cuau–tla

Para separar las palabras en sílabas se debe tomar en cuenta que:

- Cuando hay un diptongo, la sílaba se forma con la consonante que le precede.

  Vie–na
- Pero si el acento gráfico cae en una vocal débil, se rompe el diptongo.

  dí–a
- Cuando hay dos vocales fuertes juntas, nunca forman sílabas.

  Co–o–pe–rar
  O–a–xa–ca

Acento ortográfico y acento prosódico

Acento es el sonido fuerte de una determinada sílaba en una palabra. En las palabras hay una sílaba en la que se recarga la pronunciación, la cual se llama sílaba tónica; las sílabas restantes de la palabra se llaman átonas, es decir, sin tono.

Ejemplo:

ár – bol

sílaba tónica → ár; sílaba átona → bol

Cuando la sílaba tónica lleva una tilde sobre una vocal, se llama *acento ortográfico*; cuando sólo se pronuncia se denomina *acento prosódico*.

Ejemplo:

Acento prosódico

es – pa – ñol ← sílaba tónica

Acento ortográfico

e – xá – me – nes ← sílaba tónica

Clasificación de las palabras

Se clasifican en agudas, graves, esdrújulas y sobreesdrújulas.

Palabras agudas

Son las que tienen la mayor fuerza de voz en la última sílaba; llevan tilde las terminadas en ***n, s*** o ***vocal***.

Ejemplo:

quizá
tapón
compás

Palabras graves

Son las que poseen la mayor fuerza de voz en la penúltima sílaba; llevan tilde las terminadas en ***consonante excepto n*** o ***s*** y ***vocales.***

Ejemplo:

lápiz
cóndor

Palabras esdrújulas

Éstas tienen la mayor fuerza de voz en la antepenúltima sílaba y ***todas llevan tilde.***

Ejemplo:

música
química

Palabras sobreesdrújulas

Son las que poseen la mayor fuerza de voz antes de la antepenúltima sílaba y ***todas llevan tilde.***

Ejemplo:

comunícamelo
fácilmente

- Los adverbios que terminan en la palabra "mente" conservan el acento del adjetivo de donde se han formado.

Ejemplo:

Adjetivo	Adverbio
Fácil	Fácilmente
Hábil	Hábilmente

- Los monosílabos no se acentúan, incluso los verbales.

Ejemplo:

fue, dio, vio, fe, fui...

Acento diacrítico

Se coloca en algunas palabras para distinguir el significado y la función de otras de igual escritura, pero de distinto significado.

Ejemplo:

No me gustó **el** concierto.

Me lo platicó **él**.

En el ejemplo anterior hay dos oraciones con dos palabras iguales **(el)**, pero con diferente función gramatical. En la primera oración, ***el*** es un artículo y no se acentúa; en cambio en la segunda, **"él"** hace la función de un pronombre personal y, por tanto, es necesario colocar la tilde para establecer la diferencia.

Ejemplo:

¿**Dónde** estabas?

El libro está **donde** lo dejaste.

En estos ejemplos, la palabra **"donde"** realiza dos funciones diferentes; en la primera oración es un pronombre interrogativo (lleva tilde), y en la segunda, un pronombre relativo (sin tilde).

Los siguientes cuadros presentan las palabras que deben llevar acento diacrítico o no.

Con adjetivos y pronombres demostrativos

Sí llevan acento	No llevan acento	Ejemplo
Pronombres demostrativos	*Adjetivos demostrativos*	
aquél aquélla ése ésa ésos ésas éste ésta éstos éstas	aquel aquella ese esa esos esas este esta estos estas	**Aquel** libro está roto; **aquél**, maltratado.

Con adverbios o pronombres

Sí llevan acento	No llevan acento	Ejemplos
Adverbios o pronombres interrogativos o exclamativos	*Adjetivos relativos*	
cuándo cómo cuál cuánto dónde qué quién	cuando como cual cuanto donde que quien	¿**Cómo** te llamas? ¡**Cómo** me gusta esa canción! Se vistió tal y **como** le aconsejó su madre.

Con monosílabos

Sí llevan acento	No llevan acento	Ejemplos
mí (pronombre personal)	mi (adjetivo posesivo)	Este regalo es para **mí**. **Mi** regalo está ahí.
sí (adverbio de afirmación) sí (pronombre personal)	si (conjunción condicional)	**Sí**, iremos a la fiesta. Estaba muy seguro de **sí** mismo. **Si** llegas temprano, iremos a la fiesta.
tú (pronombre personal)	tu (adjetivo posesivo)	Eso lo dijiste **tú**. No me agrada **tu** comportamiento.
té (sustantivo de infusión)	te (pronombre)	¿Quieres tomar un **té**? **Te** lo advertí.
aún (equivale a todavía)	aun (equivale a incluso)	Los alumnos **aún** están aquí. Ya llegaron los maestros, **aun** los alumnos.
más (adverbio de cantidad)	mas (equivale a *pero*)	Tráeme **más** harina. Quise decírselo, **mas** no pude.

Con verbos

Sí llevan acento	No llevan acento	Ejemplos
dé (inflexión del verbo dar)	de (preposición)	Espera a que te **dé** el boleto. Esa casa es **de** madera.
sé (inflexión del verbo saber)	se (pronombre personal)	Ya lo **sé** que te irás. **Se** esperó tanto tiempo.

Otros

Sí llevan acento	No llevan acento	Ejemplos
sólo (equivale a *solamente*)	solo (adjetivo)	**Sólo** quiero decirte una cosa. Me quedé **solo**.

Los sinónimos
Los sinónimos son las palabras que tienen significados similares o afines, pero se escriben y pronuncian distinto. Su significado no es igual, en un sentido estricto, así que la aplicación de un sinónimo depende del contexto en que habrá de ubicarse.
Ejemplo:

Cuentan que en el umbral de la casa, se aparecía un monstruo **horripilante**.

Ahora veamos la oración anterior pero sin la palabra en negritas. En su lugar, utilizaremos un sinónimo.
Cuentan que en el umbral de la casa, se aparecía un monstruo **espantoso**.

Antónimos
Un antónimo es una palabra que tiene significado opuesto respecto de otra.
Ejemplo:
Siempre condujo el apellido de nuestra familia por el camino del **honor**.
Si en la oración anterior sustituimos la palabra en negritas por un antónimo, cambiaríamos su sentido por completo.
Siempre condujo el apellido de nuestra familia por el camino de la **deshonra**.

Pleonasmos
Un pleonasmo es una construcción gramatical que es demasiado redundante. Contiene vocablos que no son necesarios para que dicha figura gramatical tenga sentido.
Ejemplos:

A cada paso que daba, dejaba atrás la hermosa galaxia de estrellas.
Si establecemos que una galaxia es un conjunto de estrellas, resulta innecesaria la expresión *galaxia de estrellas*.

Ejercicios

1. Selecciona la opción en cuya palabra subrayada debe romperse el diptongo al momento de separarla en sílabas:
   a) Ella nunca quiere <u>cooperar</u> con nosotros.
   b) El maestro me dijo que me presente en la <u>coordinación</u>.
   c) Ayer hablé con <u>María</u>.
   d) Iremos de vacaciones a <u>Oaxaca</u>.

2. Selecciona la opción que presente una palabra separada en sílabas de forma correcta:
   a) fui – mos
   b) ae – ro – pu – er – to
   c) mú – sic – a
   d) sal – ón

3. ¿Qué opción corresponde a una lista de palabras graves?
   a) Álbum, lápiz, trapo, taza
   b) Árbol, música, química, ingrediente
   c) Cama, libro, únicamente, tesón
   d) Comunícamelo, maravilloso, fácilmente, llave

4. ¿Qué opción corresponde a una lista de palabras agudas?
   a) Maravilloso, crítico, estación, metal
   b) Imaginación, interesante, tormenta, almohadón
   c) Tapón, compás, almacén, tambor
   d) Canción, tomate, flor, cóndor

5. ¿Qué opción corresponde a una lista de palabras esdrújulas?
   a) Títere, romántico, muñeco, florero
   b) Tálamo, avión, maple, toro
   c) Sopa, periódico, rincón, luz
   d) Música, rápido, esdrújula, relámpago

6. Selecciona el inciso que presente un uso correcto de los acentos ortográficos y prosódicos:
   a) El exámen de español fué muy sencillo.
   b) Nunca estuvo en mi mano ayudarte.
   c) Las fálsas acusaciones en mi contra terminaron por desalentarme.
   d) Las crisis siémpre empiezan por afectar empresas pequeñas.

7. Selecciona el inciso que presente un uso correcto de los acentos diacríticos:
   a) Cómprame este caballo.
   b) Ya té dije que té quiero mucho.
   c) Quisiera pasar un tiempo sólo.
   d) Te daré una oportunidad, sí me das una explicación.

8. Elige la opción que tenga una palabra grave en negritas:
   a) No sé otra **canción**; me costó mucho trabajo aprender ésta.
   b) Las palabras **esdrújulas** no son comunes.
   c) La **música** de los Beatles es una belleza.
   d) Tu hermano es un **imbécil**.

Lee la siguiente oración:

Me llamo Claudia **Ramírez** Mata.

9. ¿Cómo se clasifica la palabra en negritas?
   a) Grave
   b) Aguda
   c) Esdrújula
   d) Sobreesdrújula

10. ¿Qué opción presenta una palabra grave?
    a) Cañón
    b) Aritmética
    c) Romántico
    d) Frágil

11. Selecciona la opción que contiene un pleonasmo:
    a) Los perros fueron a cuidar el rebaño.
    b) Llegó un grupo de nuevo ingreso.
    c) Fui perseguida por una jauría de perros.
    d) Desembarcamos cerca de un conjunto de islas.

12. Selecciona la opción que contiene un pleonasmo:
    a) Guardé el dinero en la caja registradora.
    b) Escribí un libro de conocimientos básicos.
    c) Subió todos los muebles para arriba.
    d) Ese corredor nos llevó a la salida.

Lee el siguiente texto:

Zapatos de tacón rojos para mujer linda
Guillermo Samperio

A Magali Lara

A los zapatos rojos los colorearon de manzana. Los zapatos rojos se ven bien en el zapatero, en el buró, o abandonados al pie de la cama. Con unos zapatos rojos los pies son <u>importantes</u>. A veces los zapatos rojos piensan. A los zapatos rojos les pusieron chapas por todos lados. Los zapatos rojos saben esperar. Los zapatos rojos son **sinceros**. Los zapatos rojos son el corazón de los pies. Los zapatos rojos se parecen a la mujer linda. Los zapatos rojos van bien con un vestido ajustado o con uno amplio. Los zapatos rojos van bien sin vestido. Los zapatos rojos son medio gitanos. Los zapatos rojos son los labios de la sensualidad.

Los zapatos de tacón rojos son amigos de los zapatos de tacón negros. Los zapatos rojos desean desnudos a los pies. Los zapatos rojos están pintados de amor. Los zapatos rojos son el sueño realizado de los pies. Los zapatos rojos siempre llevan a una bailarina.

13. Selecciona la opción que presente un sinónimo de la palabra en negritas:
    a) falsos
    b) francos
    c) hipócritas
    d) taimados

14. Selecciona la opción que presente un antónimo de la palabra subrayada:
    a) fundamentales
    b) esenciales
    c) insignificantes
    d) solitarios

4

La puntuación

Propósito: el alumno reconocerá el uso correcto de los diferentes signos de puntuación en un ejemplo dado.

El punto

El punto indica la terminación de una idea completa. Después de este signo gramatical, siempre se empieza a escribir con mayúscula.

Punto y seguido. Se utiliza cuando el siguiente periodo va a continuación. La condición para utilizarlo es que la construcción gramatical que siga esté íntimamente ligada con la anterior.

Punto y aparte. Se usa cuando se comienza a escribir en el siguiente renglón. La condición para utilizarlo es que la idea que siga no esté íntimamente ligada con la anterior.

El punto final. Se utiliza al final de cada escrito.

Ejemplo:

> El rancho nada tenía que llamase la atención. Los ranchos y los indios todos se parecen. Una vereda angosta e intransitable, en tiempo de lluvias conducía a una baja de adobe, mal pintada de cal, compuesta de una sala, comedor, dos recámaras y un cuarto de raya.
>
> Manuel Payno

La coma

La coma es otro signo gramatical, y se utiliza en las siguientes situaciones:

- La coma serial se utiliza para separar sustantivos, adjetivos o verbos.

Ejemplo:

Para llevar a cabo el crimen perfecto, necesitaré una invitación falsa, una botella de vino, un pastel, una peluca y un frasco de veneno.

- La coma parentética se utiliza para separar información que se puede suprimir sin alterar el sentido de la oración y sin que ésta luzca incompleta.

Ejemplo:

Mi hermano, que pasó tres meses en Pensilvania, siempre ha tenido una cultura muy amplia.

- La coma del vocativo se utiliza cuando uno emplea el nombre, apodo o lo que sea para referirse a alguien. El vocativo siempre va entre comas.

Ejemplo:

Alan, dame más tiempo.
No hay segundas oportunidades, Melisa.
Ahora, Sandra, te lo explicaré todo.

- La coma del verbo callado sucede con oraciones en serie que comparten el mismo verbo.

Ejemplo:

Enrique escribe poesía; Alan, novelas de misterio; Lydia, cuentos de terror.

- Se utiliza coma al final de oraciones formadas por un participio o un gerundio.

Ejemplo:

Llegando a la oficina, revisaremos los expedientes.
Terminado el trabajo, fuimos a cenar pizza.

El punto y coma

El punto y coma es casi punto y seguido, ya que también marca el final de una construcción gramatical. Lo utilizamos cuando la idea que sigue en un escrito está íntimamente ligada con la anterior. Cuando dicha relación es demasiado cercana, utilizamos punto y coma en lugar de punto y seguido.

Ejemplo:

Llovió toda la noche; el corredor está inundado desde la puerta de la calle.

- Usamos punto y coma para separar oraciones consecutivas que pertenecen a una misma cláusula y contienen palabras separadas por comas.

Ejemplo:
En las escuelas, sin importar que sean particulares o de gobierno, siempre hay problemas; los más comunes, pero muy importantes, tienen que ver con el aprovechamiento académico de cada alumno; los más graves, generalmente ignorados por la comunidad escolar, están relacionados con la violencia.

Los dos puntos

Utilizamos dos puntos en las siguientes situaciones:

- Después de las expresiones de cortesía y saludo, como en una carta.

Ejemplo:

Estimado arquitecto:

- Antes de citar las palabras textuales de otra persona.

Ejemplo:

Paul McCartney dijo: “Devuelvan Irlanda a los irlandeses”.

- Para introducir una lista escrita de forma horizontal, después de una construcción gramatical que tenga complemento directo.

Ejemplo:

Necesitaré los siguientes materiales: una cuerda, tijeras, pegamento, tripas falsas y un dedo humano de utilería.

Cuando la lista se presenta de forma vertical, es posible utilizar los dos puntos aunque no haya complemento directo antes.
Ejemplo:

Necesitaré:
1. una cuerda
2. unas tijeras
3. pegamento
4. tripas falsas
5. un dedo humano de utilería

Los puntos suspensivos

- Los puntos suspensivos se utilizan cuando se deja incompleta una oración para que quede en suspenso.

Ejemplo:

La odiaba tanto que…

- Cuando se quiere expresar duda, incertidumbre o temor.

Ejemplo:

Tu carro está bien pero…

- Cuando se desea expresar una frase inesperada.

Ejemplo:

Cuando entré, la vi con otro hombre y… y era su hermano.

- Para interrumpir una frase que no se considera necesario escribir completa.

Ejemplo:

“El que a buen árbol se arrima…”.

El paréntesis
El paréntesis se utiliza para aislar información explicativa que está alejada del tema del texto.
Ejemplo:
Los programas televisivos (hoy en día) contienen mensajes muy agresivos.

Las comillas
- Las comillas se utilizan para indicar que una palabra es impropia o vulgar.

Ejemplo:

Dijo que tendría que "checar" el documento.

- En títulos de obras menores.

Ejemplo:

Una obra mayor es un libro; una menor, un cuento contenido en dicho libro. Si tuviéramos un libro llamado *Cuentos selectos* y uno de sus cuentos se llamara "El enano charlatán", el título del libro va en cursivas, y el del cuento, entre comillas.

Ejercicios

1. Lee la siguiente oración:

Escucha atentamente, Mariana.

¿Para qué sirve la coma en la oración anterior?
a) Para aislar información parentética
b) Para indicar la presencia de un vocativo
c) Para omitir el verbo
d) Para separar elementos en serie

2. Lee la siguiente oración:

Mi mejor amiga, que es presidenta de La Sociedad de Alumnos, me invitó a su casa de Acapulco.

¿Para qué sirven las comas en la oración anterior?
a) Para aislar información parentética
b) Para indicar la presencia de un vocativo
c) Para omitir el verbo
d) Para separar elementos en serie

3. Lee la siguiente oración:

Minerva es alta; Sara, bajita; Adriana, de estatura media.

¿Para qué sirven las comas en la oración anterior?
a) Para aislar información parentética
b) Para indicar la presencia de un vocativo
c) Para omitir el verbo
d) Para separar elementos en serie

4. Signo de puntuación que se utiliza cuando la construcción gramatical anterior está íntimamente ligada con la siguiente:
a) punto y seguido
b) punto y aparte
c) puntos suspensivos
d) dos puntos

5. Signo gramatical que se utiliza cuando se deja incompleta una oración:
a) dos puntos
b) punto y seguido
c) puntos suspensivos
d) punto y aparte

6. Se colocan al principio y al final de una cita textual:
a) Paréntesis
b) Comas
c) Comillas
d) Puntos

5

Uso de grafías

Propósito: el alumno especificará las palabras que deben escribirse con la ortografía correcta.

Uso de *S*, *C*, *Z*

Se escriben con S

- Los adjetivos terminados en **oso**, **osa,** procedentes de sustantivos.

Ejemplo:

Sustantivo	Adjetivo
Envidia	Envidi**oso** / envidi**osa**
Religión	Religi**oso** / religi**osa**

- Sustantivos que acaban en -**sión**, procedentes de adjetivos terminados en -**so**, -**sor**, -**sible** o -**sivo**.

Ejemplo:

Adjetivo	Sustantivo
Perver**so**	Perver**sión**
Compul**sivo**	Compul**sión**
Agres**or**	Agre**sión**
Admi**sible**	Admi**sión**

- Palabras terminadas en **ismo**, **ista**.

Ejemplo:

cristian**ismo**
pian**ista**

- Con las terminaciones **ísimo**, **ísima.**

Ejemplo:

buen**ísimo** / buen**ísima**

- En gentilicios que terminan en **ense.**

Ejemplo:

guerrer**ense**

- Con las terminaciones **enso**, **ensa**.

Ejemplo:

desc**enso**
of**ensa**

- Con la terminación **sis.**

Ejemplo:

géne**sis**

- Con las terminaciones de adjetivos ordinales.

Ejemplo:

vig**ésima**
quincuag**ésima**

Se escriben con *C*

- Las palabras que terminan en **ancia**, **ancio**, **encia**, **uncia**, **uncio**. Excepto Hortensia.

Ejemplo:

Abund**ancia,** cans**ancio,** paci**encia,** ren**uncia,** ren**uncio**

- Las palabras que terminan en **cito**, **ecito**, **cilio**, **ecillo**. Excepto las que se deriven de palabras con **s** en la última sílaba (bolsa-bolsillo).

Ejemplo:

pastor → pastor**cito**
grande → grand**ecito**
pastor → pastor**cillo**
grande → grand**ecillo**

- Los sustantivos que terminan en **ción** y que proceden de palabras acabadas en **to** y **do**.

Ejemplo:

discre**to** → discre**ción**
ocupa**do** → ocupa**ción**

Se escriben con *Z*

- Los adjetivos que terminan en -**az** y -**oz** procedentes de sustantivos.

Ejemplo:

Sustantivo	Adjetivo
Audacia	Aud**az**
Velocidad	Vel**oz**

- Las palabras terminadas en **anza**. Excepto gansa y cansa.

Ejemplo:

d**anza**
sembl**anza**

- Las palabras que terminan en **azgo**. Excepto algunas, como *rasgo, pelasgo* o *trasgo*.

Ejemplo:

novi**azgo**
hall**azgo**

- Las palabras terminadas en **azo**, **aza**.

Ejemplo:

port**azo**
amen**aza**

- Los sustantivos terminados en **ez**, **eza**.

Ejemplo:

vej**ez**
per**eza**

- Las palabras terminadas en **zuelo**, **zuela**. Excepto mocosuelo.

Ejemplo:

ladron**zuelo**
mujer**zuela**

- Las palabras terminadas en **uzo**, **uza** y **ezno**.

Ejemplo:

lech**uzo**
lech**uza**
lob**ezno**

- Las terminaciones verbales en **azco**, **azca**, **ezco**, **ozco**, **ozca**, **uzco** y **uzca**.

Ejemplo:

Verbo	Conjugación
Complacer	Compl**azco** / compl**azca**
Crecer	Cr**ezco** / cr**ezca**
Reconocer	Recon**ozco** / recon**ozca**
Lucir	**Luzco** / **luzca**

Uso de B, V

Se escribe con B

- Antes de las consonantes **L** o **R**.

Ejemplo:

blanco
bronco

- Las partículas **bi**, **bis**, **biz** que significan dos veces.

Ejemplo:

bimestre
bisabuelo
bizco

- Palabras que comienzan con **bu**, **bur**, y **bus**.

Ejemplo:

buzo
burla
busca

- Después de **cu**, **ha**, **he**, **hi**, **ho**, **hu**.

Ejemplo:

cubeta
haba
hebilla
hibernación
hobachón
hubo

- Las terminaciones en **ble** y **bilidad**. Excepto movilidad y civilidad.

Ejemplo:

conta**ble**
conta**bilidad**

- Las terminaciones en **bundo**, **bunda**.

Ejemplo:

mori**bundo**
furi**bunda**

- Verbos terminados en **aba**, **abas**, **ábamos**, **abais**, **aban**.

Ejemplo:

camin**aba**
camin**abas**
camin**ábamos**
camin**abais**
camin**aban**

- Las partículas **ab**, **abs**, **ob**, **obs** y **sub**.

Ejemplo:

abdomen
abstemio
obsceno
subterráneo

- Las partículas **bene** y **bien** que significan bondad.

Ejemplo:

benefactor
bienvenido

Se escribe con V

- Después de las consonantes **b**, **d**, **n**.

Ejemplo:

su**bv**ersivo
a**dv**iento
i**nv**ariable

- Después de **ol**.

olvido
p**olv**o

- Las palabras que comienzan con **eva**, **eve**, **evi**, **evo**. Excepto: algunas como ébano, ebanista.

Ejemplo:

evacuación
eventual
evitar
evocación

- Después de las sílabas **pra**, **pre**, **pri**, **pro**. Excepto: probar, probable, prebenda.

Ejemplo:

pravedad
prevenir
privar
proverbio

- Las palabras que comienzan con **vice** y **villa**. Excepto: *billar, bíceps, bicéfalo.*

Ejemplo:

vicepresidente
Villahermosa

- Las terminaciones **viro**, **vira**, **voro** y **vora**. Excepto: víbora.

Ejemplo:

triun**viro**
El**vira**
herbí**voro**
carní**vora**

- Las terminaciones de los adjetivos **ave**, **avo**, **eva**, **evo**, **iva**, **ivo**. Excepto: *árabe*.

Ejemplo:

br**avo**
nu**evo**
nu**eva**
v**ivo**
v**iva**

Uso de *G*, *J*

Se escriben con G

- Las palabras que comienzan o terminan con **geo,** que significa Tierra.

Ejemplo:

Geología
apo**geo**

- Las palabras que comienzan con **gen**.

Ejemplo:

generoso

- Las palabras que comienzan con **gest**.

Ejemplo:

gestoría

- Las palabras que terminan en **gerar**, **ger** y **gir**. Excepto: *tejer, crujir, brujir.*

Ejemplo:

ali**gerar**
prote**ger**
ur**gir**

- Verbos terminados en **giar**.

Ejemplo:

conta**giar**

- Las palabras que comienzan con **legi**, **legis**.

Ejemplo:

legítimo
legislar

Se escriben con *J*

- Los verbos terminados en **jear** y **jar**.

Ejemplo:

ho**jear**
reba**jar**

- Las palabras terminadas en **jero**, **jera**, **jería**. Excepto: *ligero*.

relo**jero**
conse**jera**
relo**jería**

- Las palabras terminadas en **aje**.

Ejemplo:

aprendiz**aje**

- Las palabras que comienzan con **eje**. Excepto: *Egeo y Egeria*.

Ejemplo:

ejército

Uso de *LL*, *Y*

Se escriben con *LL*

- Los verbos que terminan en **llir** y las palabras que se relacionan con ellos.

Ejemplo:

zambu**llir**
bu**lla**
bu**lli**cio

- Palabras terminadas en **illo**, **illa**.

Ejemplo:

cuch**illo**
ladr**illo**
ard**illa**

Se escriben con *Y*

- Cuando la palabra termina en diptongo.

Ejemplo:

h**oy**
Parag**uay**

- Las formas verbales conjugadas de infinitivos terminados en **uir**.

Ejemplo:

Verbo	Conjugación
constr**uir**	constru**yo**
dismin**uir**	disminu**yo**
h**uir**	hu**yo**

Uso de la *H*

Se escriben con H

- Las palabras que comienzan con **hidr** o **hidro**.

Ejemplo:

hidratar
hidrógeno

- Las palabras que comienzan con **hip**. Excepto: *ipo* (veneno), *ipomeico* (ácido), *ipecacuana* (planta medicinal).

Ejemplo:

Hipérbaton, **hip**ócrita

- Las palabras que comienzan con **homo**, **hetero**, **hexa**, **hepta**, **hect**, **hecto**, **hem**, e **higr**. Excepto: *omoplato*.

Ejemplo:

homófono
heterosexual
hexaedro
heptasílabo
hectárea
hectolitro
hemofilia
higrométrico

- Las palabras que comienzan con **hum**. Excepto: umbral, umbría, umbilical, umbela.

Ejemplo:

humano

- Las palabras que comienzan con **hosp**, **herb**, **hist**, **host**, **horr** y **holg**. Excepto: *istmo*, *ostra* y *Olga*.

Ejemplo:

hospital
herbolaria
historia
hostería
horror
holgazán

- Las palabras que comienzan con **herm** o **hern**. Excepto: *Ernesto, Ernestina, ermitaño, ermita.*

Ejemplo:

Hermano, **hern**ia

- Las palabras que comienzan con **hia**, **hie**, **hua**, **hui**.

Ejemplo:

hiato, **hie**rro, **hua**steco, **huir**

- Las terminaciones **huelo**, **huela**.

Ejemplo:

Mati**huelo,** vi**huela**

Uso de *R*, *RR*

Se escribe con *RR*

- Cuando va en medio de vocales y el sonido es fuerte.

Ejemplo:

fo**rra**je
b**orra**r

- Cuando se forman palabras compuestas y la segunda comienza con "**r**".

auto retrato → autorretrato
banca rota → banca**rr**ota

Se escribe con *R*

- En las palabras en que suena suave. La R suena fuerte después de n, l, s y b, pero no se duplica.

Suave	Fuerte
Moral	Son**r**isa
Pera	Al**r**ededor
Pero	Is**r**ael
Mira	Sub**r**ayar

Ejercicios

1. ¿Qué oración tiene las palabras correctamente escritas con las grafías *s*, *c* y *z*?
   a) Hubo una amenaza de bomba durante el concurso de dansa.
   b) Ese portazo fue el fin de nuestro noviazgo.
   c) Los pastorcitos llevaban dulces en sus bolcillos.
   d) Tomé una foto buenícima de los osesnos con su madre.

2. ¿Qué oración tiene las palabras correctamente escritas con las grafías *v* y *b*?
   a) ¡Alguien robó los livros de contavilidad!
   b) Trajo una cuveta llena de havas.
   c) Ese caballo blanco brincó las trancas muy fácilmente.
   d) Se trata de un antiguo proberbio chino que havla de compartir.

3. Selecciona la opción que presente una oración con ortografía correcta.
   a) El animal no tuvo más remedio que correr hacia los arbustos.
   b) El gato huyó en un bote de bela.
   c) Las vromas pesadas no son vromas.
   d) Debemos agradecer a nuestro venefactor.

4. Selecciona la opción que presente una oración con ortografía correcta:
   a) Por favor no ballas con ella.
   b) Recolectamos bayas para la merienda.
   c) Las vayas son frutos del bosque.
   d) Las vallenas son hermosos monstruos marinos.

5. Elige la opción que presente una ortografía correcta:
   a) Para ser un birtuoso de cualquier intrumento, hay que practicar 13 horas diarias.
   b) Ese conportamiento no es correcto.
   c) En las próximas elecciones, no pienso botar por nadie.
   d) Las violetas pertenecen al grupo de los violáceos.

6. Elige la opción que presente una ortografía correcta:
   a) El ambiente aquí siempre está muy tenso.
   b) A la pobre siempre la escondían en el zótano.
   c) El viento hace un sonido cibilante.
   d) El lugar estava ya muy cambiado.

6 Razonamiento verbal

Propósito: el alumno reconocerá el uso correcto de los diferentes signos de puntuación en un ejemplo dado.

En esta fase del razonamiento verbal, se evalúan las habilidades del razonamiento lógico, inductivo y analógico del aspirante a Nivel Superior. El tipo de preguntas que se presentan consisten en: completar oraciones, elaborar inferencias lógicas y silogísticas, establecer relaciones analógicas, reconstruir y comprender textos.

Completar oraciones

En esta parte el aspirante deberá completar oraciones o interpretar razonamientos lógicos y analógicos. En estas preguntas se muestra un texto en el cual se ha omitido una o más palabras y el aspirante tendrá que identificar la relación entre diferentes tipos de elementos de un texto, y seleccionar la palabra adecuada de acuerdo con el contenido de la oración.

Ejemplo:

Complete la siguiente afirmación.

Luis es un hombre ____________; casi no tiene amigos.

a) antipático b) sosegado c) nervioso d) sociable

Observe que las palabras que contiene cada opción, cabrían dentro de los espacios de la frase para completarlo; sin embargo, sólo el inciso **a** es el que completa correctamente, puesto que, lo que se dice en la primera oración, se confirma en la segunda.

Analogías y relaciones

Cuando se reconocen algunos caracteres ciertamente comunes en dos o más objetos, se infiere que también concuerdan con otros objetos semejantes. A este razonamiento se le llama argumento de analogía. Las preguntas de analogías exigen entender los conceptos y las relaciones entre ellos, e identificar las relaciones similares o paralelas. Usted tendrá que entender los conceptos y las relaciones entre dos conceptos, e identificar las relaciones similares o paralelas que existen entre dos conceptos propuestos.

Ejemplo:

Mantel es a mesa como sábana es a:

a) edredón b) colchón c) rodapié d) almohada

Para contestar este tipo de preguntas, seguimos la lógica de que el mantel se coloca sobre la mesa, y la sábana sobre el colchón, por tanto, la respuesta correcta es el inciso **b**.

Construcción y reconstrucción de textos

En el lenguaje oral ordenar nuestros pensamientos es más fácil que en el lenguaje escrito, puesto que cuando hablamos nos ayudamos de algunos apoyos extras que permiten la comprensión del mensaje.

En el lenguaje escrito es más complicado transmitir el mensaje, ya que tenemos que redactar, y por redactar entendemos ordenar nuestros pensamientos en forma escrita.

En esta parte, se le pedirá revisar enunciados o textos que se presentan con el fin de establecer una secuencia lógica y que exprese una idea coherente.

Ejemplo:

No me digas que eres ______________ cuando a menudo ______________ al trabajo.

a) responsable / faltas b) amable / amas c) puntual / asistes d) cuidadoso / atiendes

En este tipo de preguntas se recomienda leer con atención todas las combinaciones de cada una de las posibles respuestas con el fin de descubrir la correcta. En este caso la respuesta correcta es el inciso **a**.

Comprensión de textos

En la lectura de un texto se puede distinguir, una idea principal y otras secundarias.
La **idea principal** es el núcleo del texto, y en ella se coordina la estructura del mismo; también constituye la base del escrito.
Las **ideas secundarias** se enlazan a la idea principal, cuya función primordial es ampliar o precisar la información del escrito.

Para la compresión de una lectura se sugieren las siguientes actividades:

- Leer el texto completo.
- Subrayar las palabras cuyo significado desconozca y buscar su significado en el diccionario.
- Dividir el texto en párrafos pequeños.
- Buscar las ideas centrales en cada párrafo.
- Reunir las ideas para tener una concepción general del escrito.
- Localizar datos, acontecimientos, personajes, conclusiones y título (en textos literarios).

Inferencias lógicas
En esta parte, usted tendrá que responder preguntas acerca de inferencias lógicas, en las que se le mostrará de una serie de acciones propuestas la que se identifique con el enunciado.

En estas preguntas usted decidirá cuál de las afirmaciones propuestas, es la que está implicada o sigue de la base.

Ejemplo:

Lo matutino siempre expresa:

a) tarde   b) pronto   c) nocturno   d) temprano

Para resolver este tipo de preguntas sólo siga la lógica de la oración; lós incisos **a** y **c** definitivamente no siguen la lógica de la expresión; pareciera que el inciso **b** sí puede seguir el sentido del enunciado, pero sólo el inciso **d** es la respuesta correcta.

Ejercicios

1. Grotesco se refiere a:

   a) regular b) serio c) risible d) estrecho

2. Tertulia se parece a:

   a) mutismo b) sigilo c) tumulto d) charla

3. Argucia NO se asemeja a:

   a) embuste b) rectitud c) apariencia d) mentira

4. Cohabitar se asemeja a:

   a) congeniar b) discrepar c) desavenirse d) antipatizar

5. Infringir se asemeja a:

   a) acatar b) deferir c) quebrantar d) conceder

6. Farándula NO se asemeja a:

   a) tramoya b) teatro c) vida d) títeres

7. Espontaneidad se asemeja a:

   a) desenfreno b) libertinaje c) vicio d) llaneza

8. Convite se parece a:

   a) imprevisión b) brindis c) omisión d) postergación

9. Quimera se refiere a:

   a) pesimismo b) realidad c) ilusión d) desaliento

10. Jugador de fútbol es a balón, como:

    a) maestro a alumno b) árbitro a uniforme c) obrero a fábrica d) carnicero a cuchillo

11. Oxígeno es a ser humano, como:

    a) cable a computadora b) tierra a gusano c) planta a pez d) agua a planta

12. Mecánico es a taller, como:

    a) carpintero a madera b) estudiante a escuela c) secretaria a lápiz d) doctor a enfermera

13. Llantas es a automóvil, como:

    a) motor a camión b) herradura a caballo c) cable a tranvía d) caja a camioneta

14. Tijeras es a estilista, como:

a) machete a arbusto b) pelota a patio c) cuchillo a cocinero d) secretaria a carta

15. Paciente es a doctor, como:

a) abogado a juez b) mecánico a chofer c) cliente a vendedor d) clérigo a monja

16. Ensayar es a músico, como:

a) acampar a paseante b) practicar a deportista c) beber a borracho d) nadar a nadador

17. Una computadora siempre tiene:

a) mouse b) módem c) disco duro d) monitor

18. Una escuela siempre incluye:

a) prefecto b) psicólogo c) secretaria d) subdirector

19. Una oficina siempre tiene:

a) computadora b) escritorio c) café d) libros

20. Lo mensual siempre expresa:

a) bimestral b) semestre c) mes d) cuatrimestral

21. Altruismo siempre encierra:

a) sordidez b) filantropía c) indiferencia d) egoísmo

22. Una fábrica siempre tiene:

a) cascos b) mesas c) máquinas d) bancos

23. Una librería siempre tiene:

a) estantes b) escritorios c) ventanas d) caja registradora

24. Los alumnos ______________ atentos cuando estudian.

a) estarían b) estaban c) estarán d) están

25. La conferencia que escuchamos ayer fue excelente porque el ponente nos ______________ sobre la problemática actual en educación.

a) enfatizó b) habló c) señaló d) contó

26. Jimena y su esposo sostuvieron una ______________ sobre el controvertido comportamiento de su hija.

a) discusión b) entrevista c) disertación d) reconciliación

27. El auto disminuyó la velocidad hasta que el conductor consideró que ______________ seguro.

a) estaría b) estaba c) estará d) está

28. El jugador y el árbitro tuvieron un _____________ debido a una confusión.

a) arreglo b) acuerdo c) altercado d) convenio

Respuestas a los reactivos de Español

Unidad 1
1. c
2. d
3. b
4. b
5. d
6. c
7. b
8. a
9. b

Unidad 2
1. b
2. d
3. c
4. c
5. c
6. a
7. b
8. d

Unidad 3
1. c
2. a
3. a
4. c
5. d
6. b
7. a
8. d
9. a
10. d
11. c
12. c
13. b
14. c

Unidad 4
1. b
2. a
3. c
4. a
5. c
6. c

Unidad 5
1. b
2. c
3. a
4. b
5. d
6. a

Unidad 6	
1. c	15. c
2. d	16. b
3. b	17. c
4. a	18. c
5. c	19. b
6. c	20. c
7. d	21. b
8. b	22. c
9. c	23. a
10. d	24. d
11. d	25. b
12. b	26. a
13. b	27. a
14. c	28. c

Unidad 1 Formas discursivas del texto
1. Descripción
2. Narración
3. Argumentación

Unidad 2 Tipos de textos
1. Textos literarios
2. Textos expositivos
3. Comprensión de textos



Comprensión
de textos

1 Formas discursivas del texto

Objetivo: El alumno estudiará las formas discursivas del texto.

Las formas discursivas o expresiones lingüísticas tienen un propósito específico, la Estilística es la disciplina encargada de estudiar el lenguaje y el arte del estilo.
La Estilística refiere que las formas discursivas son: la exposición, la descripción, la narración y la argumentación. Es una práctica común mezclar las cuatro formas discursivas, pero siempre hay preponderancia de una, respecto a las otras.

Descripción

En los textos literarios, la descripción y la narración se utilizan con frecuencia, la descripción posibilita detallar la percepción que se tiene de las personas, los lugares, el ambiente, los objetos, los hechos o las circunstancias de todo cuanto nos rodea.
Enumerar las partes que integran un todo es la meta que se desea alcanzar al describir, pero la descripción literaria busca, además de enumerar, conmover al leer, debe haber emociones estéticas que se perciben al avanzar en el texto. Las palabras son el puente que establece la comunicación entre el escritor y el lector, por tanto el lenguaje descriptivo debe ser adecuado.
Algunos autores definen a la descripción de esta manera:

- Dibujar, delinear, representar personas o cosas por medio del lenguaje.
- Conseguir que algo se vea.
- Pintar.
- Describir un cuadro.

La descripción puede tomar dos tonalidades, una es la descripción objetiva, ésta se apega a la realidad, no pierde de vista el lenguaje, lo aplica de manera precisa para que el texto descriptivo forme en la mente del lector una imagen clara.
La segunda es la descripción subjetiva, la cual se caracteriza por incluir los sentimientos que produce aquello que se está describiendo, por lo tanto, la imagen que se forma en la mente del lector es lo que el autor decide.
Para describir adecuadamente se debe poner especial atención en:

Observar

- Antes de iniciar la descripción hay que observar con detenimiento aquello que se va a describir, hasta que la imagen se pueda recrear claramente en la mente del escritor, se está en condiciones de iniciar el escrito

Punto de vista

- Es la manera que el escritor tiene para interpretar la realidad y apropiarse de ella, así le da un sentido personal.

Reflexionar

- En el proceso reflexivo el autor decide qué utilizará en su descripción, valora aquello que es importante y desecha lo intrascendente, la reflexión filtra lo insignificante, así se ordenan mejor las ideas principales frente a las secundarias

Organizar

- Es el momento en el que el autor inicia su escrito, sigue un orden lógico

Formas de la descripción

La descripción puede realizarse en diversos sentidos, la ruta que el escritor elija, la determina. La descripción puede ser:

Etopeya

El autor describe a una persona, destaca su aspecto interno, toma en cuenta su forma de pensar y ser. Los elementos morales son muy importantes.
Lea este ejemplo de una etopeya

La reina de sur

Arturo Pérez-Reverte
Fragmento

"La capilla del bandido Malverde le traía demasiados recuerdos vinculados al Güero Dávila. Tal vez por eso, cuando don Epifanio Vargas accedió por teléfono a la cita, ella dijo el nombre de ese lugar, casi sin pensarlo. Al principio don Epifanio propuso que fuera hasta la colonia Chapultepec, cerca de su casa; pero eso suponía cruzar la ciudad y un puente sobre el Tamázula. Demasiado riesgo. Y aunque no mencionó ningún detalle de lo ocurrido, sólo que estaba huyendo y que el Güero le había dicho que se pusiera en contacto con don Epifanio, éste comprendió que las cosas andaban mal, o peor. Quiso tranquilizarla: no te preocupes, Teresita, nos vemos, no te agüites y no te muevas. –Ocúl tate y dime dónde. Siempre la llamaba Teresita cuando se la encontraba con el Güero por el malecón, en los restaurantes playeros de Altata, en una fiesta o comiendo callo de hacha, ceviche de camarón y jaiba rellena los domingos, en Los Arcos. La llamaba Teresita y le daba un be so y hasta la había presentado a su mujer y a sus hijos, una vez. Y aunque don Epifanio **era hombre inteligente y de poder**, **con más lana de la que el Güero** habría juntado en toda su vida, **siempre era amable** con él, y lo seguía llamando ahijado como en los viejos tiempos; y en una ocasión, por Navidad, la primera que Teresa pasó de novia, don Epifanio llegó a mandarle unas flores y una esmeraldita colombiana muy linda con cadena de oro, y un fajo con diez mil dólares para que le regalase algo a su hombre, una sorpresa, y con el resto se comprara ella lo que quisiera. Por eso Teresa lo había telefoneado esa noche, y guardaba para él aquella agenda del Güero que le quemaba encima, y esperaba quieta en la oscuridad a unos pasos de la capilla de Malverde. Santa Virgencita, santo Patrón. Porque sólo de don Epi puedes fiarte, aseguraba el Güero. **Es un hombre cabal y un caballero, fue un buen chaca y además es mi padrino"**.



Prosopografía

Es la descripción de los rasgos físicos de una persona o animal, el escritor busca resaltar los elementos que los identifican.
Lea este ejemplo de una prosopografía:

La reina de sur

Arturo Pérez-Reverte
Fragmento



"-Es hora de cerrar -dijo.
Cuando levantó el rostro encontró enfrente una sonrisa tranquila. También unos ojos claros verdes o azules, imaginó tras un instante, que la miraban divertidos. -¿Tan pronto? -preguntó el hombre. -Cerramos -repitió.
Volvió a sus cuentas. Nunca era simpática con los clientes, y menos a la hora de cerrar. En seis meses había aprendido que era buen método para mantener las cosas en su sitio y evitar equívocos. Ahmed encendía las luces, y el escaso encanto que la penumbra daba al local desapareció de golpe: falso terciopelo gastado en los asientos, manchas en las paredes, quemaduras de cigarrillos en el suelo. Hasta el olor a cerrado pareció más intenso. Los de los vasos rotos agarraron las chaquetas de los respaldos, y tras llegar a un rápido acuerdo con sus acompañantes salieron a esperarlas fuera. El otro cliente ya se había marchado, solo, renegando del precio que le exigían por un dúplex. Prefiero hacerme una paja, mascullaba al irse. Las chicas se recogían. Fátima y Sheila, sin tocar los benjamines, remoloneaban junto a los recién llegados; pero éstos no parecían interesados en estrechar la relación. Una mirada de Teresa las mandó a reunirse con las otras. Puso la cuenta en el mostrador, ante **el moreno**. **Éste llevaba una camisa caqui, de faena, remangada hasta los codos**; y cuando alargó el brazo para pagar, ella vio que **tenía un tatuaje cubriéndole todo el antebrazo derecho: un Cristo crucificado entre motivos marineros**. Su amigo era rubio y más delgado, de piel clara. Casi un plebito. Veintipocos años, tal vez. **Unos treinta y algo, el moreno**.

-¿Podemos terminar la copa?
Teresa volvió a enfrentarse a **los ojos del hombre. Con la luz vio que eran verdes**. Bien chingones. **Observó que además de parecer tranquilos también sonreían**, incluso cuando la boca dejaba de hacerlo. **Sus brazos eran fuertes, una barba oscura empezaba a despuntarle en el mentón, y tenía el pelo revuelto. Casi guapo,** comprobó.
O sin el casi. También pensó que olía a sudor limpio y a sal, aunque estaba demasiado lejos para saber eso. Lo pensó, tan sólo.
-Claro -dijo.
Ojos verdes, un tatuaje en el brazo derecho, un amigo flaco y rubio. Azares de barra de bar. Teresa Mendoza lejos de Sinaloa. Sola con ese de Soledad. Días iguales a otros hasta que dejan de serlo. Lo inesperado que se presenta de pronto, no con estruendo, ni con señales importantes que lo anuncien, sino deslizándose de forma imperceptible, mansa, del mismo modo que podría no llegar. Como una sonrisa o una mirada. Como la misma vida, y la misma -ésa llega siempre- muerte. Quizá por eso, a la noche siguiente, ella esperó volver a verlo; pero el hombre no regresó. Cada vez que entraba un cliente, levantaba la cabeza con la esperanza de que fuera él. Pero no era.
Salió después".

Retrato

Para escribir un retrato se combinan los elementos que dan forma a la prosopografía y a la etopeya, al integrarlas se da unidad al sujeto que se va a describir, de esta manera queda una imagen completa del personaje.
Lea este ejemplo de un retrato:

Mal de amores

Ángeles Mastretta
Fragmento



"No recordarían sus palabras, porque más que oírse estaban perdidos cada cual en cada uno. Daniel veía a Emilia con la sorpresa de quien descubre que un juguete ha mutado en diosa. Tenía los ojos vivos de la niña que él conoció, pero miraba con la destreza de una mujer y su boca se había convertido en un milagro que ambicionó para sí. Emilia no podía creer que los **ojos de animal desafiante que tenía el Daniel de su infancia hubieran adquirido el lujo que los aclaraba. Le habían crecido las manos, tenía los dedos largos y se notaban sus venas latiendo bajo la piel. Había adelgazado, casi lucía cuerpo de hambriento y su piel asoleada tenía un aire de campo.** De puro sentirlo cerca, Emilia se dejó llorar dos lágrimas típicas de su condición Sauri que odió con toda su condición Veytia.
–Llorona de azul celeste –le dijo Daniel repitiendo la canción que acompañaba su diálogo.
–Estúpido –le contestó Emilia mientras se levantaba de golpe.
–Llorona y majadera –canturreó Daniel yendo tras ella…
–No me odies, tontita. No ves que **soy el único hombre en el mundo que te adorará siempre** sin pedirte nada a cambio –dijo sacando de la bolsa de su viejísimo saco el pañuelo con el nombre que Emilia le había bordado durante la clase de costura en el quinto año de primaria".

Paisaje

Es la descripción detallada de un lugar, tiene el propósito de provocar en el lector la idea de colores, texturas, formas, etcétera, tal como lo haría un pintor resaltando cada detalle de su obra.
Lea este ejemplo de un paisaje:

La guerra de los mundos

H. G. Wells
Fragmento

La ciudad muerta



"Después que me hube separado del artillero, descendí la colina y tomé por la calle High cruzando el puente hasta Fulham. La hierba roja crecía profusamente en aquel entonces y cubría casi todo el puente, pero sus hojas presentábanse ya descoloridas en muchas partes, víctimas, sin duda, de la enfermedad que poco después las habría exterminado.
En la esquina del camino que dobla hacia la estación Putney Bridge encontré a un hombre tendido en el suelo. Le cubría por completo el polvo negro y estaba vivo, pero se encontraba completamente borracho. No pude sacarle más que maldiciones, y cuando me aproximé quiso atacarme. Creo que me habría quedado con él de no haber sido por el aspecto brutal de sus facciones.

Había polvo negro en casi todo el camino desde el puente en adelante, y en Fulham abundaba aún más. En las calles reinaba un silencio impresionante. Conseguí algo de comer en una panadería del barrio. Ya en dirección a Walham Green, las calles estaban libres del polvo, y pasé frente a un grupo de casas que ardían; el ruido del incendio me resultó agradable en medio de tanto silencio. Al seguir hacia Brompton volvió a deprimirme la quietud reinante.
Allí encontré, una vez más, el polvo negro en las calles y sobre los cadáveres, de los cuales vi una docena en toda la extensión del Fulham Road. Hacía días que estaban muertos, razón por la cual me apresuré a alejarme. El polvo negro los cubría a todos, suavizando sus contornos. Los perros habían atacado a varios.
Donde no se veía polvo negro la ciudad presentaba el aspecto normal de los domingos, con sus tiendas cerradas, las casas desocupadas y el silencio general. En algunos sitios habían andado los saqueadores, pero sólo en los comercios de comestibles y licores. Vi el cristal destrozado del escaparate de una joyería, pero alguien debía haber interrumpido al ladrón, pues había numerosas cadenas de color y algunos relojes diseminados por la acera. No me molesté en tocarlos, más adelante encontré a una mujer hecha un ovillo en un portal; la mano que apoyaba sobre una rodilla tenía una herida, que había sangrado sobre su vestido, y junto a ella vi los restos de una botella de champaña. Parecía dormida, pero estaba muerta.
Cuanto más me adentraba en Londres, tanto más profundo se hacía el silencio. Pero no era tanto el silencio de la muerte, sino más bien el del suspenso y la expectativa. En cualquier momento podía llegar allí la mano destructora que hiciera su obra nefasta en los límites de la metrópoli, aniquilando Ealing y Kilbum".

Topografía

En esta descripción, el escritor destaca los aspectos geográficos que son más importantes, no llega a ser detallado como en el paisaje.
Lea este ejemplo de topografía:

Antonieta

Fabiane Bradu
Fragmento



"Hacia 1898, el matrimonio Rivas Mercado se instaló en su nueva casa, tercera calle de Héroes número 45. Su primera hija, María Emilia, había muerto al poco de nacer. La segunda, Alicia, vino a reparar esta ausencia como un regalo del cielo, pues nació el día de Reyes de 1896.
Don Antonio Rivas Mercado construyó esta casa conforme a una precisa concepción de la vida hogareña: como morada del clan y con respeto a la intimidad de cada uno de sus miembros. Era una casa barrocamente amplia y curiosamente oblicua, al frente de un vasto terreno que formaba parte de la antigua huerta de San Fernando. Los árboles antiquísimos plantados por los primeros franciscanos que llegaron a la ciudad de México rodeaban la casa. Desde la reja forjada de la entrada, que ostentaba las iniciales que don Antonio compartiría con sus hijas, ARM, podía verse, a cierta distancia, la casa afrancesada de dos pisos. Sin muros excluyentes, el dombo de los árboles disimulaba el camino semicircular que conducía hasta la Terraza de pilares".

Paralelo

Es el retrato de dos personajes, de quienes el escritor presenta sus rasgos físicos y emocionales para que se tenga una imagen.
Lea este ejemplo de paralelo:

Lugar de enmedio

Las batallas en el desierto
José Emilio Pacheco

"Monseñor Martínez, arzobispo de México, decretó un día de oración y penitencia contra el avance del comunismo. No olvido aquella mañana: en el recreo le mostraba a Jim uno de mis Pequeños Grandes Libros, novelas ilustradas que en el extremo superior de las páginas tenían cinito (las figuras parecían moverse si uno dejaba correr las hojas con el dedo pulgar), cuando Rosales, que nunca antes se había metido conmigo, gritó: Hey miren: esos dos son putos. Vamos a darles pamba a los putos. Me le fui encima a golpes. Pásame a tu madre, pinche buey, y verás que tan puto, indio pendejo. El profesor nos separó. Yo con un labio roto, él con sangre de la nariz que le manchaba la camisa.



Gracias a mi pelea mi padre me enseñó a no despreciar. Me preguntó con quién me había enfrentado. Llamé "indio" a Rosales. Mi padre dijo que en México todos éramos indios, aun sin saberlo ni quererlo. Si los indios no fueran al mismo tiempo los pobres nadie usaría esa palabra a modo de insulto. Me referí a Rosales como "pelado". Mi padre señaló que nadie tiene la culpa de estar en la miseria, y antes de juzgar mal a alguien debía pensar si tuvo las mismas oportunidades que yo.

Millonario frente a Rosales, frente a Harry Atherton yo era un mendigo. El año anterior cuando aún estudiábamos en el Colegio México, Harry Atherton me invitó una sola vez a su casa en las Lomas: billar subterráneo, piscina, biblioteca con miles de tomos encuadernados en piel, despensa, cava, gimnasio, vapor, cancha de tenis, seis baños. (¿Por qué tendrán tantos baños las casas ricas mexicanas?). Su cuarto daba a un jardín en declive con árboles antiguos y una casa artificial. A Harry no lo habían puesto en el Americano sino en el México para que conociera un medio de lengua española y desde temprano se familiarizara con quienes iban a ser sus ayudantes, sus prestanombres, sus eternos aprendices, sus criados.
Cenamos. Sus padres no me dirigieron la palabra y hablaron todo el tiempo en inglés. *Money, how do you like the little Spic? He's a midget, isn't? Oh Jack, please. Maybe the poor kid is understand a thing*. Al día siguiente Harry me dijo: 'Voy a darte un consejo; aprende a usar los cubiertos. Anoche comiste filete con el tenedor del pescado. Y no hagas ruido al tomar la sopa, no hables con la boca llena, mastica despacio los trozos pequeños'.
Lo contrario me pasó con Rosales cuando acababa de entrar en esta escuela, ya que ante la crisis de su fábrica mi padre no pudo seguir pagando las colegiaturas del México. Fui a copiar unos apuntes de civismo a casa de Rosales. Era un excelente alumno, el de mejor letra y ortografía, y todos lo utilizábamos para estos favores. Vivía en una vecindad apuntalada con vigas. Los caños inservibles anegaban el patio. En el agua verdosa flotaba mierda.
A los veintisiete años su madre parecía de cincuenta. Me recibió muy amable y, aunque no estaba invitado, me hizo compartir la cena. Quesadillas de sesos. Me dieron asco. Chorreaban una grasa extrañísima semejante al aceite para coches. Rosales dormía sobre un petate en la sala. El nuevo hombre de su madre lo había expulsado del único cuarto".

Narración

Como forma discursiva, la narración relata uno o varios acontecimientos que unidos cobran sentido. Implica exponer la realidad, considerando qué, a quién, en dónde y en qué, ya que los hechos aislados no interesan.
Desde la óptica literaria, contar una historia obliga a quien lo hace, a hablar de hechos reales o imaginarios; para el escritor, relatar es un trabajo, que su elaboración involucra diversos elementos, de los que destacan: personajes, espacio y tiempo.
Los cuentos, novelas, epopeyas, obras dramáticas por sólo citar algunas, son ejemplos de narrativa, aunque también cuando contamos algo que soñamos o nos ocurrió, se está narrando.
El narrador es la persona que cuenta la historia y los personajes que utiliza son los seres creados por su imaginación: los hechos en los que el autor los involucra son estructurados como él lo decide.
La forma de contar una historia es lo que proporciona el sello personal al autor.
Lea este ejemplo de narración y comente en clase su contenido:

El diario a diario

Un señor toma un tranvía después de comprar el diario y ponérselo bajo el brazo. Media hora más tarde desciende con el mismo diario bajo el mismo brazo. Pero ya no es el mismo diario, ahora es un montón de hojas impresas que el señor abandona en un banco de la plaza. Apenas queda solo en el banco, el montón de hojas impresas se convierte otra vez en un diario, hasta que un muchacho lo ve, lo lee, y lo deja convertido en un montón de hojas impresas. Apenas queda solo en el banco, el montón de hojas impresas se convierte otra vez en un diario, hasta que una anciana lo encuentra, lo lee, y lo deja convertido en un montón de hojas impresas. Luego lo lleva a su casa y en el camino lo usa para lo que sirven los diarios después de estas excitantes metamorfosis.



Exposición

Es la manera que usamos para expresar ideas y describir hechos y objetos en un discurso sobre la naturaleza de ellos mismos.
En la exposición se necesita claridad en las ideas, originalidad y contenido estructurado para que esta tenga forma.
La exposición puede en algunos casos estar combinada con la argumentación, aunque también la hallaremos en la narración y la descripción, pues su uso ayuda a comprender el mensaje de manera completa.
En el periodismo se encuentra el mejor ejemplo de la exposición, resulta parte básica en las entrevistas, crónicas, reportajes, artículos de opinión y noticias.

Lea este ejemplo de narración y comente en clase su contenido:

Abogados y familiares de muertas en Juárez, víctimas de intimidación: ONG

AFP

La organización Nuestras hijas de regreso a casa denunció que sus integrantes son víctimas de amenazas e intimidación desde hace nueve meses.

México, D.F. Familiares de las cientos de mujeres asesinadas en Ciudad Juárez en los últimos 14 años, son víctimas de acosos, allanamientos y amenazas, denunciaron este martes las organizaciones Nuestras hijas de regreso a casa y el Comité de América Latina y el Caribe para la defensa de los Derechos de la Mujer.

A través de un comunicado, denunciaron que desde hace nueve meses, familiares de víctimas del feminicidio que integran dichas organizaciones, así como sus abogados, han sufrido intimidaciones, acoso por parte de funcionarios públicos, allanamientos y amenazas veladas.

Una de las integrantes de Nuestras hijas de regreso a casa, Malú Andrade, hermana de una joven asesinada en 2001, fue amenazada con arma de fuego desde un automóvil, sus oficinas fueron saqueadas y en otra ocasión, junto con su esposo, fue perseguida por un automóvil en el que viajaban dos individuos armados, incluso, ha recibido correos electrónicos con amenazas de muerte, añadió el comunicado.

Malú y su madre, Norma Andrade, han denunciado públicamente y en reiteradas ocasiones la negligencia y omisión en la que supuestamente han incurrido las autoridades de procuración de justicia en las investigaciones sobre los asesinatos de mujeres en Juárez, las cuales suman 400 en los últimos 14 años, según Amnistía Internacional, cifra que para el gobierno es de 380.

Argumentación

Es una forma discursiva que busca convencer para que el lector adopte una actitud determinada, los mensajes se dirigen al intelecto y sentimientos del lector para persuadirlo. Un ejemplo está en los debates académicos, políticos o de cualquier índole.

Aristóteles planteó dos vías para persuadir: la primera es la lógica para convencer y la segunda es la lógica para emocionar. Actualmente la psicología social y la nueva teoría de la argumentación afirman que los aspectos emotivos de razonamiento son más contundentes que la lógica rigurosa, porque el público no necesita rigor científico y es cambio, sí necesita razonamientos ligeros y entendibles.

En los artículos de opinión se presenta la argumentación, se combinan con la forma expositiva y se usan en cualquier tema.

Lea este ejemplo de narración y comente en clase su contenido:

No a la muerte

Pedro Miguel

La semana pasada, en la Asamblea General de la ONU, tuvo lugar una reunión ministerial, presidida por Italia y Portugal, para estudiar la eliminación mundial de la pena de muerte. El canciller español Fernando Moratinos expuso la posición del grupo de países abolicionistas y pidió una moratoria universal de las ejecuciones como "un paso importantísimo en el camino hacia la desaparición total" de ese castigo. Los manriquistas apegados a la máxima de que todo tiempo pasado fue menos peor debieran revisar este dato: en tres décadas (de 1977 a 2007) el número de países en los que la pena de muerte ha caído en desuso pasó de 16 a 128: son 89 los que la han prohibido en cualquier circunstancia, otros 10 han limitado ese castigo a situaciones excepcionales (traición en tiempos de guerra, por ejemplo) y 29 no lo han aplicado en la última década.

Ciertamente, en el mundo hay mucha hipocresía sangrienta: se sospecha que en los años setenta del siglo pasado, aunque en Alemania ya no había pena de muerte, la policía la aplicó de hecho y suicidó en sus celdas a los cabecillas de la banda terrorista Baader-Meinhof; a principios de la década siguiente, los servicios secretos de la civilizada Francia perpetraron un atentado terrorista en Nueva Zelanda, en el que murió un fotorreportero; en México, en el sexenio de Salinas, centenares de opositores políticos fueron asesinados; y qué decir de Israel, donde la pena máxima no existe de manera oficial, pero cuyas autoridades practican con regularidad, en los organismos de dirigentes palestinos, el arte de la "ejecución extrajudicial". Ninguna de esas situaciones atenúa, sin embargo, la importancia de una tendencia mundial claramente contraria a la pena de muerte ni eclipsa los avances en la abolición de un ritual vengativo y homicida. Es inadmisible el asesinato de Estado, pero que sea legal resulta, además, grotesco, vergonzoso y agraviante.

En el siglo XII de esta era el judío andaluz Maimónides proclamó que es preferible liberar a un millar de culpables que sentenciar a muerte a un inocente, y desde entonces los cuchillos del Estado han vertido, con justificación legal o sin ella, una cantidad enorme de sangre de inocentes, de culpables y de inimputables. Un punto de viraje importante en la historia del rechazo a la pena de muerte es el momento en que este castigo deviene repugnante no sólo por la posibilidad de que su aplicación sea un error irreparable, sino porque, aun

con la certeza absoluta de culpabilidad que reclamaba el filósofo Sefardí, privar de la vida a cualquier ser humano, así haya cometido los actos más monstruosos, es una severa derrota para toda la especie y para sus posibilidades de desarrollo.

El sueño fundamental de la civilización, con todo y sus extravíos, consiste en atemperar las pulsiones bioquímicas por medio de normas éticas, legales, diplomáticas, políticas, comerciales, deportivas. Todo el andamiaje de la cultura tiene por propósito evitar que tomen el mando de nuestros actos el lagarto primigenio que llevamos dentro, el gen asesino, la hormona de la depredación, la rapiña, la territorialidad y la venganza. Cada vez que las balas del pelotón se introducen en una caja torácica, que el veneno de la triple inyección penetra en el torrente sanguíneo del ajusticiado, que la soga enloquece de pasiónpor un cuello, los verdugos degradan a su víctima, se degradan y nos degradan al resto de los humanos, a quienes nos obligan a presenciar nuestra condena a una animalidad empeorada por las virtudes tecnológicas.

Ninguna causa y ningún paradigma –la democracia, el socialismo, o esa mezcla pekinesa de dictadura comunista con mercado salvaje– aportan corrección a la barbarie. No hay argumento jurídico ni de seguridad pública capaz de hacer pertinente el asesinato. Ninguna soberanía nacional –ni la estadunidense, ni la cubana, ni la china, ni ninguna otra– justifica la preservación de los cadalsos, porque los países son sistemas de convivencia, no rastros ni criaderos de cocodrilos hambrientos de las vísceras del congénere. Los países matones tienen que saber que son motivo de vergüenza mundial, de repudio generalizado, de asco inmediato y palpable. Sólo así será posible amarrarles las manos a los verdugos, desde Teherán hasta Texas.

2 Tipos de textos

Propósito: el alumno estudiará las características, significado y funcionalidad de los textos literarios y expositivos.

Los textos poseen características particulares que los diferencian entre sí, de acuerdo con su significado y funcionalidad, se clasifican en: literarios y expositivos.

Textos literarios

El texto literario presenta al autor como un narrador de historias que coloca al lector como su receptor, el escritor busca cautivarlo con una serie de acontecimientos que los personajes viven a lo largo de la trama, ubicados en un tiempo y espacio específicos.
Para narrar, el autor usa descripciones de diversos tipos, la utilización de verbos es muy importante, su importancia radica en precisar las acciones que se realizan.

Textos expositivos

El texto expositivo presenta al autor como un informador de hechos y conceptos, el lector entonces es un receptor que interpreta la información recibida.
Para redactar un texto expositivo el autor puede ser objetivo o subjetivo. Es objetivo cuando el autor comunica lo que ve tal cual, se limita a describir con detalles y no incluye juicios personales. El autor es subjetivo en el momento que incluye juicios personales y sentimientos.

Análisis literario

El análisis de una obra literaria nos permite conocer e interrelacionar todos los datos que forman parte del texto. Cada autor refleja el momento histórico que le toca vivir y las influencias que ha recibido de otros escritores. En el análisis interno de una obra se consideran:

Argumento o trama

Es el resumen de la historia, se consideran los hechos más importantes de la historia.

Acciones

Es la manera que el autor eligió para organizar los hechos. Se integra por: planteamiento, nudo, clímax y desenlace.

Planteamiento → **Nudo** → **Clímax** → **Desenlace**

- **Planteamiento:** Se presenta al lector la situación general en la que la historia se va a desarrollar. Se presenta a los personajes y se proporcionan los datos necesarios para entender el
- **Nudo:** Es la etapa donde la historia se complica, los personajes se enfrentan a un conflicto y la historia cambia de dirección
- **Clímax:** Es el momento de mayor intensidad. En algunas ocasiones los personajes principales se enfrentan a otros hombres, a la naturaleza, a su yo
- **Desenlace:** Momento en que finaliza el conflicto y se da solución a la historia, se presentan las consecuencias finales del clímax

Personajes

Son seres creados por la imaginación del autor, a ellos les corresponde dar vida a las situaciones y acontecimientos relatados en la historia. Por su importancia se les clasifica en:

Principales

Son los de mayor importancia, la historia gira en torno suyo y también se les puede llamar protagonistas o centrales.

Secundarios

Aparecen continuamente y pueden ayudar o causar problemas a los personajes principales.

Incidentales

Su aparición es esporádica, o bien, sólo se mencionan. También se les conoce como ambientales.

Comprensión de textos

Recordemos que durante nuestro proceso de preparación para presentar el examen que nos permitirá ingresar al Nivel Superior del IPN, es fundamental la lectura de textos en español. En consecuencia recuerda que durante nuestro examen debemos leer tratando de comprender el texto. No te apresures por terminar pronto, es importante que durante tu proceso lector obtengas la información que te permitirá contestar las preguntas que se te hacen.

Por ello:

- Lee las preguntas que corresponden al texto
- Localiza las ideas centrales del texto
- Identifica los ejemplos que ofrece el autor
- Localiza los argumentos que se plantean a lo largo del texto

Y continúa ejercitando diariamente tu lectura de comprensión de textos.

Ejercicios

Lee con atención el texto, al terminar contesta las preguntas 1 hasta la 10.

Reyes y Díaz, los golpistas erráticos

(1)
Bernardo Reyes había nacido en Guadalajara, en 1850, en el momento de iniciarse esta historia tenía, por tanto, 63 años. Ingresa a los 15 al ejército y participa en la guerra contra el imperio. Coronel en 1978 y general en 1885, Porfirio lo acomoda en el gobierno de Nuevo León, que conserva reeligiéndose durante muchos años hasta que es nombrado por el dictador secretario de Guerra y Marina de 1900 a 1903. Vuelve a la gubernatura de Nuevo León y la conserva hasta 1909. Es sin duda el número dos el régimen y termina de candidato a la vicepresidencia compitiendo contra los científicos. La jugada le sale mal cuando sus bases se enfrentan al dictador y termina en Europa en 1909, en un semiexilio dictado por Díaz. No combate al maderismo y cuando retorna a México busca lugar su en una sociedad que ha cambiado profundamente sin contar con él.

(2)
Su hijo, cuenta José Emilio Pacheco, <<el predilecto Rodolfo lo instaba a encabezar el descontento de los empresarios, los hacendados, los inversionistas extranjeros y, en primer término, de la oficialidad federal que jamás perdonaría su derrota a manos de la chusma y el peladaje>>. Era otro de los moralmente damnificados por la revolución de 1910.

(3)
En diciembre de 1911, lanza un manifiesto desde los Estados Unidos, se levanta en armas convocando a la población a seguirlo y, Pacheco de nuevo, <<cuando cruzó la frontera (...) se halló completamente solo. Vagó por el desierto y al fin tuvo que rendirse ante un rural que había sido su caballerango en sus años de gloria. El rural rompió a llorar ante el espectáculo de tanta grandeza derrumbada>>. Todo se desmorona en Linares, Nuevo León. Martín Luis Guzmán se pregunta: <<¿Era sólo un iluso el general Bernardo Reyes? ¿Era sólo un ambicioso engañado por el falso concepto que tenía de su personalidad?>>.

(4)
Reyes impone, las fotos de la época demuestran a una figura patriarcal con la piocha espectacular, grisácea.

(5)
Era tuerto.

(6)
Félix Díaz tenía 45 años y lo llamaban *el Sobrino de su tío*, como para dejar claro que pocos méritos tenía más allá del parentesco con el dictador, porque era hijo del hermano de Porfirio, el Chato Díaz. En octubre de 1912, acaudillando las nostalgias del viejo régimen, se alzó en armas contra Madero en Veracruz y llegó a capturar el puerto, en una rebelión que duró cinco días. Fue detenido, juzgado por un consejo de guerra y condenado a muerte. El régimen, en su eterna benevolencia, conmutó su condena por cadena perpetua.

(7)
La fotos muestran a un caballero pasado de peso, de cara redonda y potente bigote, que más bien parece el dependiente de una tienda de lujo o un abogado, pero sí poco iluminado por la vida. Curiosamente tiene enormes simpatías populares y un gran arrastre en los sectores acomodados del país, quizá porque hereda gratuitamente la imagen benevolente y todopoderosa del dictador ausente.

Taibo II Paco Ignacio, Temporada de zopilotes, Planeta, México, 2011.

1. En el párrafo 5, la palabra *tuerto* se refiere a:
   a) injusto
   b) agravio
   c) sin consideración
   d) falto de la vista de un ojo

2. ¿A qué época de la historia mexicana hace referencia el texto?
   a) La Revolución Mexicana
   b) El Porfiriato
   c) La Decena trágica
   d) La Intervención Francesa

3. Ordena cronológicamente estos hechos:

   1. Reyes lanza desde los Estados Unidos un manifiesto para que la población se levante en armas.
   2. Bernardo se rindió ante un guardia rural.
   3. Bernardo Reyes es nombrado secretario de Guerra y Marina.
   4. Reyes vagó por el desierto.

   a) 3, 2, 1, 4
   b) 3, 4, 1, 2
   c) 3, 1, 4, 2
   d) 3, 1, 2, 4

4. En _____ Félix Díaz se alzó en armas contra Madero en Veracruz.
   a) 1903
   b) 1909
   c) 1911
   d) 1912

5. De acuerdo con el texto, ¿porqué Félix Díaz fue juzgado por un consejo de guerra?
   a) Se parecía a Porfirio Díaz
   b) Después de su travesía por el desierto fue encarcelado
   c) Se reveló contra Madero y capturó el puerto de Veracruz
   d) Su imagen benevolente y todopoderosa lo hacían una amenaza para Madero

6. De _______ a ________ Bernardo Reyes fue nombrado secretario de Guerra y Marina.
   a) 1900 a 1903
   b) 1900 a 1902
   c) 1901 a 1902
   d) 1901 a 1903

7. De acuerdo con el contenido del texto, ¿quién instaba a Reyes para levantarse contra Madero?
   a) Félix Díaz
   b) Rodolfo Reyes
   c) Marín Luis Guzmán
   d) José Emilio Pacheco

8. De acuerdo con el texto, relaciona la columna de hechos con la fecha en que se realizaron cada uno de ellos.

Hechos	Fecha
1. Inicia la Revolución Mexicana 2. Díaz se levanta en armas contra Madero 3. Bernardo Reyes es exiliado a Europa 4. Reyes lanza un manifiesto para levantarse en armas contra Madero	A. 1909 B. 1910 C. 1911 D. 1912

a) 1A, 2B, 3C, 4D
b) 1B, 2D, 3A, 4C
c) 1C, 2A, 3B, 4D
d) 1D, 2C, 3ª, 4B

9. Observa las imágenes, ¿cuál opción tiene a los personajes principales del texto?

a)



b)



c)



d)



10. En el párrafo número 2, se menciona la palabra *chusma*, ¿qué significado tiene?
a) Nobleza
b) Soldados
c) Populacho
d) Hacendados

Lee con atención el texto, al terminar contesta las preguntas 11 hasta la 15.

Reforma laboral no abatirá desempleo en México: UNAM

La reforma laboral no es la solución para disminuir el desempleo, por el contrario, provoca que el empleo formal sea más precario, consideró el Instituto de Investigaciones Económicas (IIEC) de la UNAM.

De acuerdo con el Instituto, al tercer trimestre de 2011, 56.8% de los trabajadores ocupados en México, tenían ingresos máximos de tres salarios mínimos.

Juan Arancibia, investigador del IIEC comentó, "Los más afectados en los últimos años son los jóvenes, siendo que en América Latina el desempleo juvenil bajó de 15.9% en 2010 a 14.9% en 2011, mientras que en México subió de 9.7% a 10% en el mismo periodo".

En conferencia de prensa, el Instituto estimó que el número de empleos generados en 2012, sumarán 552,374, lo que significaría un decremento de 21%, frente a los 700,000 generados en 2011.

Para los especialistas de la UNAM, la reforma propuesta por el gobierno federal y los empresarios, no es un factor que detone el empleo, ya que sólo se busca disminuir los costos de producción, para competir contra el resto de las economías, sólo con mano de obra barata y no con mayor eficiencia productiva.

"Si bien los bajos salarios disminuyen los costos de producción, el poder despedir a una persona con mayor facilidad no genera un mayor número de trabajos en sí mismo, por lo que sólo se afectan las prestaciones laborales y se generan empleos irregulares", dijo el académico.

Para los especialistas, el modelo laboral que se tiene en México actualmente no propicia el crecimiento y desarrollo del empleo, por lo que sólo se promueve aquel que está mal remunerado y poco calificado.

Como reflejo de lo anterior, los investigadores del IIEC refirieron que en los últimos 12 años los salarios tuvieron un crecimiento de apenas 0.5%, así como el que las dos terceras partes de las fuentes de trabajo que hoy se generan en México se ubican en la informalidad.

La tasa de desempleo que estima el IIEC para el cierre de 2012 es de entre 4.5% y 5%, cifra similar a la que se alcanzó en 2011.

Como parte de las soluciones a la problemática del desempleo y los bajos salarios, el Instituto consideró que todos los gobiernos, tanto el federal, como lo estatales, promuevan una política de apoyo a las pymes, con la penetración de un mayor mercado interno, así como con el financiamiento para la adquisición de tecnología.

www.eleconomista.com.mx/industrias/2012/03/07/reforma-laboral-no-abatira-desempleo-mexico-unam

11. ¿Qué efecto tendrá en el mercado laboral la reforma propuesta?
    a) El salario mínimo se triplicará
    b) La tasa de desempleo será del 0.5%
    c) Se podrá contratar a más personal calificado
    d) Hará que el empleo formal sea más precario y se generarán empleos irregulares

12. Según el texto, la tasa de desempleo para 2012 será de_____.
    a) 21%
    b) 0.5%
    c) entre 4.5 y 5%
    d) entre 9.7% y 10%

13. La diferencia existente entre los porcentajes de desempleo en el lapso 2011 y 2012 es:
   a) 0%
   b) 5%
   c) 0.3%
   d) 4.5%

14. ¿Cuál es la reflexión central del texto?
   a) La reforma laboral es benéfica porque bajará la tasa de desempleo
   b) La reforma laboral generará muchos problemas en el sector productivo
   c) La reforma laboral no propiciará una mejora en las condiciones laborales, ni generará empleos
   d) La reforma laboral hará posible que la tasa de desempleo en el 2012 sea más baja

15. ¿Cuál es la intensión del autor al redactar este texto?
   a) Criticar la mala política laboral
   b) Analizar los efectos de la reforma laboral
   c) Persuadir al lector en torno a los beneficios de la reforma laboral
   d) Informar la opinión de los especialistas de la UNAM sobre la reforma laboral

Lee con atención el texto, al terminar contesta las preguntas 16 hasta la 20.

Los valores de la lectura en el aprendizaje y en el desarrollo social

(1)
La **lectura** es un proceso complejo que cada persona realiza por sí misma y le permite examinar el contenido de lo que lee, analizar cada una de sus partes para destacar lo esencial y comparar conocimientos ya existentes con los recién adquiridos.

(2)
En el enfoque de los programas de estudio actuales, la lectura es considerada como una práctica social en la escuela, la familia y la comunidad. En esta época en la cual los conocimientos **cambian** vertiginosamente, es fundamental tener un hábito lector que garantice poseer nociones frescas y actualizadas que permita ser académicamente competente, ya que una persona con el hábito de la lectura posee autonomía cognitiva, es decir, está preparada para adquirir conocimientos por sí misma durante toda la vida, aún fuera de las instituciones educativas.

(3)
La experiencia de leer es adquirida por los niños desde temprana edad, pero requieren el apoyo de sus padres y maestros para lograr su pleno dominio, por lo que todas las prácticas que se realicen en el aula y en la casa mejorarán su competencia lectora.

(4)
Una buena actitud frente a la lectura puede ser uno de los atributos más importantes de un lector para toda la vida. Los niños que han desarrollado autoconceptos **positivos** en relación con la lectura elijen leer para recrearse. Cuando los niños leen durante su tiempo libre están ganando una valiosa experiencia que estimula su desarrollo como lectores experimentados.

(5)
Además de leer por placer, leer para obtener conocimientos e información es un indicio de desarrollo de la competencia lectora. Buscar conocimiento a través de textos informativos puede auxiliar a los niños a desarrollar confianza en sus capacidades y esto les ayuda a alcanzar sus metas. Más aún, el conocimiento obtenido a través de este tipo de lecturas, les abre campo a otras posteriores al ampliar y **profundizar** la interpretación de los textos que abordan.

Planeación didáctica para el desarrollo de competencias en el aula, México, 2010.

16. Un sinónimo de la palabra *competencia*, que pudiera sustituir a esta palabra en el párrafo 3 es:
    a) contienda
    b) discusión
    c) capacidad
    d) insuficiencia

17. La palabra *vertiginosamente* que aparece en el párrafo 2 del texto, hace referencia a:
    a) caudal
    b) rapidez
    c) lentitud
    d) suavidad

18. Según el texto, un niño que es apoyado por sus padres y maestros logra autoconceptos _______________ en la lectura recreativa.
    a) nulos
    b) positivos
    c) negativos
    d) suficientes

19. De acuerdo con el texto, ser competente en la lectura se vuelve indispensable ante:
    a) la diversidad de oferta lectora
    b) el cambio constante de conocimientos
    c) la estricta exigencia en la educación formal
    d) el hecho de que la lectura es sólo un aspecto para lograr el éxito

20. Un adjetivo es una palabra que añade una cualidad al sustantivo.
    De las siguientes palabras que aparecen en el texto, identifica aquella que cumple esta función.
    a) Lectura
    b) Cambian
    c) Positivos
    d) Profundizar

Respuestas a los reactivos de Comprensión de textos en español

1	D	10	C	19	B
2	C	11	D	20	C
3	C	12	C		
4	D	13	A		
5	C	14	C		
6	A	15	D		
7	B	16	C		
8	B	17	B		
9	D	18	B		

Bibliografía

Álvarez, María Déme; La Literatura Universal a través de Autores Selectos; Editorial Porrúa; México, 2004.

Ayala, Leopoldo; Taller de Lectura y Redacción; Editorial Porrúa; México, 1979.

Chávez Calderón Pedro, y Eva Lydia Oseguera; Literatura Universal, volumen I y II; Editorial Publicaciones Cultura; México, 2003.

Cota Madero, Fernando; Taller de Lectura y Redacción 5; Editorial Trillas; México, 1980.

Díaz Garza, Enrique; Taller de Redacción Unidades I A V; Editorial CEMPAE; México, 1980.

Ortega, Wenceslao; Redacción y Composición Literaria y Prácticas; Editorial Mc Graw Hill, México, 1990.

Maqueo, Ana María; Lengua y Literatura; Editorial LIMUSA, México, 2001.

Medina Carballo Manuel; Taller de Lectura y Redacción; Editorial Trillas, México, 1989.

Unidad 1 Present tenses
1. Present continuous
2. Simple present simple
3. Asking for information (Wh-questions words)
4. Possessive adjectives and possessive pronouns
5.Prepositions of place, time and movement

Unidad 2 Past tenses
1. Verb to be in past tense
2. Past progressive tense
3. Time expressions: when, while and as
4. Simple past simple
5. Uses of the article the
6. Uses of the article a
7. The Zero article
8. Uses of most, many, a lot of, a few, a little, some and any

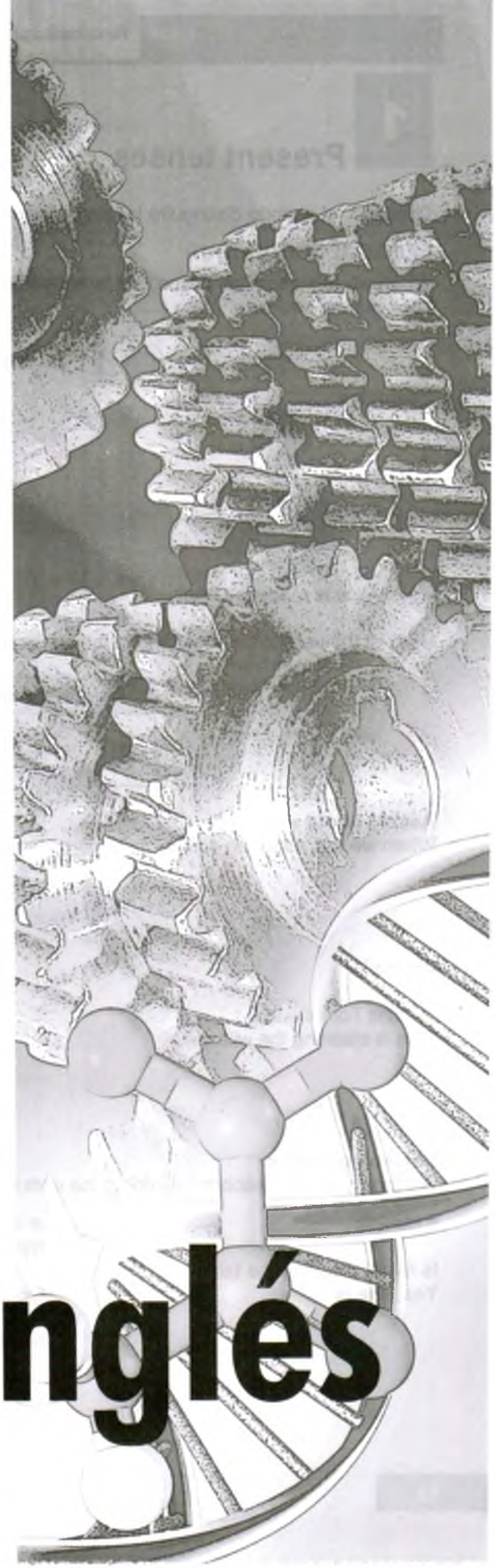
Unidad 3 Future tenses
1. Idiomatic future tense (going to)
2. Simple future tense (will)
3. There + be

Unidad 4 Modal auxiliaries
1. Indicating capability or ability
2. Asking for permission or giving authorization
3. Expressing wishes
4. Expressing possibility
5. Indicating obligation or necessity
6. Indicating a suggestion or convenience
7. Indicating habit or rutine
8. Asking about obligation or necessity to do something
9. Asking about suggestions
10. Asking about preferences (would)
11. Relatives Wh-clauses
12. Use of very, too and enough

Unidad 5 Perfect tenses
1. Present perfect simple
2. Present perfect continuous
3. Time expressions: since, for, just
4. Expressions with yet and already
5. Past perfect simple
6. Past perfect continuous

Unidad 6 Comparatives and superlatives
1. Comparatives
2. Superlatives
3. Expressing similarity: Like and as

Unidad 7 Passive voice
1. Introducction to passive voice
2. Present progressive in the passive voice
3. Past progressive in the passive voice
4. Simple present in the passive voice
5. Future action with going to and will in the passive voice
6. Modal auxiliaries in the passive voice
7. Perfect tense in the passive voice



Inglés

1 Present tenses

Objetivo: el alumno distinguirá las conjugaciones verbales del presente continuo y presente simple.

Present continuous

When we talk about an action that is happening at moment, we use the verb to be and we add **"ing"** to a verb. Look out the structure.

+ verb to be + verb –ing + complement.

Examples



Alice is reading a book.



Juanito is jumping.



My grandparents are watching TV.

Uses of the verb to be according to the subjects.

Personal pronoun	Verb to be
I	am
he, she, it	is
we, you, they	are

Asking about activities

When we ask about an activity that someone is doing, we use the wh-word **"What"**. Look at the structure.

What + verb to be + + doing?

Example

What is Tom doing?
Tom is cleaning the window.



Yes/no questions

We form yes/no questions by adding the verb to be at the beginning.

Example

Is Maria cleaning the table?
Yes, she **is**.

Is she cleaning the window?
No, she **is not**.

Or

No, she **isn't.**



Simple present tense

When we state facts and describe habitual actions we just use a simple verb. Look at the structure.

 + verb (simple form) + complement.

Examples



I **go** to the movies every weekend.



Yolanda **drinks** coffee in the morning.



Luisa and Marco **walk** to work every day.

Rules to conjugate verbs with *he*, *she* and *it*.

When the subject is a third person (*he*, *she* or *it*), we place **"s"** after the verb.

Examples



Pablo speak**s** English.



Arturo live**s** in the city.



Elena take**s** a shower.

When the verb ends in **s, z, ch, sh**, we add **es.**

Examples

Cross → Cross**es**



The driver cross**es** the street.

Watch → Watch**es**



Alicia watch**es** the TV.

Wash → Wash**es**



Veronica wash**es** her face.

When the verb ends in **Y** following by a consonant, we drop the *y* and write ***ies***.

Example

study → stud**ies**



Margarita stud**ies** math.

We can find special cases like:

Go → go**es**



Ana go**es** to school by bus.

do → do**es**



Daniela do**es** the homewok.

have → ha**s**



Mara ha**s** a dog.

Negative form
We use the auxiliary **do** or **does + not** to express negative statements. Look at the structure.

I / we / you / they } + do + not + verb + complement

He / she / it } + does not + verb + complement



I **don't** spend my vacations with my parents. I went to the beach.



Mario **doesn't** stay at home. He went to the office.



They **don't** go to store. They prefer to swim.

Contractions:

We can also use the contractions:
does not = **doesn't**
do not = **don't**

In a sentence written with frequency adverbs, the auxiliary verb in negative is written before the frequency word.



She **doesn't** always do her homework.



My neighbors **don't** often water the plants.

Look!
Never, **rarely** and **seldom** are used in affirmative sentences, because their meaning is negative.

Yes/No questions
We need the auxiliary according to the subject at the beginning of the sentence.

	Do...?	**Does...?**
Grammar structure	Do { I / we / you / they } + verb + complement?	Does { He / she / it } + verb + complement?
Question	 **Do** they buy a new house?	 **Does** she have a cell phone?
Affirmative answer	**Yes**, they **do**.	**Yes**, she **does**.
Negative answer	**No**, they **do not**. Or **No**, they **don't**.	**No**, she **does not**. Or **No**, she **doesn't**

Remember!

- If the answer is affirmative, we place **yes**, but if the answer is negative we place no.

Asking for information (Wh-questions words)

When we use the wh-words what, where, when, whom, or how before questions with do, does, am, is, or are; help us to ask information about a complement, an action, etc.

Wh-words	It's used for asking about...	Example
What Whom Where When How At what time	object person place time manner or way exactly time	 He drives his car in the freeway everyday at 12pm.

Questions and answers

A: What does he drive?
B: He drives **his new car**.

A: Where does he drive his new car?
B: He drives his new car **in the freeway**.

A: When does he drive his new car?
B: He drives his new car **everyday**.

A: How is the car?
B: The car is **new**.

A: At what time does he drive his car?
B: He drives his new car at **12 pm.**

Who and What
When we want to identify a person we use **Who** but if we want to identify objects or animals we use **What.**
Examples


Mariana is singing.

A: Who is singing?
B: Mariana.


The cat is playing ball.

A: What is playing a ball?
B: The cat.

Possessive adjectives and possessive pronouns

We use possessive adjectives to denote possession.

Personal pronoun	Possessive adjectives	Examples	
I	My	**I** have a car.	It's **my** car.
You	Your	**You** have a friend.	She's **your** friend.
He	His	**He** has a brother.	He's **his** brother.
She	Her	**She** has a car.	It is **her** car.
It	Its	**The** dog has a ball.	It's **its** ball.
We	Our	**We** have a baby.	It is **our** baby.
You	Your	**You** have a math class.	It's **your** math class.
They	Their	**They** have a new teacher.	She is **their** new teacher.

Possessive pronouns
A possessive pronoun denotes possession of something instead of the name the object. Look at the following table of personal pronouns and possessive pronouns.
Example
Whose **dress** is this?
This is **mine**.

Whose **dress** is this?
This is **hers**.

Personal pronouns	Possessive pronouns
I	Mine
You	Yours
He	His
She	Hers
It	Its
We	Ours
You	Yours
They	Theirs

Prepositions

Prepositions of place

We use…

- **In,** to indicate inclusion
- **On,** to indicate position in contact with and supported by a top surface
- **At,** to indicate an specific position o location

In	On	At
Where is the cat?  The cat is **in** the box.	Where is the cat?  The cat is **on** the table.	Where is the cat?  The cat is **at** the door.

Prepositions of time

We use…

- **In,** with months, years or centuries
- **On,** with days o dates
- **At,** to indicate specific time

In	On	At
 I'm going to the beach **in** July.	 I'll visit my grandfather **on** Sunday.	 Roberto has a meeting **at** 10:00 p.m.

Prepositions of movement

We use…

- **To**, to indicate movement toward a place.
- **Through**, to indicate movement into at one side or point
- **Across**, to indicate movement on the opposite side

to	through	across
 Pablo went **to** the supermarket yesterday.	 The train went **through** the tunnel.	 They want to walk **across** the street.

2

Past tenses

Objetivo: el alumno distinguirá el pasado simple y continuo.

Verb to be in past tense

Affirmative form

When we express past events with the verb to be (in affirmative form), we use: **was** or **were**.

Personal Pronoun	Verb To be in Past	Examples	
I	Was		
You	Were		
He	Was		
She	Was		
It	Was		
We	Were	Hidalgo **was** a priest.	Hidalgo and Allende **were** conspirators.
You	Were	He **was** a priest.	They **were** conspirators.
They	Were		

Negative Form

If we want to express past events in negative form, we add **not** after the verb to be.

Allende **was not** a priest. He **was not** a priest. Hidalgo and Allende **were not** Spanish. They **were not** Spanish.	We can also use the contraction. He **wasn't** a priest. They **weren't** conspirators.

Interrogative form

If we want to express past events in interrogative form, we put the verb to be at the beginning of the sentence.

Examples	
He was a priest. **Was** he a priest?	They were conspirators. **Were** they conspirators?

Questions and answers

We can use short answers by placing **yes**.	Also, we can use short answers in negative by placing **no**.
Was Hidalgo a Priest? Yes, **he was**. **Were** they conspirators? Yes, **they were**.	**Was** Hidalgo an Indian? No, **he was not**. **Were** Hidalgo and Allende Spaniards settlers? No, they **were not**.

Look!
Contractions:
We can use contraction with short answer.

He **was not** = He **wasn't**
They **were not** = They **weren't**

Time expressions
We use the following time expressions to indicate past time events.

Time expression	Yesterday	Last	Ago
Indicates...	The day before today.	The beginning and the end of a past event.	The beginning of a past event.
Examples	I was at class **yesterday morning**.	I remembered them in Guanajuato **last Year**.	Hidalgo, Allende and Abasolo were conspirators **two centuries ago.**

Look!

We always place the *time expression* at the end of a sentence.

Divisions of the day

At the lapse of the present day	At the lapse of the past day
This morning.	Yesterday morning.
This noon.	Yesterday noon.
This afternoon.	Yesterday afternoon.
This evening.	Yesterday evening.
Tonight.	Last night.

Past progressive tense

Affirmative form
We form Past Progressive tense with the past of the verb to be and a second verb ending in ***ing***.

Example:

I **was watching** Maria Felix' Film.
They **were celebrating** her birthday.

Past progressive tense in negative form
We form Past Progressive tense in negative by adding ***not*** after the verb to be.

Example:

I **was not watching** a film.
They **were not celebrating** her birthday.

Also, we can use the contractions:

Example:

I **wasn't watching** a film.
They **weren't celebrating** her birthday.

Past progressive tense in interrogative form
We form Past Progressive tense in interrogative form by placing the verb to be at the beginning of the sentence.

Example:

Was Lorena **watching** a film?

Were you **watching** a film?

Information questions
When we ask for information, we use a wh–question at the begining of a sentence.

Example:

A: What was watching Lorena?
B: A mexican movie.

A: Who was watching TV?
B: Lorena.

Time expressions: when, while, as

We can use a connecting word to join an adverbial clause to the main sentence.
An adverbial clause modifies the verb of the main clause. It may come at the beginning of the sentence or it may take a second position.
Let's see three of principal conjunctions.

When

Laura was reading a book **when** Pablo arrived.

While

Pedro was doing his homework **while** I was reading a book.

As

I met Karla as I was leaving.

Simple past tense

Past of regular verbs
We form the past of the regular verbs by adding **ed** at the end of a verb.

Example

Present: work
Past: work**ed**

Look!

The conjugation form in simple past is the same in all personal pronouns.

Follow these rules to use the past of regular verbs:

Add **ed** after a verb.	When the verb ends with **e** we only add **d**.	If the verb ends in **y** preceded by a consonant, we change **y** for the vowel **i** and we add **ed**.	If the verb is preceded by a vowel, the **y** doesn't change.
Example Work ⟶ work**ed**	**Example** race ⟶ race**d** like ⟶ like**d**	**Example** stud**y** ⟶ stud**ied** marr**y** ⟶ marr**ied**	**Example** Play ⟶ play**ed**

Irregular verbs
We don't use the ending **ed** in irregular verbs.

Example

Regular verb: **Play** changes by **Played**

Irregular verb: **Know** changes by **knew**

There are different ways to change irregular verbs to simple past tense:

Some verbs don't change in writing.

Present	Past	Present	Past
Cut	Cut	Beat	Beat
Bet	Bet	Cost	Cost
Fit	Fit	Hit	Hit
Hurt	Hurt	Knit	Knit
Let	Let	Put	Put
Quit	Quit	Rid	Rid

The consonant at the end of the verb changes to indicate past.

Present	Past	Present	Past
Build	Built	Have	Had
Lend	Lent	Make	Made
Send	Sent	Spend	Spent
Bend	Bent		

Some verbs change in one vowel.

Present	Past	Present	Past
Become	Became	Begin	Began
Blow	Blew	Choose	Chose
Come	Came	Draw	Drew
Drink	Drank	Drive	Drove
Fall	Fell	Feed	Fed
Fight	Fought	Find	Found
Fly	Flew	Forget	Forgot
Forgive	Forgave	Freeze	Froze
Get	Got	Give	Gave
Grow	Grew	Hang	Hung
Hold	Held	Know	Knew
Lead	Led	Light	Lit
Meet	Met	**Read**	**Read**
Ride	Rode	Ring	Rang
Rise	Rose	Run	Ran
See	Saw	Shine	Shone
Shrink	Shrank	Sing	Sang
Sink	Sank	Sit	Sat
Swim	Swam	Throw	Threw
Wake	Woke	Weave	Wove
Win	Won	Wind	Wound
Write	Wrote		

In some cases the verb looses the last vowel **e** or it changes by adding **e**.

Present	Past	Present	Past
Break	Broke	Bite	Bit
Eat	**Ate**	Hide	Hid
Shake	Shook	Speak	Spoke
Steal	Stole	Strike	Struck
Take	Took	Tear	Tore
Wear	Wore		

Other verbs change one vowel in written form, or in the sound, or both. Also it can change by adding a consonant at the end of the verb.

Present	Past	Present	Past
Buy	Bought	Do	Did
Dream	Dreamt	Feel	Felt
Hear	Heard	Keep	Kept
Lay	Laid	Leave	Left
Lose	Lost	Mean	Meant
Pay	Paid	Say	Said
Sell	Sold	Stand	Stood
Sleep	Slept	Tell	Told
Understand	Understood	Weep	Wept

Other verbs change in a vowel or by adding a consonant at the end.

Present	Past	Present	Past
Catch	Caught	Bring	Brought
Seek	Sought	Teach	Taught
Think	Thought		

Other verbs change completely.

Present	Past	Present	Past
Go	Went	Be	Was/were

Look!

With exception of the verb to be, the conjugation form in simple past is the same in all personal pronouns.

Simple past negative form
We form simple past in negative by placing the auxiliary **did**, and **not**.

Example:
I **did not** win prizes in Mexico twenty years ago.

They **did not** play in America Team last decade.

We can also use the contraction didn't.

Example:
I **didn't** win prizes in Mexico twenty years ago.

They **did not** play in America Team last decade.

Look!
When we use **did**, the verb is in simple form.

Simple past tense in interrogative form
When we form interrogative sentences, we use the auxiliary **did** at the beginning of a sentence. Look at the structure:

Did + + (simple verb) + complement?

Example:

Did you **dance** at the party last weekend?

We can use short answers in affirmative form.	Or, we can use short answer in negative form.
Example **Did** you dance at the party? **Yes, I did**	**Example** **Did** you dance at the party? **No**, I **didn't**

Information questions
We use a wh–word like what, where, how, when, and whom, before **did** for asking information.

Example: **A: When did** you have a party? **B:** Last weekend

If we ask for the person who did the action, we use the wh–word **who**.

Example: **A: Who had** a party last weekend? **B:** My friends and I

When an action is caused by an object or an animal, we use the wh–word **what**.

Example: **A: What decorated** the party? **B:** The balloons

Uses of the article *the*

We use the article *the*...	Do not use the article the...
1. With nouns previously specified. **The water in this glass** is delicious.	1. With general statements. **Water** is delicious!
2. With certain uniquely specific noun. **The sun** is yellow.	2. When we think of a general idea of some places. Children go to **bed** early.
3. With activities. She is sweeping under **the bed.**	3. With days of the week We'll have a party **on Saturday**.
4. With nouns in certain names or title. **The new** English book is interesting.	4. With the possessive "s". Angelica's car is red.
5. With ordinal numbers. The meeting will be **the first** Friday of March.	5. With names of cities. Mexico City is beautiful.
6. When the preposition "of" means possession. **The** house **of** my father is big.	6. With lakes or bays. Lake Chapala is between Jalisco and Michoacan.
7. With names of oceans, seas, rivers and gulfs. **The** Pacific Ocean.	7. With countries and states. I'm going to Monterrey.
8. When a group of states forms a country. **The** United States.	

Look!
We don't use "the" when we're not thinking of a particular place.

Example
Raul Salinas is in **prison**. (it is not a particular prison)
Ricardo Rocha went to **the** prison to visit Raul Salinas (he didn't go as a prisoner)

In some words like bed, home or work, we do not use "the" when we're not thinking in a particular case.

Example
Children should go to **bed** early.
Maria is sweeping under **the bed**.

Uses of the article *a*

Use the article *a*...	Do not use the article *a*
1. To indicate frequency. I go on fishing once **a month**.	1. To indicate that a small quantity is insufficient. There is **little** water left in the fishbowl.
2. To indicate measure. Fish costs $60 pesos **a pound**.	2. With *few*. There are **few** fish in the fishbowl.
3. To express a small quantity with *little*. I poured a **little** water in the fishbowl.	
4. To express a small quantity with *few*. I put **a few fish** in the fishbowl.	

The zero article
It is used when there is no determiner in front of a noun phrase.

We use the zero articles before plural nouns.

Article a/an	Zero article
There is **an** apple on the table.	There are apples on the table.

We use zero article before uncountable nouns.

Article a/an	Zero article
I'd like **a** cup of coffee..	I'd preferred drink coffee.

We use zero article before names.

Article a/an	Zero article
Mario Perez is **a** doctor.	This is doctor Perez.

Uses of most, *many, a lot of, a few, a little, some* and *any,*

We can use **most** with plural nouns and uncountable nouns to refer to general groups of nouns.

> ***Example:***
> **Most** cans of coffee are imported.
> **Most** coffee is imported.

We can use **many** or **a lot of** only with plural nouns.

> ***Example:***
> **Many** cans of coffee are imported.
> **A lot of** cans of coffee are imported.

We can use **not many** or **a few** to refer to a small number of things in plural.

> ***Example:***
> **Not many** cans of coffee are imported.
> **A few** cans of coffee are imported.

But, we use **a little** with uncountable nouns.

> ***Example:***
> This bottle contains **a little** coffee.

We use **some** to express unspecified quantity. In general we use **some** in *affirmative* sentences.

> ***Example:***
> I need to buy **some** coffee.

But we use **any** in *negative* sentences.

> ***Example:***
> I don't want to buy **any** coffee.

3 Future tenses

Objetivo: el alumno distinguirá el futuro idiomático y simple.

Idiomatic future tense (going to)

We express future events by using is, are or am before **going to**. *Look at the structure:*

+ (Am, is or are) + going to+ (simple verb) + comp.

Example:
You **are going to eat** fruit and vegetables.

Simple future tense (will)

Also we can express future events by using **will**. *Look at the structure.*

+ will+ (simple verb) + complement

Example:
You **will drink** eight glasses of water everyday.

We can use the contraction only with personal pronouns.

Example:
You'll drink eight glasses of water everyday.

Shall

The auxiliary **shall** express future too. It is used only with the pronouns **I** or **We**.

Example:
I shall drink eight glasses of water everyday.

For this English course we'll use **will** instead of **shall**.

Time expressions

We use time expressions to indicate future events.

Tomorrow	Indicates the day after today.
Next	indicates the following year, week, day, month, etc.
From now	With quantity of time indicates when the action begins.
From now on	The action starts immediately.
In	With quantity of time also indicates when the action begins.
Until	Indicates the progress of the action and its end.
Before	Means preceding in time.
After	Means following in time.
During	Indicates that the action occurs in a lapse of time.
Soon	Indicates that the action occurs in a short lapse of time.

This
Also, we can use **this** with time expressions.

> ***Example:***
>
> We are going to the cinema **this evening**.

Division of the day

At the lapse of the present day	At the lapse of the next day
This morning.	Tomorrow morning.
This noon.	Tomorrow noon.
This afternoon.	Tomorrow afternoon.
This evening.	Tomorrow evening.
Tonight.	Tomorrow night.

Verbs indicating movement
When a verb indicates movement from one place to another, we can use a verb + **ing**. It is not necessary the "going to" in these statements.

> ***Example:***
>
> Ignacio is **coming** home **tomorrow**.
>
> The plane is **flying** to Tijuana in ten minutes.

Some verbs that indicate movement are:

come	go	sail	Leave
drive	ride	fly	arrive

Idiomatic future tense in negative form
We express idiomatic future tense in negative form by adding **not**.

> ***Example:***
>
> I **am not** going to stay in the city.

Simple future tense in negative form
We express simple future tense in negative form, by adding **not**.

> ***Example:***
>
> I **will not** see my boss.

Also, we can use the contraction **won't**.

> ***Example:***
>
> I **won't** write sales reports.

Idiomatic future tense in interrogative form
We express Idiomatic Future in interrogative form by placing **is**, **are** or **am** at the beginning of the sentence.

Example:

You **are** going to stay in the city.
Are you going to stay in the city?

Simple future tense in interrogative form
We express simple future tense in interrogative form by placing **will** at the beginning of the sentence.

Example:

You **will** take photos at the museums.
Will you take photos at the museums?

Information questions
We can also ask with wh–words.

a) **Idiomatic future**
We place the wh–word before **is**, **are** or **am**.

Example:

A: **What** are you going to do?
B: I'm going to visit some museums.

b) **Simple future**
In simple future we also place the wh–word before **will**.

Example:

A: **Where** will you go?
B: I will go to Zihuatanejo.

There + be

The structure "there + be" means that exists something inside a certain place.

a) **Present Tense**

Singular form

Example:

There is a very pleasant beach near here.

Plural form

Example:

There are many discotheques in Acapulco.

b) **Past tense**
Singular form

Example:

There was an unoccupied room in this hotel.

Plural form

> ***Example:***
>
> **There were** many cars in the parking lot.

c) Future tense
Singular form

> ***Example:***
>
> **There will be** new restaurant near the beach.

Plural form

> ***Example:***
>
> **There will be** many visitors in Acapulco during the Holy week.

Look!

The structure of the singular in future tense is the same form as in the plural form

d) Interrogative form
We can make questions with there by placing the auxiliary "Be" at the beginning of a sentence.

> ***Example:***
> There **is** a good show in this discotheque.
>
> **Is** there a good show in this discotheque?

e) Negative form
We can make negative sentences by adding "not" after "be".

> ***Example:***
>
> There **were not** any beers in the refrigerator.

f) Contractions
You can use the contractions as in the affirmative form as in the negative. Look at the examples:

> ***Example:***
>
> **There's** little water in this glass.
>
> There **weren't** many people at the restaurant.

4 Modal auxiliaries

Objetivo: el alumno identificará la función de los auxiliares de modo.

Indicating capability or ability

We use **can** to indicate capability or ability.

Example:
You **can** speak French.

We also use **(be) able to** in the same way as **can**.

Example:
My son **is able to** swim.

In negative form we add **not**.

Example:
My son **cannot** swim.
or
My son **is not able to** swim.

The contraction of **cannot** is **can't**.

Expressing past

We express ability in past tense by using **could**.

Example:
My son **could** swim since he was six years old.

We can change **could** using **was/were able to**.

Example:

My son **was able to** win a swimming competition.

In negative form we add **not**.

Example :
My son **could not** swim when he was a baby.
or
My son **was not able** to swim when he was a baby.

The contraction of **could not** is **couldn't**.

Expressing future

We express capability or ability in future tense by using **will be able to** or **going to be able**.

Example:

The children **will be able to** arrive in ten minutes.

They **are going to be able to** arrive in ten minutes.

In negative form we add **not**.

Example:

They **won't be able to** arrive on time.

They **are not going to be able to** arrive on time.

Asking for permission or giving authorization

We use **may** or **can** to ask for permission.

Example:
May I watch TV?
or
Can I watch TV?

In negative form we add **not**.

Example:
You **may not** watch TV.
or
You **can't** watch TV.

Expressing wishes

We can express wishes by using **may**.

Example:

May Ana win the competition.

In negative form we add **not** after the subject.

Example:

May Ana **not** lose the competition.

Expressing possibility

We express possibility with **may** or **might**.

Example:
Ana **may win** the first prize in the competition.

Ana **might win** the first prize in the competition.

In negative form we add **not**.

Example:
Ana **may not win** the third prize.

Ana **might not win** the third prize.

Also, we ask about possibility using indistinctly **may**, **might** or **could** at the beginning of the sentence.

Example:

Might I go with you to the National Competition of Chess next month?
Yes, you **might**.
No, you **might not**.

Indicating obligation or necessity

We express obligation or necessity by using **must** or **have/has to**.

Example:

You **must** arrive at 8 o'clock in the morning.

You **have to** arrive at 8 o'clock in the morning.

In negative form we add **not**.

Example:

You **must not** arrive at 9 o'clock in the morning.

With **have/has to** in negative form we use **don't/doesn't**.

Example:

I **don't have to** arrive at 9 o'clock in the morning.

Indicating obligation or necessity in past

We can express obligation or necessity in past with **had to**.

Example:

You **had to** arrive at eight o'clock in the morning.

In negative form we use **did.**

Example:

You **didn't have to** arrive at nine o'clock.

Indicating obligation or necessity in future

We express obligation or necessity in future by adding **will** or **going to**.

Example:

You **will have to** arrive at eight o'clock.
You **are going to have to** arrive at eight o'clock.

In negative form we add **not**.

Example:

You **won't have to** arrive at nine o'clock.
You **aren't going to have to** arrive at nine o'clock.

Indicating a suggestion or convenience

We indicate suggestion or convenience with **had better**, **ought to**, or **should**.

Example:

Berenice **ought to** study harder.
She **had better** study the lesson.
You **should** study the lesson again.

In negative form we add **not**.

Example:

Berenice **ought not to** study harder.
She **had better not** study the lesson.
You **should not** study the lesson again.

The contraction of should not is **shouldn't**.

Example:

You **shouldn't** study the lesson again.

Indicating habit or routine

We talk about past habits with **would** or **used to**.

Example:

We **would** check the sales twice a day.
We **used to** check the sales twice a day.

In negative form we add **not**.

Example:

We **would not** check the sales twice a day.

The contraction of would not is **wouldn't**.

With **used to** we use **didn't**.

Example:

We **didn't use to** check the sales twice a day.

Indicating preference

We express preference by using **would rather**.

Example:

I **would rather** have lunch at three o'clock.

When we use personal pronouns, we can use the contraction **d**.

Example:

I'd rather have lunch at three o'clock.

In negative form, we add **not**.

Example:

Mario would rather **not** have lunch at two o'clock.

Asking for information

Asking about capability or ability
Can
When we ask about ability in present, we place **can** at the beginning of the question.

Example:

Can you play chess?
Yes, I **can**.
No, I **can't**.

Could
To express past action, we use **could**.

Example:

Could you play chess?
Yes, I **could**.
No, I **couldn't**.

(Be) able to
To express future action, we use the form **(be) able to**.

Example:

Will you **be able** to play chess next month?
Yes, I **will**.
No, I **won't**.

Are you **going to be able** to play chess next month?
Yes, I **am**.
No, **I'm not**.

We can also use **could** to indicate future as a possibility.

Example:

Could you play in the National Competition of chess **next month**?

Asking about obligation or necessity to do something

We use **must**, at the beginning of the sentence, to ask about obligation.

> ***Example:***
>
> **Must** you practice chess everyday?
> Yes, I **must**.
> No, I **mustn't**.

With **have to** in present we use do/does at the beginning of the sentence.

> ***Example:***
>
> **Does** he have to practice chess every day?
> Yes, he **does**.
> No, he **doesn't**.

In past tense we use **did** at the beginning of the sentence.

> ***Example:***
>
> **Did** he have to practice chess everyday?
> Yes, he **did**.
> No, he **didn't**.

In future tense, we use **will** or **going to** at the beginning of the sentence.

> ***Example:***
>
> **Will** he have to practice chess everyday?
> Yes, he **will**.
> No, he **won't**.
>
> **Is** he **going to have to** practice chess everyday?
> Yes, he **is**.
> No, he **isn't**.

Asking about suggestions

We ask about suggestion or convenience by placing **should**, **ought to** and **had better** at the beginning of the sentence.

> ***Example***:
>
> **Should** you help him?
> Yes, I **should**.
> No, I **shouldn't**.
> **Ought** you **to** help him?
> Yes, I **ought to**.
> No, I **ought not to**.
> **Had** you **better** help him?
> Yes, I**'d better**.
> No, I**'d better not**.

Asking about habits
We ask about past habits by using **did** and **use to**.

> ***Example:***
>
> **Did** he **use to** play football every Saturday?
> Yes, he **did.**
> No, he **didn't.**
>
> **Did** your grandfather **use to** drive everyday?
> Yes, he **did.**
> No, he **didn't.**

Asking about preferences (would)

We ask about preferences with **would rather**.

> ***Example:***
>
> **Would** he **rather** walk everyday?
> Yes, he **would.**
> No, he **wouldn't.**

Asking about an opinion
We ask about opinions with **shall**.

> ***Example:***
>
> **Shall** I cut my hair?
> Yes, you **shall.**
> No, you **shall not.**

Relatives Wh–clauses

We use a wh–clause before a to–infinitive.

Affirmative form

We should consider **where** to go.

Negative form

I can't decide **where** to go.

Interrogative form

Can you decide **where** to go?

Asking for information with wh–clauses
Some verbs can be followed by an object pronoun to ask for information to somebody. Look at the structure.

+ verb { object pronoun } wh–clause + to–infinitive.

Example

Tania **advised** me which dress to buy.

Uses of *very*, *too* and *enough*

Also, we use these adverbs to express degree about someone's characteristics.

Example:

Alberto is **very** fat.
Mariana can't solve the exercises, they're **too** difficult.
Yolanda is old **enough** to go to school by herself.

Look!

Adverbs **very** and **too** always go before the adjective. Otherwise, **enough** goes after the adjective.

Example

Very fat **too** difficult old **enough**

We use these adverbs to express degree with actions.

Example

*Mauro always drive **very rapidly**.*

5

Perfect tenses

Objetivo: el alumno distinguirá el uso de los tiempos prefectos en presente, pasado y futuro.

Present perfect simple

When we talk about a situation in a period of time that continues from the past until now, we use **have** or **has**. Look at the following structures.

Have

I We You They	have + participle

Example

I **have visited** the doctor ordinarily.

Has

He She It	has + participle

Example

Mr. Sanchez **has visited** the doctor continually.

Irregular verbs

Participles are equal to simple and past			**Participles are equal to past**		
Simple	**Past**	**Participle**	**Simple**	**Past**	**Participle**
Beat	Beat	Beat	Buy	Bought	Bought
Bet	Bet	Bet	Sit	Sat	Sat
Put	Put	Put	Feel	Felt	Felt

Participles are equal to simple form			**Participles with change of a vowel**		
Simple	**Past**	**Participle**	**Simple**	**Past**	**Participle**
Become	Became	Become	Begin	Began	Begun
Come	Came	Come	Drink	Drank	Drunk
Run	Ran	Run	Sing	Sang	Sung

Participles formed by adding a consonant			Participles formed by adding a syllable		
Simple	**Past**	**Participle**	**Simple**	**Past**	**Participle**
Blow	Blew	Blow**n**	Eat	Ate	Eat**en**
Draw	Drew	Draw**n**	Give	Gave	Give**n**
Know	Knew	Know**n**	Take	Took	Take**n**

Special changes		
Simple	**Past**	**Participle**
Be	Was/were	Been
Do	Did	Done
Go	Went	Gone

Regular verbs

Regular verbs change to participle form by adding –**ed**.

Simple	Past	Participle
Work	Worked	Worked
Dance	Danced	Danced

Verbs ended in **"y"** change to **"–ied"**.

Simple	Past	Participle
Study	Studied	Studied

Verbs ended in **"y"** precede by a vowel form its participle just by adding **"–ed"**.

Simple	Past	Participle
Play	Played	Played

Present perfect continuous

When we talk about a situation of an activity that recently fished, we use present perfect continuous.

Example:

Perla **has been eating** too much all these days.

Look at the structures!

I We You They	have + been + verb –ing.
He She It	has + been + verb –ing.

Time expressions: since, for, just

Since: indicates prolongation

Example

Lucy has been working at Sam's **since** 1990.

For: Indicates duration

Example

The boy has been bothering his sister **all morning**.

Andrea and Mario have been living together **for the last six months**.

Just: indicates ending.

Example

Gerardo was **just** here a minute ago.

Expressions with yet and already

Already

ALREADY indicates that something happened sooner than expected. We can use ALREADY in affirmative statements.

> ***Example:***
>
> Children have **already** eaten.

Notice that ALREADY usually goes in the middle of a sentence.

Also, we can use ALREADY with tag questions in negative statements.

> ***Example:***
>
> Children haven't **already** eaten, have they?

Negative form

We put **not** after **have** or **has** to form negative sentences.

Present perfect simple

> ***Example:***
> I **have not** seen my son up to now.

Present perfect continuous

> ***Example:***
> Mario **has not been** attended to school lately.

Perfect tense with yes–no answers

Present perfect simple

When we ask about a situation in a period of time that continues from the past until now, we use has or have at the beginning of the sentence. Look at the structure.
Example:

A: Have you visited Cancun this week?
B: Yes, I have. (Affirmative answer)
No, I have not. (Negative Answer)

With the third persons, we use has.
Example:

A: Has Rosa traveled to Cancun?
B: Yes, She has. (Affirmative answer)
No, she has not. (Negative Answer)

Look!

We use the contractions:
have not = haven't
has not = hasn't

Present perfect continuous

When we ask about a situation of an activity that has recently finished, we use the present perfect continuous. Look at the structure.
Example:

A: Have you been traveling lately?
B: Yes, I have. (Affirmative answer)
No, I haven't. (Negative Answer)

With the third persons, we use has.
Example:
A: Has Rosa been visiting Puerto Vallarta?
B: Yes, She has. (Affirmative answer)
No, She hasn't. (Negative Answer)

Past perfect simple

When we talk about a past situation that happened before another past situation, we use the past perfect simple. Look at the structure.

🧍 + had + participle

Example:

We had taken Mr. Villanueva's class before.

Look!

We can use a sentence or phrase indicating past time linked by when, before, by the time…

Example:
Class had finished when we returned to school
(Past of the past action). (Past action)

Past perfect continuous

When we talk about the duration of a situation that happened over a period up to a particular past time, we use past perfect continuous.

Example:
We had been watching a movie when class began
The duration of a past of the past action. Past action

Negative Form
We put **not** after **had** in negative sentences. You can use the contraction of **had not = hadn't.**

Example:

I hadn't seen you before class began.
They hadn't been going to the movies before.

Past perfect simple with yes – no questions
When we ask a situation that happened before another past situation, we use the past perfect simple. Look at the structure.

Had + 🧍 + participle…?

Example:

A: Had you baked a cake before I returned?
B: Yes, I had. (Affirmative answer)
B: No, I hadn't . (Negative answer)

Past perfect continuous with yes–no questions
When we ask about the duration of a situation that happened over a period up to a particular past time, we use past perfect continuous. Look at the structure.

Had + + been+ verb–ing…?

Example:

A: Had you been working when I called you?
B: Yes, I had. (Affirmative answer)
B: No, I hadn't . (Negative answer)

Forming questions
We form questions with a wh– word (wh – questions) at the beginning of a sentence. Look at the example.

Example:

A: What had you been baking?
B: A cake.

A. Where had the children been?
B: In the garden

6 Comparatives and superlatives

Comparatives

Adjective + –er + than

Example:

Lorena is short**er than** Ana.

We use **–er** for short adjectives.

Short adjectives

Adjective	Comparative
tall	Taller than
short	Shorter than
hard	Harder than
fat	Fatter than
pretty	Prettier than

Long adjectives
We use **more** for long adjectives.

Adjective	Comparative
expensive	More expensive than
delicious	More delicious than
interest	More interest than
beautiful	More beautiful than
intelligent	More intelligent than
important	More important than
difficult	More difficult than
active	More active than
rapidly	More rapidly than

Good
We use **better** to express the comparative of **good.**

Example

Blanca is a good student; but Lorena is **better.**
or
Lorena is **better than** Blanca.

More…than

Example

This book is **more** interesting **than** those ones.

Less…than

Example

The red dress is **less** expensive **than** the blue one.

Superlatives

Short words

We use **–est** for short words, and we place **the** before the superlative

Example

This is **the** long**est** dress.

Long words

We use **the most** before long words.

Example

This is **the most** beautiful dress.

The best

We use **best** to express the superlative of **good.**

Example

This is **the best** restaurant I know.

The worst

Example

This is **the worst** place on the Avenue.

The least

Example

This dress is **the least** expensive of all.

Expressing similarity: *like* and *as*

The same as

Example

The third car is **the same as** the first.

Like

Example

Ana looks **like** her mother.

Alike

Example

Ana and her mother look **alike**.

Expressing difference

Example

The car in the middle is **different from** the other cars.

7 Passive voice

Objetivo: el alumno distinguirá el uso de la voz pasiva en presente, pasado y futuro.

Introduction to passive voice

a) Differences between passive voice and active voice

Active voice
In the active voice the subject performs the action expressed by the verb.

Passive voice
In the passive voice the subject receives the action the verb is expressing.

Example:
Active voice
Mexican **burn** Judases
SUBJECT + VERB + DIRECT OBJECT

Passive voice
Judases **are burned** by Mexican
SUBJECT + VERB + AGENT

When, we want to change an active voice to passive voice, we place the direct object at the beginning of the sentence, and we place the subject at the end.
So, the phrase "Judases" now is the "subject" and "Mexican" is now the agent or performer of the action. Also, the agent is introduced in a prepositional phrase with "by".

Look!
In the active voice the subject performs the action.
Mexican ➔ **burn** Judases.
SUBJECT + VERB + DIRECT OBJECT

In the passive voice the subject receives the action.
Judases ← **are burned** by Mexican
SUBJECT + VERB + AGENT

Present progressive in the passive voice

Active voice
Many tourists **are visiting** Cancun.

Passive voice
Cancun **is being visited** by many tourists.

Notice the change in the grammatical construction.

+ (am, is, are) + being + participle

Past progressive in the passive voice

Active voice
Many tourists **were visiting** Cancun.
Passive voice
Cancun **was being visited** by many tourists.

Notice the change in the grammatical construction.

+ (was, were) + being + participle

Forming questions with the passive progressive action

b) Simple question
A: Was Cancun being visited by many tourists?

Affirmative answer
B: Yes, it was. Cancun was being visited by many tourists.

Negative answer
B: No, it wasn't. Cancun wasn't being visited by many tourists.
In short answers we place the phrase: 'Yes, it was' or 'No, it wasn't.'

c) Information questions in the passive voice for progressive action
Notice the grammatical construction to form questions with a wh-word.

Wh-word + + (be) + being + participle+?

A: Who was being visited Cancun?
B: Many tourists.
Notice that we use the information word: ***who*** *for subject,* ***whom*** *for object,* ***when*** *for time, etc.*

Simple present in the passive voice

Active voice
Vicente Fox **governs** Mexico.
Passive voice
Mexico **is governed** by Felipe Calderon.
Notice the change in the grammatical construction.

+ (am, is, are) + participle

Past simple in the passive voice
Active voice
Octavio Paz **wrote** "El Laberinto de la Soledad"
Passive voice
"El Laberinto de la Soledad" **was written** by Octavio Paz
Notice the change in the grammatical construction.

+ (was, were) + participle

Forming questions with passive simple action
Affirmative answers
A: Is Mexico governed by Vicente Fox nowadays?
B: Yes, it is.
Mexico is governed by Vicente Fox nowadays.
Negative answer
A: Was "El Laberinto de la Soledad" written by Juan Rulfo?
B: No, it wasn't.
"El Laberinto de la Soledad" wasn't written by
Juan Rulfo.

Information questions for the simple present or past in the passive voice
Notice the grammatical construction to form questions with a wh-word.

Wh-word + + (be) + participle+?

A: By whom is Mexico governed nowadays?
B: By Vicente Fox.
A: What book was written by Octavio Paz?
B: "El Laberinto de la Soledad"

Future action with 'GOING TO' and with 'WILL' in the passive voice

a) GOING TO
In the passive voice we place subject, then we insert ***be*** between ***going to*** and the participle form of the verb used.
Example

The Independence day is **going to be celebrated** by Mexicans.

Notice the grammatical construction.

+ (verb to be) + GOING TO + BE + participle

b) WILL
In future action with Will, we place subject, then insert BE between WILL and the PARTCIPLE VERB used. Then we add the rest of the sentence.

Example

The Independence day **will be celebrated** by Mexicans.

Notice the grammatical construction.

+ WILL + BE + participle

Forming questions with passive future action

c) GOING TO
Affirmative answers
A: Is the bell going to be rung by the president?
B: Yes, it is.
The bell is going to be rung by the president.
Negative answer
A: Is the bell going to be rung by the president's wife?
B: No, it isn't.
The bell is going to be rung by the president.

d) WILL
Affirmative answers
A: Will the bell be rung by the president?
B: Yes, it will be.
The bell will be rung by the president.
Negative answer
A: Will the bell be rung by the president's wife?
B: No, it won't be.
The bell will be rung by the president.

Information questions for the future in the passive voice

e) GOING TO
Notice the grammatical construction to form questions with a wh-word.

Wh-word + + (be) + going to + be + participle?

A: By whom is the independence Cry going to be given?
B: By the president.

f) WILL

Notice the grammatical construction to form questions with a wh-word.

Wh-word + 🧍 + WILL + BE + participle?

A: By whom will the independence Cry be given?
B: By the president.

Modal auxiliaries in the passive voice

We can change the voice for all modal auxiliaries by following the same procedure that we used with WILL. We insert BE between the modal auxiliary and then the participle of the verb. We can include or omit the agent.

Example

Your homework can be written with pen.

Notice the grammatical construction.

🧍 + Modal auxiliary + be + participle

Remember the meaning of the modal auxiliaries.

Auxiliary	Meaning
CAN	Ability
COULD	Past ability
MAY	Permission
MUST	Necessity
MIGHT	Conjecture or probability
SHOULD	Obligation
WOULD	Habitual action in the past
WOULD RATHER	Preference

Information question with modal auxiliaries in the passive voice

Notice the grammatical construction to form questions with a wh-word.

Wh-word + auxiliary + 🧍 + be + participle+?

A: Who must be given The Independence Cry?
B: By the president.

A: When should be examined the students?
B: Tomorrow.

Perfect tense in the passive voice

a) Present

We place subject, then we insert ***been*** between the auxiliaries ***have*** *or* ***has*** and the participle form of the verb used.

Active voice
Olivia **has bought** a new house.
Passive voice
A new house **has been bought** by Olivia.

Notice the grammatical construction.

🧍 + have / has + BEEN + participle

b) Past

We place subject, then insert ***been*** between the auxiliary ***had*** and the PARTCIPLE VERB used. Then we add the rest of the sentence.

Active voice
Shakira **had delayed** the concert due to rain.
Passive voice
The concert **had been delayed** by Shakira.

Notice the grammatical construction.

🧍 + HAD + BEEN + participle

c) Future

We place subject plus ***will,*** then we insert ***been*** between the auxiliaries ***have*** *or* ***has*** and the participle form of the verb used.
Active voice
Wall-Mart Co. **will have opened** a new store in September.
Passive voice
A new store **will have been opened** by Wall-Mart Co. in September.

Notice the grammatical construction.

🧍 + WILL + HAVE + BEEN + participle

d) Negative form

We refer to the negative form using **not** after the auxiliary **has**, **have**, **had** or **will** for any tense.

A new house has **not** been bought by Olivia.

Notice the grammatical construction.

🧍 + auxiliary + NOT + BEEN + participle

Forming questions
Affirmative answers
A: Had the concert been delayed by Shakira?
B: Yes, it had.
It had been delayed by Shakira.
Negative answers
A: Had the concert been delayed by the manager?
B: No, it had not.
It had been delayed by Shakira.

Information questions in the passive voice
Notice the grammatical construction to form questions with a wh-word.

Wh-word + auxiliary + 🧍 + been + participle?

A: Where had the concert been given?
B: In the Auditorio.

A: By whom had the concert been delayed?
B: By Shakira.

Ejercicios

1. How ___________ she?

   A) is old B) old are C) old is D) old her

2. Alex, ___________ play football inside the house

   A) not B) don't C) doesn't D) didn't

3. A: School is very ___________ today.
   B: Yes, the kids are studying ___________.

   A) Noisy / quiet B) Noisy / quietly C) Quietly / quiet D) Quiet / quietly

4. She ___________ a new computer, so she ___________ learn how to use it.

   A) Have / have to B) has / has to C) had / have to D) have to / has

5. Carlos Fuentes is the author ___________ wrote *Aura*.

   A) which B) whom C) what D) who

6. Roma is a popular holiday ___________.

   A) beach B) place C) destination D) expedition

7. Thank you so much for ___________ me.

   A) call B) calls C) called D) going to call

8. How ___________ her daughter?

   A) is old B) old are C) old is D) old her

9. Tania, ___________ run inside the house.

   A) doesn't B) do C) don't D) didn't

10. A: The girls are ___________.
    B: Yes, they are playing ___________.

    A) friendly / friends B) friends / friendly C) friendship / friendly D) friends / friendship

11. They ___________ a new coffee machine, so they ___________ learn how to use it.

    A) have / have to B) has / has to C) had / have to D) have to / has

12. Sebastian is the sculptor ___________ made “El caballito”.

    A) which B) who C) what D) whom

13. Canada is a popular holiday ___________.

    A) beach B) place C) expedition D) destination

14. Thank you so much for ___________ me.

A) listen to B) listens C) was listen D) won't listen

15. I work ___________ 8:00 am ___________ 5:00 pm.

A) to / from B) at / to C) by / from D) from / until

16. There ___________ rice in the kitchen.

A) Is not any B) any C) some D) many

17. ___________ you like a cup of tea?

A) Are B) How many C) What D) Would

18. I feel cold. ___________.

A) It's raining B) It's windy C) It's going to snow D) It's pouring

19. You ___________ to lose your sister's wedding.

A) mustn't B) aren't allowed C) shouldn't D) misses

20. I study ___________ 7:00 am ___________ 2:00 pm.

A) to / from B) from / to C) to / for D) by / from

21. There ___________ coffee in the kitchen.

A) not any B) any C) is not any D) is many

22. ___________ you like a glass of water?

A) Can B) How many C) What D) Would

23. I feel some drops. ___________.

A) It's hot B) It's windy C) It's going to rain D) It's sunny

24. You are still sick. You ___________ stop taking you medicines.

A) must B) are allowed C) shouldn't D) could

25. I'm having lunch with my mother-in-law and I want to ___________.

A) go eat B) make a dance C) going D) make a good impression

26. The conference ___________ when you came in.

A) Just start B) Just starts C) Had just started D) Was just started

27. Do you ___________ dancing salsa?

A) to B) like C) like to D) to like

28. This dress is ___________ expensive. I will not buy it.

A) many B) much C) too D) a lot

29. We didn't go to the party because it was ___________.

A) such far B) far enough C) too much far D) too far

30. The Eiffel Tower is ___________ famous building in France.

A) the more B) much C) the most D) one of the more

31. My boss asked me to ___________ him a favor.

A) make B) making C) have D) do

32. The film ___________ when you arrived.

A) just start B) just starts C) had just started D) was just started

33. Do you ___________ read novels?

A) to B) like C) like to D) to like

34. These shoes are ___________ big. I will not buy them.

A) too B) much C) many D) a lot

35. The restaurant was ___________. That's why we didn't stay there.

A) such full B) fulling C) much full D) too full

36. The Empire State is ___________ famous building in New York.

A) much B) the most C) the more D) one of the more

37. The vase ___________ by Lucy.

A) was broken B) break C) broke D) were broken

38. The cup ___________ by Tim.

A) broke B) break C) was broken D) were broken

39. If he doesn't study enough, he ___________ the math exam.

A) won't pass B) will pass C) passes D) is going to pass

40. If they don't study enough, they ___________ the science exam.

A) Are going to pass B) will pass C) passes D) won't pass

Comprehension reading

Texto 1

How long can humans stay awake?

The easy experimental answer to this question is 264 hours (about 11 days). In 1965, Randy Gardner, a 17-year-old high school student, set this apparent world-record for a science fair. Several other normal research subjects have remained awake for eight to 10 days in carefully monitored experiments. None of these individuals experienced serious medical, neurological, physiological or psychiatric problems. On the other hand, all of them showed progressive and significant deficits in concentration, motivation, perception and other higher mental processes as the duration of sleep deprivation increased. Nevertheless, all experimental subjects recovered to relative normality within one or two nights of recovery sleep. Other anecdotal reports describe soldiers staying awake for four days in battle, or unmedicated patients with mania going without sleep for three to four days.

The more difficult answer to this question revolves around the definition of "awake." As mentioned above, prolonged sleep deprivation in normal subjects induces altered states of consciousness (often described as "microsleep"), numerous brief episodes of overwhelming sleep, and loss of cognitive and motor functions. We all know about the dangerous, drowsy driver, and we have heard about sleep-deprived British pilots who crashed their planes (having fallen asleep) while flying home from the war zone during World War II. Randy Gardner was "awake" but basically cognitively dysfunctional at the end of his ordeal.

https://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=how-long-can-humans-stay [Consultado: 13 de marzo, 2012]

41. For how long was Randy Gardner awake?
    A) 10 days
    B) 17 days
    C) 11 days
    D) 8 days

42. What types of person with mania don't sleep for 3 or 4 days?
    A) unmedicated students
    B) medicated pilots
    C) medicated soldiers
    D) Unmedicated patients

43. After several days without sleeping, the individuals ___________
    A) experienced neurological problems
    B) just experienced physiological problems
    C) didn't experience serious problems
    D) didn't experience moral problems

44. It's a consequence of the lack of sleep.
    A) High concentration
    B) Significant deficit on concentration
    C) Motivation to realize activities
    D) Better perception

45. After some days without sleeping, David Gardner was ___________.
    A) cognitively dysfunctional
    B) cognitively functional
    C) really exhausted
    D) in the middle of a “microsleep”

Texto 2

Leonardo da Vinci the genius

Leonardo da Vinci, who was born in Vinci, near Florence in 1452, is known for his visionary ideas. He made sketches of scissors, the parachute, helicopter, airplanes, and engineering designs, some of which came into use 400 years after his death in 1519. But his notebooks never provided an explanation on the mechanics of his inventions. In fact, it is not known if he ever even constructed any of the ideas himself. What is known is that he could write with the one hand and draw with the other simultaneously.

In his last 6 years, Leonardo da Vinci worked for King Francis I of France. The king bought one of Leonardo's paintings, which he hung in his bathroom. Called La Gioconda, this portrait of Lisa Gherandini was the first painting to feature fading colors to create a sense of aerial perspective. Today it is better known as the Mona Lisa.

In 1912, the Mona Lisa was stolen from the Louvre, Paris. It took almost 3 years to recover. During that time, 6 forgeries turned up in the USA, each selling for a very high price. The original is, obviously, priceless.

http://didyouknow.org/leonardo-da-vinci-the-genius/ [Consultado: 13 de marzo, 2012]

46. On line 2, "sketches" means __________.
    A) little models
    B) draws
    C) written description
    D) real size models

47. On line 6, "simultaneously" means __________.
    A) at same time
    B) left-handed
    C) draw really well
    D) with one hand

48. Da Vinci worked for King Francis I __________.
    A) when he was 6 years old
    B) in 1452
    C) in his last 6 years
    D) In 1519

49. What happened to the painting in 1912?
    A) It was exposed in USA
    B) It was sold
    C) It was destroyed
    D) it was stolen

50. On the last line, "priceless" means __________.
    A) without value
    B) nobody has enough money to buy it
    C) really valuable
    D) the painting is not for sale

Texto 3

Dopamine is the brain's pleasure chemical. It plays a role in gambling, drug use, and, well, love. When we fall in love, dopamine is released, making couples feel related and energetic about each other.

"That someone takes on special meaning to you and you focus on this individual because the dopamine system has been activated," says Helen Fisher, PhD, a biological anthropologist. "It is what triggers very goal oriented behavior, where no one else matters but your new partner."

http://lifestyle.myjoyonline.com/pages/relationships [Consultado: 13 de marzo, 2012]

51. In the second line, the word "energetic" is similar in meaning to...
   A) angry
   B) exasperated
   C) enthusiastic
   D) boring

Texto 4

When the telephone was introduced in 1876, a Western Union internal memo noted: "This 'telephone' has too many shortcomings to be seriously considered as a means of communication. The device is of no value to us." In 1879, W. H. Preece, a Post Office engineer, testified to a House of Commons Committee that Britain had little use of the telephone because: "Here we have a superabundance of messengers, errand boys and things of that kind".

Even Alexander Graham Bell, who was awarded the patent for the invention of the telephone, disliked telephones so much that he refused to have one in his office. But that should not come as a surprise because both his mother and wife was deaf and perhaps Bell – who also was a speech teacher to the deaf – was only considering them.

http://didyouknow.org/alexander-graham-bell-disliked-telephones/ [consultado: 12 de marzo, 2012]

52. When the telephone was introduced in 1876, it ___________
   A) worked perfectly
   B) was a total success
   C) didn't work well
   D) was well received

Texto 5

Recycling aids in conserving the resources available for the future generations to come. It is because when the current generation utilizes the resources more efficiently by reusing them and converting them into newer products, they are saving the consumptions of the natural resources which will be thus rendered available for the generations to come. Another great advantage of recycling is that it largely prevents emission of the greenhouse gases like carbon dioxide into the atmosphere. The industrial processes that are involved in the manufacturing of different products often release these toxic greenhouses gases that can be well reduced by recycling.

http://ezinearticles.com/Advantages-of-Recycling [consultado: 14 de marzo, 2012]

53. What happen if we **don't** recycle?
   A) The emission of greenhouse gases increases
   B) We save natural resources
   C) The emission of greenhouse gases reduces
   D) We use more efficiently the resources

Texto 6

Attention You can buy alcohol only if you are at least 21 years old. WalMart

54. The advertisement says that:
    A) Only 21 years old persons can buy alcohol
    B) Only 21 persons can buy alcohol
    C) You can buy alcohol if you are 21 or older
    D) You can buy alcohol if you are 19

Texto 7

Children are not allowed

55. The advertisement says that:
    A) just children can enter
    B) children can't enter
    C) children can enter with their parents
    D) this place is only for children

Respuestas a los reactivos de Inglés

1	C	11	A	21	C	31	D	41	C	51	C
2	B	12	B	22	D	32	C	42	D	52	C
3	D	13	D	23	C	33	C	43	C	53	A
4	B	14	A	24	C	34	A	44	B	54	C
5	D	15	D	25	D	35	D	45	A	55	B
6	C	16	A	26	C	36	B	46	B		
7	A	17	D	27	B	37	A	47	A		
8	C	18	C	28	C	38	C	48	C		
9	C	19	B	29	D	39	A	49	D		
10	B	20	B	30	C	40	D	50	C		

Unidad 1 Aritmética y Álgebra
1. Números reales
2. Polinomios
3. Transformaciones algebraicas
4. Ecuaciones de 1er grado y 2do. grado
5. Variación proporcional

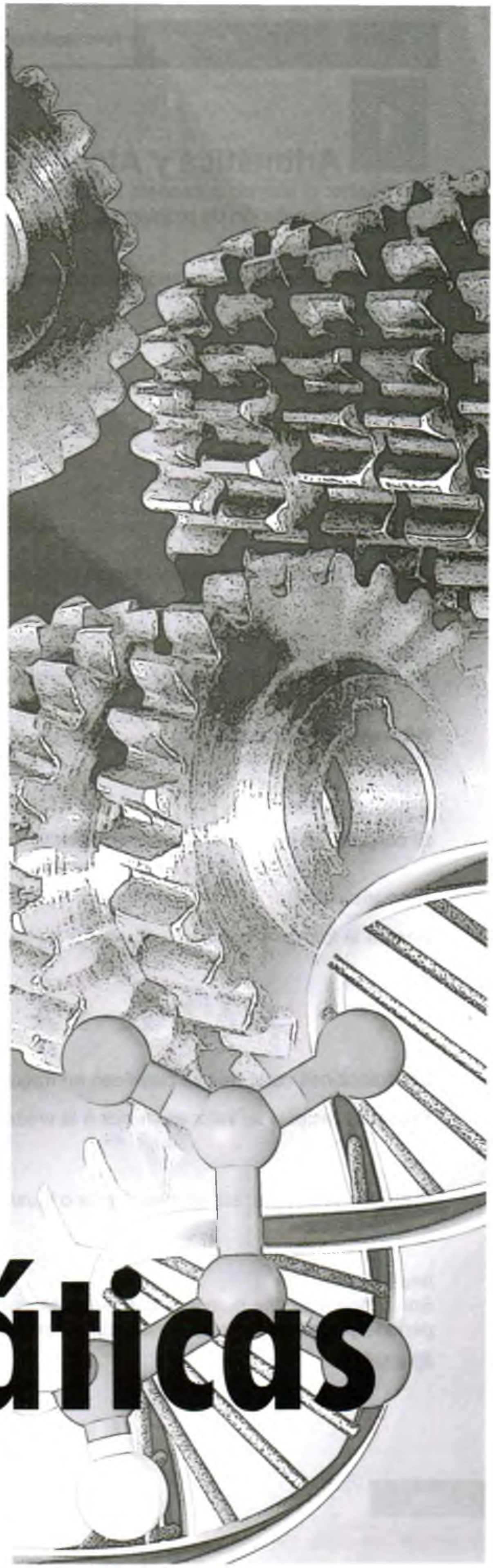
Unidad 2 Geometría y trigonometría
1. Funciones exponenciales y logarítmicas
2. Geometría Euclidiana
3. Trigonometría

Unidad 3 Geometría analítica
1. Sistemas de coordenadas
2. La línea recta
3. Circunferencia
4. Secciones cónicas
5. Ecuación general de segundo grado
6. Trayectorias curvilíneas
7. Coordenadas polares

Unidad 4 Cálculo diferencial
1. Funciones y límites
2. La derivada y sus interpretaciones
3. Derivadas de funciones algebraicas
4. Aplicaciones de la primera derivada
5. Derivada de funciones exponenciales
6. Funciones circulares
7. Diferenciales y cálculos aproximados
8. Funciones inversas

Unidad 5 Cálculo integral
1. Antiderivadas e integral indefinida
2. Integral definida
3. Aplicaciones de la integral indefinida
4. Métodos de integración

Unidad 6 Razonamiento matemático
1. Series espaciales
2. Series numéricas
3. Problemas diversos



Matemáticas

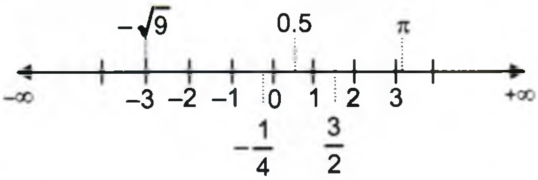
1 Aritmética y Álgebra

Propósito: el alumno aprenderá los procedimientos aritméticos para utilizarlos como herramienta en la resolución de problemas.

Números reales

Son todos aquellos que se representan en la recta numérica.

Ejemplos:



Clasificación de los números reales

- Reales
  - Racionales
    - Naturales
      - Primos
      - Compuestos
    - Enteros
      - Positivos
      - Cero
      - Negativos
  - Irracionales

Naturales (N)

Son aquellos números que se utilizan para contar y el conjunto es:

$$N = \{1, 2, 3, 4...\}$$

Números primos

Son números que tienen únicamente dos divisores, la unidad y el propio número.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...\}$$

Números compuestos

Son números que tienen más de dos divisores.

$$\{4, 6, 8, 9, 10, 12...\}$$

Enteros (Z)

El conjunto se conforma de números positivos, negativos y el cero.

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3...\}$$

Racionales (Q)

Son de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in Z$ y $q \neq 0$, se les conoce como fracciones comunes.

Ejemplos:

$$\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, -2, 3, 1.\bar{3}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{8}$$

Las fracciones comunes se clasifican en fracción propia y fracción impropia.

Fracción propia: su valor es menor a la unidad.

$$\frac{2}{5}, \frac{12}{17}, \frac{4}{7}, \frac{1}{3}$$

Fracción impropia: su valor es mayor o igual que la unidad.

$$\frac{8}{3}, \frac{12}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{4}$$

Irracionales (Q')

Son todos aquellos números que su parte decimal se conforma de una serie infinita de dígitos, pero no existe periodo y por lo regular son resultado de raíces no exactas.

Ejemplos:

$$\pi, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

a) Enteros

Suma y resta
Números enteros con signos iguales, se suman y se coloca el signo de los sumandos.

Ejemplos:

1) $-3-4=-7$ 2) $4+3+9=16$ 3) $-5-2-11=-18$

Números con signos diferentes, se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto.

Ejemplos:

1) $-10+7=-3$ 2) $-9+15=6$ 3) $-4+12-9=-13+12=-1$

4) $13+15-21+7-32=35-53=-18$

Multiplicación y división

Leyes de los signos

Multiplicación

$(+)(+)=+$ $(-)(-)=+$ $(+)(-)=-$ $(-)(+)=-$

División

$\frac{+}{+}=+$ $\frac{-}{-}=+$ $\frac{+}{-}=-$ $\frac{-}{+}=-$

Ejemplos:

1) $(-3)(4)=-12$ 2) $(-5)(-7)=35$ 3) $(-2)(-6)(-7)=-84$

4) $\frac{-76}{19}=-4$ 5) $\frac{(-3)(12)}{-4}=\frac{-36}{-4}=9$ 6) $\frac{(-7)(6)(-15)}{(14)(-9)}=\frac{630}{-126}=-5$

Signos de agrupación
Son los que agrupan o delimitan operaciones entre números y los representan por los siguientes símbolos:

Paréntesis ( ) Corchetes [ ] Llaves { }

Operaciones con signos de agrupación
Para eliminar de un signo de agrupación, se multiplica por el número o signo que le antecede, en caso de que existan varios signos de agrupación se procede a suprimir de adentro hacia fuera.

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $-(-2+5)$ se obtiene:

a) -3 b) 3 c) 7 d) -7

Solución:

Se multiplican los elementos que están dentro del paréntesis por el signo que les antecede.

$$-(-2+5)=2-5=-3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado al simplificar $-3+[4-(5-3)]$ es:

a) 1 b) 5 c) -5 d) -1

Solución:

$$-3+[4-(5-3)]=-3+[4-5+3]=-3+4-5+3=-8+7=-1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La simplificación de $-3 + \{4 - 2\,[6 - 3 + 4(5 - 7)] + 3\}$ es:

a) -18 b) 14 c) -14 d) 18

Solución:

$$-3 + \{4 - 2\,[6 - 3 + 4(5 - 7)] + 3\} = -3 + \{4 - 2\,[6 - 3 + 20 - 28] + 3\} =$$
$$= -3 + \{4 - 12 + 6 - 40 + 56 + 3\}$$
$$= -3 + 4 - 12 + 6 - 40 + 56 + 3$$
$$= 69 - 55 = 14$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 4

Al simplificar la expresión $2 - \{-3 + 5 - [4 - 6 + (3 - 8) - (2 - 4)] - 2\}$, se obtiene:

a) 1 b) -1 c) -3 d) 3

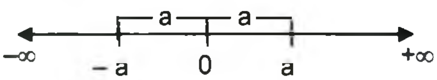
Solución:

$$2 - \{-3 + 5 - [4 - 6 + (3 - 8) - (2 - 4)] - 2\} = 2 - \{-3 + 5 - [4 - 6 + 3 - 8 - 2 + 4] - 2\}$$
$$= 2 - \{-3 + 5 - 4 + 6 - 3 + 8 + 2 - 4 - 2\}$$
$$= 2 + 3 - 5 + 4 - 6 + 3 - 8 - 2 + 4 + 2$$
$$= 18 - 21 = -3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Valor absoluto

El valor absoluto de todo número entero es la distancia que existe entre éste y el cero y se representa como $|a|$.



Ejemplos

a) $|5| = 5$ b) $|-2| = 2$

▶ **Operaciones que contienen valor absoluto**

Ejemplo 1

El resultado de $|5 - 8 + 3 - 1|$ es:

a) 1 b) -1 c) 17 d) -5

Solución:

Se simplifica la parte interna del valor absoluto

$$|5 - 8 + 3 - 1| = |-1|$$

se aplica la definición de valor absoluto.

$$|-1| = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 2

El resultado de $|-9 + 17| - |5 - 7|$ es:

a) -10 b) 10 c) 6 d) -6

Solución:

$$|-9 + 17| - |5 - 7| = |+8| - |-2| = 8 - 2 = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Máximo común divisor (MCD)
Es el mayor de los divisores que es común a dos o más números.

Ejemplo:

Obtener el MCD de 36, 30 y 18

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

Solución:

Se descomponen los números en factores primos hasta que no tengan un divisor primo en común.

36	30	18	2
18	15	9	3
6	5	3	

El máximo común divisor se obtiene multiplicando los números primos de la derecha.

$$MCD\ (36, 30, 10) = 2 \times 3 = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El máximo común divisor de 5, 6 y 8 es:

a) 1 b) 2 c) 120 d) 240

Solución:

Cuando los números no tienen ningún número primo en común, entonces el MCD. es la unidad, por tanto la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Mínimo común múltiplo (mcm)
Es el menor de los múltiplos que es común a dos o más números.

Ejemplo:

Obtener el mcm. de 36, 12 y 15

a) 3 b) 90 c) 120 d) 180

Solución:

Se descomponen simultáneamente los números en sus factores primos hasta que el cociente de cada uno de ellos sea la unidad.

36	12	15	2
18	6	15	2
9	3	15	3
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

El mínimo común múltiplo se obtiene multiplicando los números primos de la derecha.

$$mcm.\ (36, 12, 15) = 180$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Racionales

Conversión de fracción común a decimal

Dada la fracción común $\frac{a}{b}$, su equivalente en decimal se obtiene realizando la división

Ejemplo 1

La fracción decimal correspondiente a $\frac{1}{8}$ es:

a) 0.75 b) 0.125 c) 0.25 d) 0.375

Solución:

Se realiza la división

$$\begin{array}{r|l} & 0.125 \\ \hline 8 & 10 \\ & \ 20 \\ & \ \ 40 \\ & \ \ \ 0 \end{array}$$

Esto es:

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Conversión de fracción decimal a fracción común

Al convertir a fracción común una fracción decimal, está se coloca en el numerador sin punto decimal y en el denominador los números 10, 100, 1000, etc., si la fracción decimal se clasifica en décimos, centésimos, milésimos, etc., la fracción común resultante se simplifica si es posible.

Ejemplo 1

El número 0.325 en fracción común es:

a) $\frac{3}{40}$ b) $\frac{13}{20}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{13}{40}$

Solución:

Al transformar a fracción común se obtiene:

$$0.325 = \frac{325}{1000} = \frac{65}{200} = \frac{13}{40}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El número 1.02 es equivalente a:

a) $\frac{50}{51}$ b) $\frac{28}{25}$ c) $\frac{51}{50}$ d) $\frac{25}{28}$

Solución:

$$1.02 = \frac{102}{100} = \frac{51}{50}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Suma y resta

► **Fracciones con denominadores iguales**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-\frac{d}{b}=\frac{a+c-d}{b}$$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-\frac{5}{3}$ es:

a) $1\frac{1}{3}$ b) $2\frac{1}{3}$ c) $3\frac{1}{3}$ d) $4\frac{1}{3}$

Solución:

Los denominadores son iguales, entonces se realiza la operación con los numeradores.

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-\frac{5}{3}=\frac{4+8-5}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

► **Fracciones con denominadores diferentes**

Se obtiene el común denominador o mínimo común múltiplo de los denominadores, el cual se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador, los números que se obtienen se suman o se restan según sea el caso.

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}-\frac{1}{6}$ es:

a) $\frac{6}{1}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{6}{72}$ d) $\frac{21}{6}$

Solución:

Se obtiene el mínimo común múltiplo de 3, 4 y 6:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \qquad \text{mcm.} = 12$$

Por tanto, el común denominador de la fracción es 12

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{2(4)+5(3)-1(2)}{12}=\frac{8+15-2}{12}=\frac{21}{12}=\frac{7(3)}{4(3)}=\frac{7}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El resultado de $2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ es igual a:

a) $1\frac{1}{6}$ b) $2\frac{5}{6}$ c) $1\frac{5}{6}$ d) $2\frac{1}{6}$

Solución:

En el caso de los enteros, a éstos se les coloca la unidad como denominador y se realiza la operación.

$$2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2(6)+1(2)-1(3)}{6}=\frac{12+2-3}{6}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El resultado de $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} - 3\frac{3}{10}$ es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{2}{5}$

Solución:

Se convierten las fracciones mixtas a fracciones impropias y se realiza la operación.

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} - 3\frac{3}{10} = \frac{5}{2} + \frac{6}{5} - \frac{33}{10} = \frac{5(5) + 6(2) - 33(1)}{10} = \frac{25 + 12 - 33}{10} = \frac{37 - 33}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

- **Multiplicación**

Se aplica la propiedad:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 1

El resultado de $\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{6}{5}\right)$ es:

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{10}{9}$ d) $\frac{9}{5}$

Solución:

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, el resultado se simplifica si es posible.

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{(3)(6)}{(2)(5)} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

El resultado de $(3)\left(2\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{11}\right)$ es:

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{11}{5}$ d) $\frac{60}{121}$

Solución:

Los enteros se convierten en fracción colocando la unidad en el denominador y las fracciones mixtas se convierten a fracciones impropias, entonces

$$(3)\left(2\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{11}\right) = \left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{132}{55} = \frac{12}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

División

Se aplica la propiedad

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$ es:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{9}{5}$ d) $\frac{5}{4}$

Solución:

Se aplica la propiedad

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{(2)(6)}{(3)(5)} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de la operación $4\frac{2}{5} \div 2$ es:

a) $\frac{21}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{11}{5}$ d) $\frac{31}{5}$

Solución:

$$4\frac{2}{5} \div 2 = \frac{22}{5} \div \frac{2}{1} = \frac{(22)(1)}{(5)(2)} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El resultado de la operación $\frac{3}{\frac{1}{2}}$ es:

a) 9 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 6

Solución:

La fracción contiene un entero en el numerador, el cual se transforma a fracción y se realiza la división.

$$\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{(3)(2)}{(1)(1)} = \frac{6}{1} = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

c) Fracciones complejas

Se le llama fracción compleja a aquélla que está formada por operaciones subsecuentes entre fracciones.

Ejemplo 1

Al simplificar la siguiente expresión $\dfrac{2+\dfrac{1}{3}}{2-\dfrac{1}{3}}$, se obtiene:

a) 1 b) $\dfrac{7}{5}$ c) 3 d) $\dfrac{5}{7}$

Solución:

Se identifican las operaciones secundarias, las cuales se resolverán primero.

$$\frac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{1}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{1}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6+1}{3}}{\frac{6-1}{3}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{(3)(7)}{(3)(5)}=\frac{7}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La simplificación de $\left(1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}\right)$ es:

a) –1 b) 2 c) –2 d) 1

Solución:

$$\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)=\left(1+\frac{1}{\frac{2-1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{2+1}{2}}\right)=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)=(1+2)\left(1-\frac{2}{3}\right)=(3)\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

La solución corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Al simplificar la expresión $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}$, se obtiene:

a) 5 b) $\dfrac{1}{5}$ c) $-\dfrac{1}{5}$ d) –5

Solución:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{3-2}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=\frac{(6)(5)}{(6)(1)}=\frac{30}{6}=5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Razones y proporciones

► Razón

Es el cociente de dos cantidades, donde al numerador se le llama antecedente y al denominador, consecuente.

Ejemplo:

En la razón $\frac{2}{3}$ ó 2 : 3, el número 2 se llama antecedente y el número 3 consecuente.

► Proporción

Se denomina proporción a la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \text{o} \qquad a:b::c:d$$

Se lee: "a" es a "b", como "c" es a "d".

► Términos de una proporción

En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, "a" y "d" reciben el nombre de extremos, "b" y "c" medios.

Ejemplo 1

El valor de "x" en la proporción $\frac{x}{3}=\frac{12}{4}$ es:

a) 9 b) 8 c) 11 d) 12

Solución:

En toda proporción, el valor de un extremo equivale al producto de los medios divido por el extremo restante.

$$\frac{x}{3}=\frac{12}{4} \quad \rightarrow \quad x=\frac{(3)(12)}{4}=\frac{36}{4}=9$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El valor de "y" en la proporción $\frac{7}{y}=\frac{10}{2}$ es:

a) 35 b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{1}{35}$

Solución:

En toda proporción, el valor de un medio equivale al producto de los extremos dividido por el medio restante.

$$\frac{7}{y}=\frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad y=\frac{(7)(2)}{10}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de "m" en la proporción $\frac{14}{4}=\frac{21}{m}$ es:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Solución:

$$\frac{14}{4}=\frac{21}{m} \quad \rightarrow \quad m=\frac{4(21)}{(14)}=\frac{84}{14}=\frac{42}{7}=6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Proporción directa o regla de tres directa

Una proporción es directa si al aumentar o disminuir una de las cantidades, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

► **Definición**

Si "m" es a "n" como "c" es a "d", entonces $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$

Ejemplo 1

Si se compran 25 dulces con $12, ¿cuántos se pueden comprar con $36.00?

a) 12 b) 50 c) 75 d) 100

Solución:

La proporción es directa, ya que con más dinero se compran mayor número de dulces.

Se establece la proporción: 25 dulces es a $12.00 como "x" es a $36.00, entonces,

$$\frac{25}{12} = \frac{x}{36} \quad \rightarrow \quad x = \frac{(25)(36)}{12} = \frac{900}{12} = 75$$

Por tanto, se pueden comprar 75 dulces y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Un comerciante vende un artículo en $112.00, y gana el 40% sobre el costo de éste. ¿Cuál es el costo de dicho artículo?

a) $80.00 b) $78.40 c) $70.00 d) $33.60

Solución:

Sea "x" el costo del artículo que representa el 100% y $112 el 140%, entonces,

$$\frac{x}{100} = \frac{112}{140} \quad \rightarrow \quad x = \frac{(112)(100)}{140} = \frac{11200}{140} = \$\,80$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Proporción inversa o regla de tres inversa

Una proporción es inversa si al aumentar una de las cantidades, la otra disminuye en la misma proporción y viceversa.

► **Definición**

Si "m" es a "n", como "c" es a "d", entonces $m \cdot n = c \cdot d$.

Ejemplo 1

Un auto viaja a razón de 60 $\frac{km}{hr}$ y tarda tres horas en ir de una ciudad a otra. ¿A qué velocidad debe regresar para cubrir dicha distancia en dos hrs?

a) 30 km/hr b) 45 km/hr c) 120 km/hr d) 90 km/hr

Solución:

La proporción es inversa, ya que a mayor velocidad menos tiempo tardará en recorrer cierta distancia.

Se establece la proporción: 60 $\frac{km}{hr}$ es a tres horas como "x" es a dos hrs, entonces,

$$(60)(3) = 2x \quad \rightarrow \quad x = \frac{(60)(3)}{2} = \frac{180}{2} = 90\ \frac{km}{hr}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Polinomios

a) Terminología y notación

Término algebraico
Es la mínima expresión que se utiliza para generalizar una cantidad, se denomina también monomio y tiene como elementos: coeficiente(s), base(s) y exponente(s).

Ejemplos:

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
x	1	x	1
$2m^3$	2	m	3
$-4x^2y^5$	– 4	x, y	2, 5
$\frac{1}{3}ab^2$	$\frac{1}{3}$	a, b	1, 2

Expresiones algebraicas

Se dividen en monomios y polinomios, y de acuerdo al número de términos algebraicos que los conforman reciben un nombre.

Ejemplos:

Expresión algebraica	Nombre
$-2xy^3$	Monomio
$2x+3y$	Binomio
$a^2+2ab+3b^2$	Trinomio
$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	Polinomio

Lenguaje algebraico

Expresa oraciones de lenguaje común en términos algebraicos.

Ejemplo 1

La representación matemática del enunciado “El doble de x” es:

a) x^2 b) $2x$ c) $\frac{x}{2}$ d) $x+2$

Solución:

El enunciado: “El doble de x” significa que “x” se multiplica por 2, entonces la representación matemática es:

$$2x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 2

La representación matemática de "La tercera parte de c disminuido en el cuadrado de b" es:

Solución:

Oración	Representación matemática
La tercera parte de c.	$\frac{c}{3}$
El cuadrado de b.	b^2

Por tanto, el enunciado "La tercera parte de c disminuido en el cuadrado de b" en su forma matemática, es:

$$\frac{c}{3} - b^2$$

Ejemplo 3

La representación matemática del enunciado "El cociente de la suma del triple de un número y el quíntuplo de otro entre el cuadrado de la suma de dichos números" es:

Solución:

Oración	Representación matemática
La suma del triple de un número y el quíntuplo de otro.	$3x + 5y$
El cuadrado de la suma de dichos números.	$(x + y)^2$

Por tanto:

"El cociente de la suma del triple de un número y el quíntuplo de otro entre el cuadrado de la suma de dichos números", se expresa como:

$$\frac{3x + 5y}{(x + y)^2}$$

Ejemplo 4

Al expresar en lenguaje algebraico la oración: "La suma del cubo del producto de dos números con la tercera parte de otro".

Solución:

Oración	Expresión matemática
El producto de dos números.	xy
El cubo del producto de dos números.	$(xy)^3$
La tercera parte de otro.	$\frac{1}{3}z$

Por tanto:

"La suma del cubo del producto de dos números con la tercera parte de otro" se expresa como:

$$(xy)^3 + \frac{1}{3}z$$

b) Operaciones

► **Suma de polinomios**

Al sumar dos o más polinomios se simplifican los términos semejantes entre éstos.

Ejemplo 1

El resultado de $(4a^2 - 5a + 7) + (-2a^2 + 3a - 4)$ es:

a) $2a^2 - 2a + 3$ b) $2a^2 + 2a + 3$ c) $2a^2 - 2a - 3$ d) $2a^2 + 2a - 3$

Solución:

Se acomodan los términos semejantes en forma vertical pero se respetan los signos de los términos algebraicos que forman cada uno de los polinomios. Se procede a simplificar los términos algebraicos.

$$\begin{array}{r} 4a^2 - 5a + 7 \\ \underline{-2a^2 + 3a - 4} \\ 2a^2 - 2a + 3 \end{array}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La suma de $8x + 7y - 11$ con $-5y + 12x - 2 + 3z$ es:

a) $3x + 19y - 13 + 3z$ b) $20x - 2y + 13 - 3z$ c) $3x + 19y + 13 + 3z$ d) $20x + 2y - 13 + 3z$

Solución:

Esta operación se realiza también de manera horizontal agrupando los términos semejantes y simplificando al máximo.

$$8x + 7y - 11 - 5y + 12x - 2 + 3z = 8x + 12x + 7y - 5y - 11 - 2 + 3z = 20x + 2y - 13 + 3z$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El resultado de $\left(\frac{2}{5}x^2 - xy + \frac{1}{3}y^2\right) + \left(2x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2\right)$ es:

a) $\frac{12}{5}x^2 - 2xy + \frac{7}{12}y^2$ b) $\frac{12}{5}x^2 + 2xy - \frac{7}{12}y^2$ c) $\frac{12}{5}x^2 + 2xy + \frac{7}{12}y^2$ d) $\frac{12}{5}x^2 - 2xy - \frac{7}{12}y^2$

Solución:

Se agrupan y reducen los términos semejantes

$$\frac{2}{5}x^2 - xy + \frac{1}{3}y^2 + 2x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(\frac{2}{5} + 2\right)x^2 + (3 - 1)\,xy + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)y^2 = \frac{12}{5}x^2 + 2xy + \frac{7}{12}y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

▶ Resta de polinomios

Se identifica el minuendo y el sustraendo para realizar la operación:

Minuendo – Sustraendo

Se cambia el signo a cada uno de los elementos del polinomio, al cual le antecede el signo menos.

Ejemplo 1

El resultado de $(4x + 3y - 5) - (2x + y - 3)$ es:

a) $2x - 2y - 2$ b) $2x + 2y - 2$ c) $2x + 2y + 2$ d) $2x - 2y + 2$

Solución:

Se eliminan los paréntesis y se simplifican los términos semejantes.

$$(4x + 3y - 5) - (2x + y - 3) = 4x + 3y - 5 - 2x - y + 3 = (4 - 2)\,x + (3 - 1)\,y + (3 - 5)$$
$$= 2x + 2y - 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Si a $x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ se resta $2x^2 - 6x + 1$, se obtiene:

a) $x^3 + x + 6$ b) $x^3 + x^2 + x + 6$ c) $x^3 - x + 6$ d) $x^3 - x^2 + x + 6$

Solución:

Se realiza la operación.

$$(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (2x^2 - 6x + 1) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 2x^2 + 6x - 1 = x^3 + (2 - 2)\,x^2 + (-5 + 6)\,x + (7 - 1)$$
$$= x^3 + 0x^2 + x + 6$$
$$= x^3 + x + 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al restar $2x + 3y - 1$ de $5x - 7y + 7$, se obtiene:

a) $3x - 10y - 8$ b) $3x + 10y - 8$ c) $3x + 10y + 8$ d) $3x - 10y + 8$

Solución:

Se realiza la operación.

$$(5x - 7y + 7) - (2x + 3y - 1) = 5x - 7y + 7 - 2x - 3y + 1 = 3x - 10y + 8$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Multiplicación de polinomios

Para realizar esta operación se consideran la regla de los signos en multiplicación y la ley de los exponentes para el producto de bases iguales.

Regla de los signos

(+)(+) = +   (–)(–) = +   (+)(–) = –   (–)(+) = –

Ley de los exponentes

Cuando se multiplican bases iguales, la base permanece y los exponentes se suman.

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Monomio por monomio

Ejemplo 1

El resultado de $(x^6)(x^2)$ es:

a) $2x^8$ b) $2x^{12}$ c) x^{12} d) x^8

Solución:

Aplicando la ley de los exponentes para el producto de bases iguales.

$$(x^6)(x^2) = x^{6+2} = x^8$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

El resultado de $(-3x^2y^3)(4xy^2)$ es:

a) $12x^3y^5$ b) $-12x^3y^5$ c) $-12x^2y^6$ d) $12x^2y^6$

Solución:

Se realiza el producto de los signos y los coeficientes, y se suman los exponentes para cada base que se repita.

$$(-3x^2y^3)(4xy^2) = (-3)(4)\,x^{2+1}\,y^{3+2} = -12x^3y^5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 3

El resultado de $\left(-\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{3}{2}xy^2\right)$ es:

a) $\frac{3}{4}x^4y^2$ b) $-\frac{3}{4}x^4y^2$ c) $\frac{3}{4}x^3y^2$ d) $-\frac{3}{4}x^3y^2$

Solución:

$$\left(-\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{3}{2}xy^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{3+1}y^2 = \frac{3}{4}x^4y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 4

El resultado de $(2x)(-3x^2)(-4x^3)$ es:

a) $-24x^6$ b) $12x^6$ c) $-12x^6$ d) $24x^6$

Solución:

$$(2x)(-3x^2)(-4x^3) = (2)(-3)(-4)\,x^{1+2+3} = 24x^6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Monomio por polinomio

Se determina el producto del monomio con cada uno de los términos algebraicos que conforman el polinomio.

Ejemplo 1

El resultado de $2x^2(x^2 + 3x - 4)$ es:

a) $2x^4 + 6x^2 - 8$ b) $2x^4 - 6x^3 - 8x^2$ c) $2x^4 + 6x^3 - 8x^2$ d) $2x^4 - 6x^2 + 8$

Solución:

$$2x^2(x^2 + 3x - 4) = 2x^2(x^2) + 2x^2(3x) + 2x^2(-4) = 2x^{2+2} + 6x^{2+1} - 8x^2$$
$$= 2x^4 + 6x^3 - 8x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado al multiplicar $-3xy$ con $2x^3 - 5xy^2 + 6y^4$ es:

a) $6x^4y + 15x^2y^3 - 18xy^5$ c) $-6x^4y + 15x^2y^3 + 18xy^5$

b) $-6x^4y + 15x^2y^3 - 18xy^5$ d) $6x^4y - 15x^2y^3 - 18xy^5$

Solución:

Se realiza la operación

$$-3xy(2x^3 - 5xy^2 + 6y^4) = -3xy(2x^3) - 3xy(-5xy^2) - 3xy(6y^4) = -6x^4y + 15x^2y^3 - 18xy^5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Polinomio por polinomio

Cada uno de los elementos del primer polinomio multiplica al segundo polinomio, los elementos que resulten términos semejantes se simplifican.

Ejemplo 1

El resultado de $(2x + 5y)(3x - 7y)$ es:

a) $6x^2 + xy - 35y^2$ b) $6x^2 - xy - 35y^2$ c) $6x^2 + xy + 35y^2$ d) $-6x^2 + xy - 35y^2$

Solución:

$$(2x + 5y)(3x - 7y) = 2x(3x - 7y) + 5y(3x - 7y) = 6x^2 - 14xy + 15xy - 35y^2$$
$$= 6x^2 + xy - 35y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El producto de $x^2 + 3x - 2$ con $x^3 - 5x^2$ es:

a) $x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 10x^2$ c) $x^5 - 2x^4 + 17x^3 + 10x^2$

b) $x^5 - 2x^4 - 17x^3 + 10x^2$ d) $x^5 + 2x^4 - 17x^3 - 10x^2$

Solución:

Se realiza la operación de la siguiente manera:

$$(x^2 + 3x - 2)(x^3 - 5x^2) = x^2(x^3 - 5x^2) + 3x(x^3 - 5x^2) - 2(x^3 - 5x^2) = x^5 - 5x^4 + 3x^4 - 15x^3 - 2x^3 + 10x^2$$
$$= x^5 - 2x^4 - 17x^3 + 10x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

► División de polinomios

Para realizar esta operación se consideran las leyes de los signos para la división y la ley de los exponentes para la división de bases iguales.

Leyes de los signos

$$\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = -$$

Ley de los exponentes

Si se dividen bases iguales, la base permanece y al exponente del numerador se resta el exponente del denominador.

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \text{ para todo } x \neq 0$$

Monomio entre monomio

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{-108x^6}{-12x^2}$ es:

a) $-9x^4$ b) $4x^4$ c) $9x^4$ d) $-4x^4$

Solución:

$$\frac{-108x^6}{-12x^2} = \frac{-108}{-12}x^{6-2} = 9x^4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado de $\frac{12x^3y^5}{-4x^2y^3}$ es:

a) $3xy^2$ b) $-3x^2y$ c) $3x^2y$ d) $-3xy^2$

Solución:

$$\frac{12x^3y^5}{-4x^2y^3} = \frac{12}{-4}x^{3-2}y^{5-3} = -3xy^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El resultado de $\frac{18a^3b^5c^2}{10a^2b^5}$ es:

a) $\frac{9}{5}abc^2$ b) $\frac{9}{5}a^2c^2$ c) $\frac{9}{5}ac^2$ d) $\frac{9}{5}ab$

Solución:

La división de coeficientes no es exacta, entonces se simplifica la fracción.

$$\frac{18a^3b^5c^2}{10a^2b^5} = \frac{18}{10}a^{3-2}b^{5-5}c^2 = \frac{9}{5}ab^0c^2 = \frac{9}{5}ac^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Polinomio entre monomio

Se divide cada uno de los elementos del polinomio por el monomio.

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{4x^3+8x^2-12x}{4x}$ es:

a) x^2-2x-3 b) x^2+2x+3 c) x^2-2x+3 d) x^2+2x-3

Solución:

$$\frac{4x^3+8x^2-12x}{4x}=\frac{4x^3}{4x}+\frac{8x^2}{4x}-\frac{12x}{4x}=\frac{4}{4}x^{3-1}+\frac{8}{4}x^{2-1}-\frac{12}{4}x^{1-1}$$
$$=1x^2+2x-3x^0$$
$$=x^2+2x-3(1)$$
$$=x^2+2x-3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El cociente de $\frac{-12x^4y^3+15x^2y^6-20x^5y}{-6x^2y}$ es:

a) $2x^2y^2-\frac{5}{2}y^5+\frac{10}{3}x^3$ c) $2x^2y^2+\frac{5}{2}y^5-\frac{10}{3}x^3$

b) $2x^2y^2-\frac{5}{2}xy^5+\frac{10}{3}x^3y$ d) $2x^2y^2+\frac{5}{2}xy^5-\frac{10}{3}x^3y$

Solución:

$$\frac{-12x^4y^3+15x^2y^6-20x^5y}{-6x^2y}=\frac{-12x^4y^3}{-6x^2y}+\frac{15x^2y^6}{-6x^2y}-\frac{20x^5y}{-6x^2y}=\frac{12}{6}x^{4-2}y^{3-1}-\frac{15}{6}x^{2-2}y^{6-1}+\frac{20}{6}x^{5-2}y^{1-1}$$
$$=2x^2y^2-\frac{5}{2}x^0y^5+\frac{10}{3}x^3y^0$$
$$=2x^2y^2-\frac{5}{2}(1)y^5+\frac{10}{3}x^3(1)$$
$$=2x^2y^2-\frac{5}{2}y^5+\frac{10}{3}x^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El cociente de $\frac{3a^2b^3+6a^4b^2-9a^5b}{-3a^2b}$ es:

Solución:

$$\frac{3a^2b^3+6a^4b^2-9a^5b}{-3a^2b}=\frac{3a^2b^3}{-3a^2b}+\frac{6a^4b^2}{-3a^2b}-\frac{9a^5b}{-3a^2b}=-\frac{3}{3}a^{2-2}b^{3-1}-\frac{6}{3}a^{4-2}b^{2-1}+\frac{9}{3}a^{5-2}b^{1-1}$$
$$=-1a^0b^2-2a^2b+3a^3b^0$$

Pero todo número elevado a la cero es la unidad, entonces:

$$=-1(1)b^2-2a^2b+3a^3(1)$$
$$=-b^2-2a^2b+3a^3$$

Polinomio entre polinomio

Se ordenan de manera decreciente, los términos del dividendo y del divisor, se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, el cociente que se obtiene se multiplica por el divisor, el resultado se resta del dividendo y así sucesivamente hasta obtener un residuo cero u otro cuyo grado sea menor que el grado del divisor.

$$\begin{array}{r|l} & \text{cociente} \\ \hline \text{divisor} & \text{dividendo} \\ & \text{residuo} \end{array}$$

Ejemplo 1

El cociente de $\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$ es:

a) $x-2$ b) $x+3$ c) $x-3$ d) $x+2$

Solución:

Se acomodan tanto dividendo como divisor y se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x+3 & x^2+5x+6 \\ & \underline{-x^2-3x} \\ & \quad\; 2x+6 \\ & \quad\; \underline{-2x-6} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

El cociente es (x + 2), por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El cociente de $\dfrac{3x^2+5x+2}{x+1}$ es:

a) $3x+2$ b) $3x-2$ c) $3x+1$ d) $3x-1$

Solución:

Se acomoda el dividendo y el divisor:

$$\begin{array}{r|l} & 3x+2 \\ \hline x+1 & 3x^2+5x+2 \\ & \underline{-3x^2-3x} \\ & \qquad 2x+2 \\ & \qquad \underline{-2x-2} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

El cociente es 3x + 2, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El cociente de $\dfrac{8x^3+y^3}{2x+y}$ es:

a) $4x^2+y^2$ b) $4x^2+2xy+y^2$ c) $4x^2-2xy+y^2$ d) $4x^2-y^2$

Solución:

Se realiza la división y se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2-2xy+y^2 \\ \hline 2x+y & 8x^3+y^3 \\ & \underline{-8x^3-4x^2v} \\ & \quad -4x^2y+y^3 \\ & \quad \underline{4x^2y+2xy^2} \\ & \qquad\quad 2xy^2+y^3 \\ & \qquad\quad \underline{-2xy^2-y^3} \\ & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

El cociente es ($4x^2-2xy+y^2$), la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Transformaciones algebraicas

a) Productos notables

Aquellos productos que se resuelven con la ayuda de reglas y evitan efectuar todo el producto, se conocen como "productos notables".

Binomio al cuadrado

Al elevar un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto.

Regla:

- Se eleva al cuadrado el primer término del binomio.
- Se suma o resta el doble producto del primer término por el segundo término del binomio.
- Se suma el cuadrado del segundo término del binomio.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplo 1

El desarrollo de $(m + 5)^2$ es:

a) $m^2 + 5$ b) $m^2 + 25$ c) $m^2 + 2m + 10$ d) $m^2 + 10m + 25$

Solución:

– El cuadrado del primer término: $(m)^2 = m^2$

– El doble producto del primer término por el segundo: $2(m)(5) = 10m$

– El cuadrado del segundo término: $(5)^2$

Se realiza la suma de los términos, entonces:

$$(m + 5)^2 = m^2 + 10m + 25$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado del desarrollo de $(7 - x)^2$ es:

a) $49 - x^2$ b) $49 + x^2$ c) $x^2 - 14x + 49$ d) $49 + 14x + x^2$

Solución:

Se desarrolla el binomio al cuadrado

$$(7 - x)^2 = (7)^2 - 2(7)(x) + (x)^2 = 49 - 14x + x^2$$

Se ordena el trinomio y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El resultado de desarrollar $(n^2 - 10)^2$ es:

a) $n^4 - 20n^2 + 100$ b) $n^2 - 20n + 100$ c) $n^2 - 100$ d) $n^2 + 20$

Solución:

$$(n^2 - 10)^2 = (n^2)^2 - 2(n^2)(10) + (10)^2 = n^4 - 20n^2 + 100$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Binomios conjugados

Son aquellos que tienen los mismos elementos, pero uno de ellos de signo contrario y su resultado es una diferencia de cuadrados.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Regla:

– Se eleva al cuadrado el término que no cambia de signo.

– Se resta el cuadrado del término que cambia de signo.

Ejemplo 1

El desarrollo de $(b + 8)(b - 8)$ es:

a) $b^2 - 16b + 64$ b) $b^2 - 64$ c) $b^2 + 8b + 64$ d) $b^2 + 64$

Solución:

– Se eleva al cuadrado el primer término: $(b)^2 = b^2$

– Se eleva al cuadrado el término que cambia de signo: $(8)^2 = 64$

– Se realiza la diferencia de ambos términos: $b^2 - 64$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al desarrollar $(2a - 1)(1 + 2a)$, se obtiene:

a) $4a^2 - 1$ b) $4a^2 + 2$ c) $1 - 4a + 4a^2$ d) $1 - 4a^2$

Solución:

Se ordenan los términos de los binomios:

$$(2a - 1)(2a + 1) = (2a)^2 - (1)^2 = 4a^2 - 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right)$ es:

a) $4x^2 + \frac{1}{4}$ b) $4x^2 - \frac{1}{4}$ c) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Solución:

Se emplea la regla de la diferencia de cuadrados:

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right) = (2x)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 - \frac{1}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

El desarrollo de $(-3x - 2)(3x - 2)$ es:

a) $4 - 12x + 9x^2$ b) $4 - 9x^2$ c) $9x^2 - 4$ d) $4 + 12x + 9x^2$

Solución:

Se acomodan los elementos de los binomios y se aplica la regla de diferencia de cuadrados:

$$(-2 - 3x)(-2 + 3x) = (-2)^2 - (3x)^2 = 4 - 9x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Binomios con término común

Son aquellos binomios que se encuentran en un producto y ambos tienen un término que se repite.

Regla:

– Se eleva al cuadrado el término común.

– Se suman algebraicamente los términos no comunes y se multiplican por el término en común.

– Se suma el producto algebraico de los dos términos no comunes.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo 1

El desarrollo de $(x + 8)(x + 5)$ es:

a) $x^2 + 40x + 13$ b) $x^2 + 13x + 40$ c) $x^2 + 40$ d) $x^2 + 13$

Solución:

$$(x + 8)(x + 5) = (x)^2 + (8 + 5)x + (8)(5) = x^2 + 13x + 40$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al desarrollar $(x + 9)(x - 10)$, se obtiene:

a) $x^2 + x - 90$ b) $x^2 - 90$ c) $x^2 - 1$ d) $x^2 - x - 90$

Solución:

$$(x + 9)(x - 10) = (x)^2 + (9 - 10)x + (9)(-10) = x^2 + (-1)x - 90 = x^2 - x - 90$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Al desarrollar $\left(3x - \frac{1}{2}\right)(2 + 3x)$ se obtiene:

a) $9x^2 - 1$ b) $3x^2 + \frac{9}{2}x - 1$ c) $9x^2 + \frac{9}{2}x - 1$ d) $9x^2 + 1$

Solución:

Se ordenan los binomios, y se da prioridad a los términos que ambos binomios tienen en común:

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)(3x + 2)$$

Se realiza el producto con las reglas dadas:

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)(3x + 2) = (3x)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2\right)(3x) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2) = 9x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)(3x) + \left(-\frac{2}{2}\right)$$

$$= 9x^2 + \frac{9}{2}x + (-1)$$

$$= 9x^2 + \frac{9}{2}x - 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Binomio al cubo

Es de la forma:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Regla:
- El cubo del primer término.
- Más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo.
- Más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo.
- Más el cubo del segundo término.

Ejemplo 1

El desarrollo de $(a + 2)^3$ es:

a) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

b) $a^3 - 9a^2 + 12a - 8$

c) $a^3 + 9a^2 + 12a + 8$

d) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

Solución:

$$(a + 2)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(2) + 3(a)(2)^2 + (2)^3 = a^3 + 3a^2(2) + 3a(4) + (8) = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El desarrollo de $(x - 3)^3$ es:

a) $x^3 - 6x^2 + 18x - 27$

b) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

c) $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$

d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

Solución:

$$(x - 3)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-3) + 3(x)(-3)^2 + (-3)^3 = x^3 + 3x^2(-3) + 3x(9) + (-27) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Binomio de Newton

Dado $(a + b)^n$ su desarrollo es:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + b^n$$

Donde

$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (r-1) \cdot r$ → (número factorial)

I – esimo término

El i – esimo término se define:

$$i - \text{esimo} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}b^{i-1}$$

Ejemplo 1

Al desarrollar $(a + 1)^4$ se obtiene:

a) $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

b) $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1$

c) $a^4 + 1$

d) $a^4 - 1$

Solución:

$$(a + 1)^4 = (a)^4 + 4(a)^{4-1}(1) + \frac{4(4-1)}{2!}(a)^{4-2}(1)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(a)^{4-3}(1)^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}(a)^{4-4}(1)^4$$

$$= a^4 + 4a^3 + \frac{4(3)}{2}a^2 + \frac{4(3)(2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}a + \frac{4(3)(2)(1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}a^0$$

$$= a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Al desarrollar $(2x + y)^5$ se obtiene:

a) $32x^5 + y^5$

b) $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$

c) $32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

d) $32x^5 - y^5$

Solución:

$$(2x + y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^{5-1}(y) + \frac{5(5-1)}{2!}(2x)^{5-2}(y)^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(2x)^{5-3}(y)^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}(2x)^{5-4}(y)^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}(2x)^{5-5}(y)^5$$

$$= (2x)^5 + 5(2x)^4(y) + \frac{5(4)}{2\cdot 1}(2x)^3(y)^2 + \frac{5(4)(3)}{3\cdot 2\cdot 1}(2x)^2(y)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x)^1(y)^4 + \frac{5(4)(3)(2)(1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(2x)^0(y)^5$$

$$= 32x^5 + 5(16x^4)y + 10(8x^3)y^2 + 10(4x^2)y^3 + 5(2x)y^4 + (1)(1)y^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 3

El 4° término de $(3x^2 - y)^4$ es:

a) $-12x^3y^2$ b) $54x^4y^2$ c) y^4 d) $-12x^2y^3$

Solución:

$$i-\text{esimo} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}\,b^{i-1}$$

$$i-\text{esimo} = \frac{4(4-1)(4-2)}{(4-1)!}(3x^2)^{4-4+1}(-y)^{4-1} = \frac{4(3)(2)}{3!}(3x^2)^1(-y)^3 = \frac{4(3)(2)}{3\cdot 2\cdot 1}(3x^2)(-y^3)$$

$$= 4(3x^2)(-y^3)$$

$$= -12x^2y^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 4

El 6° término del desarrollo de $(x^2 + 2y^3)^8$ es:

a) $1792\,x^4y^{18}$ b) $1120\,x^8y^{12}$ c) $1792\,x^6y^{15}$ d) $64\,x^{12}y^6$

Solución:

$$i-\text{esimo} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-i+2)}{(i-1)!}a^{n-i+1}\,b^{i-1}$$

$$i-\text{esimo} = \frac{8(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)}{(6-1)!}(x^2)^{8-6+1}(2y^3)^{6-1} = \frac{8(7)(6)(5)(4)}{5!}(x^2)^3(2y^3)^5$$

$$= \frac{8(7)(6)(5)(4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}(x^6)(32y^{15})$$

$$= 56(x^6)(32y^{15})$$

$$= 1792\,x^6y^{15}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

b) Factorización

Es el proceso algebraico por medio del cual se transforma una suma o diferencia de términos algebraicos en un producto.

Factor común

Para obtener el factor común de un polinomio, se obtiene el máximo común divisor de los coeficientes y la literal o literales con menor exponente que se repita en cada uno de los términos algebraicos del polinomio a factorizar.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $3x^2 + 6x$ es:

a) $3(x^2 + 6x)$ b) $3x(x + 2)$ c) $x(3x^2 + 6)$ d) $3x^2(1 + 2x)$

Solución:

- Se obtiene el MCD de los coeficientes 3 y 6, el cual es "3".
- La literal que se repite en los términos del polinomio de menor exponente es "x".
- El factor común es "3x".
- Se divide cada uno de los elementos del polinomio por el factor común: $\frac{3x^2}{3x} = x$; $\frac{6x}{3x} = 2$

La factorización es:

$$3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $2x + 4$ es:

a) $2(x + 4)$ b) $4(x + 1)$ c) $2(x + 2)$ d) $x(2 + 4x)$

Solución:

Se comprueban las multiplicaciones de cada inciso:

a) $2(x + 4) = 2x + 8$

b) $4(x + 1) = 4x + 4$

c) $2(x + 2) = 2x + 4$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Al factorizar $24m^3 + 16m^2 - 4m$ se obtiene:

a) $4m(6m^2 + 4m)$ b) $4m(6m^2 + 4m - 1)$ c) $4m(8m^2 + 8m - 4)$ d) $4m(6m^3 + 4m^2 - 1)$

Solución:

– Se obtiene el MCD de los coeficientes 24, 16 y 4 , el cual es "4".

– La literal que se repite en cada uno de los términos del polinomio con menor exponente es "m".

– El factor común es "4m".

La factorización es:

$$24m^3 + 16m^2 - 4m = 4m\,(6m^2 + 4m - 1)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Factor común por agrupación
Los términos del polinomio que se van a factorizar, se agrupan conforme aquellos que tengan un factor en común, de modo que la nueva expresión se pueda factorizar.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $m^2 + mp + mx + px$ es:

a) $m(m + p) + x(m + p)$ c) $m(m + p) + p(m + p)$

b) $m(m + x) + x(m + x)$ d) $p(m + p) + x(m + x)$

Solución:

Los términos del polinomio se agrupan:

$$m^2 + mp + mx + px = (m^2 + mp) + (mx + px)$$

Cada una de las nuevas expresiones se factorizan por factor común:

$$m(m + p) + x(m + p)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $7x - 1 - 7xy + y$ es:

a) $(7x - 1)(1 + y)$ b) $(7x - 1)(1 - y)$ c) $(7x + 1)(1 + y)$ d) $(7x + y)(1 - y)$

Solución:

La expresión equivalente es: $(7x - 7xy) + (-1 + y) = 7x(1 - y) - 1(1 - y) = (1 - y)(7x - 1)$

La respuesta correcta es el inciso "b".

Diferencia de cuadrados
Una diferencia de cuadrados tiene la forma $x^2 - y^2$ y su factorización es el producto de binomios conjugados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Ejemplo 1

La factorización de $4x^2 - 9$ es:

a) $(2x + 3)(2x + 3)$ b) $(2x - 3)(2x - 3)$ c) $(2x - 3)(2x + 3)$ d) $(3 - 2x)(2x + 3)$

Solución:

Se obtiene la raíz de cada uno de los elementos del binomio:

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9} = 3$$

Se agrupan en forma de binomios conjugados

$$(2x + 3)(2x - 3)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $m^2 - \frac{n^2}{4}$ es:

a) $\left(m + \frac{n}{2}\right)\left(m + \frac{n}{2}\right)$ b) $\left(m - \frac{n}{2}\right)\left(m - \frac{n}{2}\right)$ c) $\left(m + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} - m\right)$ d) $\left(m + \frac{n}{2}\right)\left(m - \frac{n}{2}\right)$

Solución:

$$m^2 - \frac{n^2}{4} = \left(m + \frac{n}{2}\right)\left(m - \frac{n}{2}\right)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es el resultado del desarrollo de un binomio al cuadrado.

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

Ejemplo 1

Al factorizar $m^2 + 12m + 36$, se obtiene:

a) $(m + 18)^2$ b) $(m + 9)^2$ c) $(m + 6)^2$ d) $(m + 3)^2$

Solución:

Se ordenan los términos del trinomio en forma descendente con respecto a una de las literales, de manera que en los extremos se encuentren expresiones con raíz cuadrada exacta.

$$m^2 + 12m + 36$$

Se obtiene la raíz del 1er y 3er términos:

$$\sqrt{m^2} = m \quad \text{y} \quad \sqrt{36} = 6$$

Se realiza el doble producto de las raíces obtenidas:

$$2(m)(6) = 12m$$

El resultado coincide con el término central del trinomio, entonces es un trinomio cuadrado perfecto. Por último, se agrupan las raíces en un binomio al cuadrado y se coloca el signo del término central (+).

$$(m + 6)^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor de "n", para que la expresión $x^2 + nx + 25$ sea trinomio cuadrado perfecto, es:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20

Solución:

Se obtienen las raíces de los extremos

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{y} \quad \sqrt{25} = 5$$

Para que sea trinomio cuadrado perfecto el término central es el doble producto de las raíces "x" y "5"

$$2(x)(5) = 10x$$

Por tanto, n = 10, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $m^2 + 81n^2 - 18mn$ es:

a) $(m + 9n)^2$ b) $(m - 9n)^2$ c) $(m - 6n)^2$ d) $(m + 3n)^2$

Solución:

- Se ordena el trinomio $m^2 - 18mn + 81n^2$.
- Se obtienen las raíces de los extremos y se multiplican por 2: $2(m)(9n) = 18mn$.
- La factorización de $m^2 - 18mn + 81n^2$ es $(m - 9n)^2$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, se obtiene al desarrollar el producto de dos binomios con término común.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $x^2 + 7x + 12$ es:

a) $(x - 4)(x - 3)$ b) $(x + 6)(x + 2)$ c) $(x + 12)(x + 1)$ d) $(x + 4)(x + 3)$

Solución:

Se ordenan de manera descendente, los términos que forman el trinomio con respecto a los exponentes de una de las literales, de manera que el primer término tenga raíz cuadrada exacta.

$$x^2 + 7x + 12$$

Se obtiene la raíz cuadrada del término cuadrático, la cual se coloca en dos binomios:

$$x^2 + 7x + 12 = (x \quad)(x \quad)$$

El primer binomio lleva el signo del segundo término del trinomio (+) y el segundo binomio lleva el producto de los signos del segundo y tercer términos del trinomio (+)(+) = +

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Se buscan dos números, cuyo producto sea igual al tercer término del trinomio (12) y su suma algebraica sea el coeficiente del segundo término (7): $(4)(3) = 12$ y $4 + 3 = 7$, los números son 4 y 3.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

NOTA: de los números que se obtuvieron se coloca el mayor en el primer binomio y el menor en el segundo binomio

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $m^2 + 24 - 10m$ es:

a) $(m - 6)(m - 4)$ b) $(m + 6)(m - 4)$ c) $(m - 6)(m + 4)$ d) $(m + 6)(m + 4)$

Solución:

– Se ordena el trinomio a factorizar: $m^2 - 10m + 24$.

– Se determinan los signos de los binomios: $(m - \quad)(m - \quad)$.

– Se obtienen los números que multiplicados den 24 y sumados 10: $(m - 6)(m - 4)$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al factorizar el trinomio $n^2 - n - 56$ se obtiene:

a) $(n - 8)(n - 7)$ b) $(n + 14)(n - 4)$ c) $(n + 28)(n - 2)$ d) $(n - 8)(n + 7)$

Solución:

$$n^2 - n - 56 = (n - \quad)(n + \quad) = (n - 8)(n + 7)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $2x^2 + 3x + 1$ es:

a) $(2x + 1)(x + 2)$ b) $(x + 1)(2x + 1)$ c) $(2x - 1)(x - 1)$ d) $(2x + 1)(x - 1)$

Solución:

Se multiplican y se divide la expresión por el coeficiente del término cuadrático,

$$2x^2 + 3x + 1 = \frac{2(2x^2 + 3x + 1)}{2}$$

se multiplica sólo el 1er y 3er término de la expresión,

$$\frac{4x^2 + 3(2x) + 2}{2}$$

se realizan los pasos para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$,

$$\frac{(2x + \quad)(2x + \quad)}{2} = \frac{(2x + 2)(2x + 1)}{2} = (x + 1)(2x + 1)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $6x^2 - 11x - 35$ es:

a) $(3x + 5)(2x - 7)$ b) $(3x- 5)(2x + 7)$ c) $(6x + 7)(x - 5)$ d) $(6x + 5)(x - 7)$

Solución:

$$6x^2 - 11x - 35 = \frac{6(6x^2 - 11x - 35)}{6} = \frac{36x^2 - 11(6x) - 210}{6} = \frac{(6x - 21)(6x + 10)}{6} = \frac{(6x - 21)(6x + 10)}{3 \cdot 2}$$

$$= (2x - 7)(3x + 5)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Suma y diferencia de cubos

Son de la forma:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad ; \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo:

Una expresión equivalente a $(a^3 + 8)$ es:

a) $(a + 2)(a^2 + 2a + 4)$ b) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$ c) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$ d) $(a + 2)^3$

Solución:

Se obtienen las raíces cúbicas de cada uno de los términos

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad ; \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

Por tanto,

$$a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 2^2) = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

c) Fracciones algebraicas racionales

Dada una fracción algebraica expresarla en su forma más simple.

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $\frac{3x^4y^3}{6x^2y}$ se obtiene:

a) $2x^2y^2$ b) $\frac{1}{2}x^2y^2$ c) $2x^2y^3$ d) $\frac{y^2}{2x^2}$

Solución:

Por tratarse de monomios, se simplifican los coeficientes y las bases iguales, y se aplica la ley de los exponentes para la división,

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{x^4}{x^2}=x^2 \quad ; \quad \frac{y^3}{y}=y^2$$

los resultados parciales se multiplican,

$$\frac{1}{2}(x^2)(y^2)=\frac{1}{2}x^2y^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La simplificación de $\frac{12m^5n^6p}{4m^5n^8}$ es:

a) $\frac{3p}{n^2}$ b) $3n^2p$ c) $\frac{3n^2}{p}$ d) $3np^2$

Solución:

Se realizan las divisiones entre los coeficientes y las literales iguales:

$$\frac{12}{4}=3 \quad ; \quad \frac{m^5}{m^5}=1 \quad ; \quad \frac{n^6}{n^8}=\frac{1}{n^2}$$

Aquella literal que no se simplifique permanece en su lugar, por tanto:

$$3(1)\left(\frac{1}{n^2}\right)(p)=\frac{3p}{n^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al simplificar $\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}$, se obtiene:

a) $\frac{x+3}{x+5}$ b) $\frac{x-3}{x-5}$ c) $\frac{x+3}{x-5}$ d) $\frac{x-3}{x+5}$

Solución:

La fracción se conforma de dos polinomios, éstos se factorizan de acuerdo a sus características, para realizar la simplificación:

$$x^2-9=(x+3)(x-3) \quad ; \quad x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$$

Por tanto:

$$\frac{x^2-9}{x^2+8x+15}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+5)(x+3)}=\frac{x-3}{x+5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

d) Operaciones con fracciones algebraicas

Suma y resta

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ o $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ es:

a) $\frac{3}{ab}$ b) $\frac{3}{a+b}$ c) $\frac{2b+a}{ab}$ d) $\frac{2ab}{ab}$

Solución:

Para obtener el común denominador se multiplican los denominadores y se realiza la suma de fracciones:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2(b)+1(a)}{ab}=\frac{2b+a}{ab}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado de $\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{3x^3}-\frac{3}{2x^2}$ es:

a) $\frac{x}{6x^2}$ b) $\frac{1}{6x^2}$ c) $\frac{1}{6x}$ d) $6x^2$

Solución:

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los coeficientes de los denominadores y se toman las literales de mayor exponente que se repiten, así como las que no se repiten.

El común denominador de x^2, $3x^3$ y $2x^2$ es: $6x^3$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{3x^3}-\frac{3}{2x^2}=\frac{(6x)(1)+2(2x)-(3x)(3)}{6x^3}=\frac{6x+4x-9x}{6x^3}=\frac{x}{6x^3}=\frac{1}{6x^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El resultado de $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+5}{x+3}$ es:

a) $\frac{x+13}{(x+2)(x+3)}$ b) $\frac{-4}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x+13}{(x-2)(x+3)}$ d) $\frac{-7}{(x-2)(x+3)}$

Solución:

Para obtener el común denominador se multiplican los denominadores y se realiza la suma de fracciones:

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+5}{x+3}=\frac{(x+3)(x+1)-(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)}=\frac{x^2+x+3x+3-(x^2+5x-2x-10)}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+x+3x+3-x^2-5x+2x+10}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{x+13}{(x-2)(x+3)}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Multiplicación

Se aplica la siguiente propiedad: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$, si es posible el resultado se simplifica.

Ejemplo 1

El resultado de $\left(\frac{3x^2y^3}{4x^4y^2}\right)\left(\frac{8x}{y^2}\right)$ es:

a) $6xy$ b) $\frac{6y}{x}$ c) $\frac{6x}{y}$ d) $\frac{6}{xy}$

Solución:
Se realiza la multiplicación de numeradores y denominadores,

$$\left(\frac{3x^2y^3}{4x^4y^2}\right)\left(\frac{8x}{y^2}\right)=\frac{(3x^2y^3)(8x)}{(4x^4y^2)(y^2)}=\frac{24x^3y^3}{4x^4y^4}$$

la fracción resultante se simplifica a su forma más simple,

$$\frac{24x^3y^3}{4x^4y^4}=\frac{6}{xy}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

El resultado de $\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}\right)$ es:

a) $\frac{x+1}{x+2}$ b) $\frac{x+2}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x-3}$ d) $\frac{x-3}{x+3}$

Solución:

Las fracciones se conforman de polinomios, los cuales se factorizan para simplificar la operación:

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

Por tanto,

$$\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}\right)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-3)(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+1)(x-3)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 3

El resultado de $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a+b}\right)$ es:

a) $a+b$ b) $\frac{1}{a+b}$ c) $a-b$ d) $\frac{1}{a-b}$

Solución:
Se resuelve cada paréntesis:

$$a-\frac{b^2}{a}=\frac{a(a)-b^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a} \quad ; \quad 1-\frac{b}{a+b}=\frac{1(a+b)-b}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

Por tanto,

$$\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a(a+b)(a-b)}{a(a+b)}=a-b$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

División

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, si es posible la fracción resultante se simplifica.

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{6a^4b^3}{a^2} \div \frac{12ab^5}{b}$ es:

a) $\frac{b}{2a}$ b) $\frac{a}{2b}$ c) $\frac{2a}{b}$ d) $\frac{2b}{a}$

Solución:

$$\frac{6a^4b^3}{a^2} \div \frac{12ab^5}{b} = \frac{(6a^4b^3)(b)}{(a^2)(12ab^5)} = \frac{6a^4b^4}{12a^3b^5} = \frac{a}{2b}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El resultado de la división $\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{x+1}{x^2-2x-3}\right)$ es:

a) $\frac{x-3}{x+2}$ b) $\frac{x-3}{x-2}$ c) $\frac{x+2}{x+3}$ d) $\frac{x-2}{x-3}$

Solución:

Las fracciones se componen de polinomios, los cuales se factorizan para simplificar la expresión,

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \quad ; \quad x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Por tanto,

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{x+1}{x^2-2x-3}\right) = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \div \frac{x+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de la división $\left(x - \frac{9}{x}\right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ es:

a) $x(x - 3)$ b) $x + 3$ c) $x - 3$ d) $x(x + 3)$

Solución:

Se resuelven cada uno de los paréntesis:

$$x - \frac{9}{x} = \frac{x(x)-9}{x} = \frac{x^2-9}{x} \quad ; \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x-3}{x^2}$$

Por tanto:

$$\left(x - \frac{9}{x}\right) \div \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{x^2-9}{x} \div \frac{x-3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{x} \div \frac{x-3}{x^2} = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = x(x+3)$$

El resultado correcto corresponde al inciso "d".

e) Leyes de los exponentes

Potencia
Es la representación del producto de una base por sí misma, un cierto número de veces.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad \rightarrow n \text{ veces}$$

Donde, a = base y n = exponente.

Ejemplos:

1) $(3)^4 = (3)(3)(3)(3) = 81$

2) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{8}{343}$

3) $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$

4) $-2^5 = -(2)(2)(2)(2)(2) = -32$

Leyes de los exponentes

1) $a^0 = 1$

2) $a^1 = a$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

8) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

9) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

11) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^2}$ es:

a) 2^4 b) 2^5 c) 2^3 d) 2^6

Solución:

$$\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^2} = \frac{2^{3+5}}{2^2} = \frac{2^8}{2^2} = 2^{8-2} = 2^6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

Al simplificar la expresión $\left(\frac{3^4}{3^7}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a) -3 b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $-\frac{1}{3}$

Solución:

$$\left(\frac{3^4}{3^7}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{4-7}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{(-3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{-3}{3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 3

La expresión $\left(\frac{2^m}{2^{-3}}\right)^2$ es equivalente a:

a) 2^{2m+6} b) 2^{2m-6} c) 2^{m^2-9} d) 2^{m+5}

Solución:

$$\left(\frac{2^m}{2^{-3}}\right)^2 = \left(2^{m-(-3)}\right)^2 = \left(2^{m+3}\right)^2 = 2^{(m+3)(2)} = 2^{2m+6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 4

Al simplificar la expresión $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}}$, se obtiene:

a) a^3 b) a^2 c) a^{-2} d) a^{-3}

Solución:

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)} = a^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

La simplificación de $\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\right)^6$ es:

a) x b) x^6 c) x^5 d) x^3

Solución:

Se expresan las raíces como un exponente racional y se realizan las respectivas operaciones con los exponentes:

$$\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\right)^6 = \left(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^6 = x^{\frac{6}{2}}\cdot x^{\frac{6}{3}} = x^3\cdot x^2 = x^5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 6

Una expresión equivalente a $\dfrac{\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{13}{2}}}{\frac{1}{6}(x+2)^{\frac{1}{2}}}$ es:

a) $\frac{1}{4}(x+2)^6$ b) $2(x+2)^7$ c) $4(x+2)^6$ d) $\frac{1}{2}(x+2)^7$

Solución:

$$\frac{\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{13}{2}}}{\frac{1}{6}(x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2)(6)}{(1)(3)}(x+2)^{\frac{13}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{12}{3}(x+2)^{\frac{12}{2}} = 4(x+2)^6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 7

Al simplificar la expresión $\left(\dfrac{-27a^4b^5c^2}{9a^4b^3c}\right)^2$, se obtiene:

a) $9b^4c^2$ b) $-9b^4c^2$ c) $9b^2c^4$ d) $-9b^2c^4$

Solución:

$$\left(\frac{-27a^4b^5c^2}{9a^4b^3c}\right)^2 = \left(-3b^2c\right)^2 = 9b^4c^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

f) Radicalización

Operación que permite encontrar un número, que multiplicado por sí mismo, tantas veces como lo indica el índice, da como resultado el radicando.

Radical: $\sqrt[n]{a}$

Donde a: radicando y n: índice.

Ejemplos:

1) $\sqrt{81} = \pm 9$ 2) $\sqrt[3]{27} = 3$ 3) $\sqrt[4]{625} = \pm 5$ 4) $\sqrt[5]{-32} = -2$

Simplificación de radicales

Dado un radical de la forma $\sqrt[n]{a}$ expresarlo en su forma más sencilla.

Ejemplo 1

Al simplificar $\sqrt{8}$ se obtiene:

a) $2\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{2}$

Solución:

Se descompone el radicando 8 en sus factores primos.

8	2
4	2
2	2
1	

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

Por tanto, $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\sqrt[3]{54}$ es:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$

Solución:
Se descompone 54 en sus factores primos.

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$

Por tanto, $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 3\sqrt[3]{2}$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ es:

a) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$ c) 3 d) $\sqrt{2}$

Solución:

$$\frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 2} = \frac{1}{3}\sqrt{3^2}\sqrt{2} = \frac{1}{3}(3)\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

Al simplificar el radical $\sqrt{4x^2y^4}$, se obtiene:

a) $2x^2y$ b) $4xy^2$ c) $2xy^2$ d) $-4xy^2$

Solución:

El radicando 4 se representa como una potencia y aplica la propiedad: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

$$\sqrt{4x^2y^4} = \sqrt{2^2x^2y^4} = 2^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}}y^{\frac{4}{2}} = 2xy^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

Al simplificar el radical $\sqrt[3]{27a^6b^9}$, se obtiene:

a) $-3a^2b^3$ b) $3a^3b^2$ c) $-3a^3b^2$ d) $3a^2b^3$

Solución:

$$\sqrt[3]{27a^6b^9} = \sqrt[3]{3^3a^6b^9} = 3^{\frac{3}{3}}a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{9}{3}} = 3^1a^2b^3 = 3a^2b^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 6

Al simplificar $\sqrt{8x^5}$, se obtiene:

a) $2x\sqrt{2x}$ b) $x^2\sqrt{2x}$ c) $2x^2\sqrt{2x}$ d) $2\sqrt{2x}$

Solución:

$$\sqrt{8x^5} = \sqrt{2^3x^5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot x^4 \cdot x} = 2^{\frac{2}{2}}x^{\frac{4}{2}}\sqrt{2x} = 2x^2\sqrt{2x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

▶ Suma y resta de radicales

Para sumar o restar radicales, éstas deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplo 1

El resultado de $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$

Solución:

En la operación, el índice y el radicando coinciden, por tanto,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (2 + 5 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El resultado de $\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{98}$ es:

a) $\sqrt{66}$ b) $15\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$

Solución:
Para resolver la operación se realiza una simplificación de radicales, porque los radicandos no son los mismos, entonces,

$$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{50}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98}=\sqrt{7^2\cdot 2}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{98}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7\sqrt{2}=(3-5+7)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El resultado de $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}$ es:

a) $4\sqrt[3]{5}$ b) $10\sqrt[3]{2}$ c) $30\sqrt[3]{2}$ d) $10\sqrt[3]{6}$

Solución:

Se simplifica cada uno de los radicales

$$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=2\sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=5\sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}$$

por tanto

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=10\sqrt[3]{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

Al simplificar la expresión $\sqrt{3x}+4\sqrt{3x}-3\sqrt{3x}$, se obtiene:

a) $4\sqrt{3x}$ b) $3\sqrt{3x}$ c) $2\sqrt{3x}$ d) $\sqrt{3x}$

Solución:

$$\sqrt{3x}+4\sqrt{3x}-3\sqrt{3x}=(1+4-3)\sqrt{3x}=2\sqrt{3x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

La simplificación de la expresión $\sqrt{8x^2}+\sqrt{18x^2}-\sqrt{98x^2}$ es:

a) $-2\sqrt{2}\,x$ b) $-\sqrt{2}\,x$ c) $2\sqrt{2}\,x$ d) $-2x$

Solución:

Se simplifica cada uno de los radicales de la expresión:

$$\sqrt{8x^2}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot x^2}=2\sqrt{2}\,x \quad ; \quad \sqrt{18x^2}=\sqrt{3^2\cdot 2\cdot x^2}=3\sqrt{2}\,x \quad ; \quad \sqrt{98x^2}=\sqrt{7^2\cdot 2\cdot x^2}=7\sqrt{2}\,x$$

Por tanto,

$$\sqrt{8x^2}+\sqrt{18x^2}-\sqrt{98x^2}=2\sqrt{2}\,x+3\sqrt{2}\,x-7\sqrt{2}\,x=(2+3-7)\sqrt{2}\,x=-2\sqrt{2}\,x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Propiedades de los radicales

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$

2) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

6) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

7) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}$

Ejemplo 1

Al simplificar la expresión $\sqrt[3]{5^6}$, se obtiene:

a) 5^2 b) 5^{-2} c) 5^3 d) 5^{-3}

Solución:

Al Aplicar $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, se obtiene:

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Al simplificar $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$, se obtiene:

a) $\sqrt[6]{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2

Solución:

Aplicando $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$,

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[(2)(3)]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\sqrt[6]{5^3}$ es:

a) $\sqrt{5}$ b) 5^2 c) $\sqrt[3]{5}$ d) 5^3

Solución:

Aplicando $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, se obtiene:

$$\sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Multiplicación de radicales

- **Con índices iguales**

Se aplica la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo 1

Al realizar la multiplicación $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$, se obtiene:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt[4]{6}$

Solución:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{(3)(2)}=\sqrt{6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al realizar la multiplicación $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$, se obtiene:

a) 2 b) $\sqrt[9]{8}$ c) $\sqrt{8}$ d) 4

Solución:

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(4)(2)}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x}$ es:

a) x b) x^3 c) x^4 d) x^2

Solución:

Los índices de los radicales son iguales, entonces,

$$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x^3\cdot x}=\sqrt{x^4}=x^{\frac{4}{2}}=x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

El producto de $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^7}$ es:

a) x^2 b) x^3 c) x^4 d) x

Solución:

$$\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^7}=\sqrt[3]{x^2\cdot x^7}=\sqrt[3]{x^9}=x^{\frac{9}{3}}=x^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

- **Con índices diferentes**

Se aplica la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}$$

Ejemplo 1

La simplificación de la multiplicación $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{5}$ es:

a) $\sqrt[6]{20}$ b) $\sqrt[3]{20}$ c) $\sqrt[5]{20}$ d) $\sqrt[6]{2000}$

Solución:

Los índices de las raíces son diferentes, por tanto, se aplica $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}$, entonces,

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[(3)(2)]{4^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{16\cdot 125}=\sqrt[6]{2000}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$ es:

a) $4^{\frac{1}{8}}$ b) $4^{\frac{1}{4}}$ c) $2^{\frac{3}{4}}$ d) $2^{\frac{1}{8}}$

Solución:

Se convierten los radicales a un índice común y se multiplican los radicandos:

$$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[4]{2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Una expresión equivalente a $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$ es:

a) $x^{\frac{1}{6}}$ b) $x^{\frac{5}{6}}$ c) $x^{\frac{1}{2}}$ d) $x^{\frac{1}{3}}$

Solución:

Los índices de los radicales son diferentes, se aplica la propiedad: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m\cdot b^n}$.

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[(2)(3)]{x^3\cdot x^2}=\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{5}{6}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

El resultado de $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x}$ es:

a) $\sqrt[4]{x}$ b) $x\sqrt[4]{x^3}$ c) $x\sqrt[4]{x}$ d) $x\sqrt{x}$

Solución:

$$\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[4]{x^3\cdot x^2}=\sqrt[4]{x^5}=\sqrt[4]{x^4\cdot x}=x\sqrt[4]{x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

División de radicales

▸ Con índices iguales

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Ejemplo 1

El resultado de $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) 3 d) $\sqrt{5}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{15}{3}}=\sqrt{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El resultado de la división $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}}$ es:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{48}{2}}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Al realizar $\frac{\sqrt[3]{16x^7}}{\sqrt[3]{2x}}$, se obtiene:

a) x^2 b) $3x^2$ c) $4x^2$ d) $2x^2$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{16x^7}}{\sqrt[3]{2x}}=\sqrt[3]{\frac{16x^7}{2x}}=\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{2^3x^6}=2^{\frac{3}{3}}x^{\frac{6}{3}}=2x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

Al simplificar $\sqrt{\frac{243x^5y^4}{9x^2y^2}}$, se obtiene:

a) $xy\sqrt{3x}$ b) $3xy\sqrt{x}$ c) $3y\sqrt{3x}$ d) $3xy\sqrt{3x}$

Solución:

Se realiza la operación dentro del radical y se procede a la simplificación

$$\sqrt{\frac{243x^5y^4}{9x^2y^2}}=\sqrt{27x^3y^2}=\sqrt{3^2\cdot 3\cdot x^2\cdot x\cdot y^2}=3xy\sqrt{3x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

▶ Con índices diferentes

Se aplica la siguiente propiedad: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ es:

a) $\sqrt[6]{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) 1

Solución:

Los índices de las raíces son diferentes, por tanto, se aplica $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$, entonces,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{8}{4}} = \sqrt[6]{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El resultado de $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[8]{3}$ d) $\sqrt[3]{3}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3}} = \sqrt[4]{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El resultado de $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ es:

a) $\sqrt[6]{x}$ b) $\sqrt{x}$ c) $\sqrt[6]{x^5}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

Solución:

Los índices de los radicales son diferentes, entonces,

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^2}} = \sqrt[6]{x^{3-2}} = \sqrt[6]{x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ecuaciones

a) Despejes

Dada una fórmula o expresión algebraica, despejar una incógnita significa representarla en términos de los demás elementos mediante operaciones inversas.

Ejemplo 1

Al despejar "h" de la fórmula $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, se obtiene:

a) $\frac{3\pi V}{r^2}$ b) $\frac{3V}{\pi r^2}$ c) $\frac{\pi r^2}{3V}$ d) $\frac{\pi V}{3r^2}$

Solución:

En el segundo miembro el término $\frac{\pi r^2}{3}$ se encuentra multiplicando a "h", por tanto, en el primer miembro efectuará una división, entonces

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{V}{\frac{\pi r^2}{3}} = h \quad \rightarrow \quad h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Al despejar "a" de la fórmula $V_f^2 = V_o^2 + 2ad$, se obtiene:

a) $\frac{V_o^2 - V_f^2}{2d}$ b) $\frac{-V_f^2 - V_o^2}{2d}$ c) $\frac{V_f^2 - V_o^2}{2d}$ d) $\frac{V_f^2 + V_o^2}{2d}$

Solución:

Los elementos que no contengan "a" se transponen al primer miembro con signo contrario.

$$V_f^2 = V_o^2 + 2ad$$

$$V_f^2 - V_o^2 = 2ad$$

Por último, aquellos que la multiplican efectuarán una división en el primer miembro.

$$\frac{V_f^2 - V_o^2}{2d} = a$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Dada la fórmula $A = \pi r^2$, el despeje de "r" es:

a) $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ b) $\sqrt{\frac{\pi}{A}}$ c) $\sqrt{\pi A}$ d) $\frac{A}{\pi}$

Solución:

$$A = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = \frac{A}{\pi} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

b) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado es una igualdad entre dos expresiones que involucran constantes y una incógnita, cuyo grado es 1 y está formada por dos miembros:

1er miembro = 2do miembro

Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se obtiene el valor de la incógnita que cumple con la igualdad dada.

Enteras

Ejemplo 1

El valor de "x" que cumple con la igualdad $6x - 7 = 3x + 2$ es:

a) $x = 1$ b) $x = -3$ c) $x = 3$ d) $x = -1$

Solución:

Se agrupan los términos que contienen a la incógnita en alguno de los miembros y los términos independientes, en el otro miembro.

$$6x - 7 = 3x + 2 \quad \rightarrow \quad 6x - 3x = 2 + 7$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al resolver la ecuación $7 - 4x + 2x = 9 + 3x + 8$, el valor de "x" es:

a) $x = -1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$ d) $x = 1$

Solución:

$$7 - 4x + 2x = 9 + 3x + 8 \quad \rightarrow \quad -4x + 2x - 3x = 9 + 8 - 7$$

$$-5x = 10$$

$$x = \frac{10}{-5}$$

$$x = -2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

La solución de $4x - (3 + 5x) = 2(x - 1) + 1$ es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

Solución:

Se eliminan los signos de agrupación y se despeja la incógnita

$$4x - (3 + 5x) = 2(x - 1) + 1 \quad \rightarrow \quad 4x - 3 - 5x = 2x - 2 + 1$$

$$4x - 5x - 2x = -2 + 1 + 3$$

$$-3x = 2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Fraccionarias

Ejemplo 1

El valor de "x" en $\frac{x}{4}+\frac{2}{3}=x-\frac{1}{6}$ es:

a) $-\frac{10}{9}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{10}{9}$ d) $-\frac{9}{10}$

Solución:

Cada miembro de la igualdad se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\text{mcm}(4, 3, 6) = 12$$

$$\frac{x}{4}+\frac{2}{3}=x-\frac{1}{6} \quad\rightarrow\quad (12)\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\right)=(12)\left(x-\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{12x}{4}+\frac{24}{3}=12x-\frac{12}{6}$$

Se convierte en una ecuación de primer grado entera.

$$3x + 8 = 12x - 2$$

$$3x - 12x = -2 - 8$$

$$-9x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-9} = \frac{10}{9}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{5}{2x}+3=\frac{6}{x}-2$ es:

a) $x=-\frac{7}{10}$ b) $x=\frac{10}{7}$ c) $x=-\frac{10}{7}$ d) $x=\frac{7}{10}$

Solución:

Se multiplica la ecuación por el mínimo común múltiplo.

$$\frac{5}{2x}+3=\frac{6}{x}-2 \quad\rightarrow\quad (2x)\left(\frac{5}{2x}+3\right)=(2x)\left(\frac{6}{x}-2\right)$$

$$\frac{10x}{2x}+6x=\frac{12x}{x}-4x$$

$$5 + 6x = 12 - 4x$$

$$6x + 4x = 12 - 5$$

$$10x = 7$$

$$x = \frac{7}{10}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El valor de "x" que satisface la ecuación $\frac{2}{3x-1}=\frac{3}{x+2}$ es:

a) x = – 1 b) x = 2 c) x = 1 d) x = – 2

Solución:

En ambos lados de la igualdad la operación principal es una división, entonces se realiza un producto cruzado.

$$\frac{2}{3x-1}=\frac{3}{x+2} \quad \rightarrow \quad 2(x+2)=3(3x-1)$$

$$2x+4=9x-3$$

$$2x-9x=-3-4$$

$$-7x=-7$$

$$x=1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x^2+x}$ es:

a) x = 3 b) x = 1 c) x = – 1 d) x = – 3

Solución:

Se factorizan los denominadores,

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x^2+x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x(x+1)}$$

se multiplica la ecuación por el mínimo común múltiplo para eliminar los denominadores.

$$x(x+1)\left[\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x(x+1)}\right] \quad \rightarrow \quad x-2(x+1)=1$$

$$x-2x-2=1$$

$$x-2x=1+2$$

$$-x=3$$

$$x=-3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Literales

Se les denomina ecuaciones de primer grado literales, a aquellas que además de la incógnita contienen otras literales, las cuales representan constantes; al despejar la incógnita, ésta quedará en términos de las literales restantes.

Ejemplo 1

El valor de "x" que satisface la ecuación $ax - a^2 = x - 1$ es:

a) $a - 1$ b) a c) $a + 1$ d) $-a$

Solución:

En este caso la incógnita es "x", entonces

$$ax - a^2 = x - 1 \rightarrow ax - x = a^2 - 1$$

$$x(a-1) = a^2 - 1$$

$$x = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$$

$$x = \frac{(a+1)(a-1)}{a-1}$$

$$x = a + 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor de "x" que satisface la ecuación $3bx + b^2 = bx + b$, si $b = 3$ es:

a) -1 b) -2 c) -3 d) -4

Solución:

Se sustituye el valor de "b = 3" en la ecuación:

$$3bx + b^2 = bx + b \rightarrow 3(3)x + (3)^2 = (3)x + 3 \rightarrow 9x + 9 = 3x + 3$$

Se resuelve la nueva ecuación para "x"

$$9x + 9 = 3x + 3 \rightarrow 9x - 3x = 3 - 9 \rightarrow 6x = -6$$

$$x = -1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El valor de "y" que satisface la ecuación $my + m + 1 = y - m^2$, si $m = \frac{1}{2}$, es:

a) $-\frac{7}{2}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

Solución:

Se sustituye el valor de "$m = \frac{1}{2}$" en la ecuación,

$$my + m + 1 = y - m^2 \rightarrow \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} + 1 = y - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} + 1 = y - \frac{1}{4}$$

se multiplica por 4 la ecuación para eliminar denominadores

$$4\left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} + 1 = y - \frac{1}{4}\right] \rightarrow 2y + 2 + 4 = 4y - 1 \rightarrow -2y = -7$$

$$y = \frac{7}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

b) De primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$$

En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden obtener los siguientes resultados:

1. Una solución, la cual representa el punto donde se intersecan las rectas.
2. Soluciones infinitas, si las ecuaciones son equivalentes, esto es, representan la misma recta. A este tipo de ecuaciones se les conoce también como rectas coincidentes.

3. No hay solución si las rectas son paralelas, esto es, las rectas nunca se cortan y se dice que son incompatibles.

Métodos de solución
Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones, entre los que destacan por su simplicidad el método de reducción (suma o resta) y el método por sustitución.

► **Método de reducción**

Este método consiste en sumar ambas ecuaciones y eliminar una de las variables, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 1

El valor de "x" y "y" que satisface el sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ es:

a) x = 1, y = – 1 b) x = – 1, y = 1 c) x = 1, y = 1 d) x = – 1, y = –1

Solución:

Se elige una incógnita a eliminar, en este caso "x", por tanto, los coeficientes deben ser iguales, pero de signo contrario; entonces, la primera ecuación se multiplica por el coeficiente de "x" de la segunda ecuación, y la segunda ecuación, se multiplica por el coeficiente de "x" de la primera ecuación de signo contrario.

$$\begin{array}{r} 3(2x + 5y = 7) \\ \underline{-2(3x + 2y = 5)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 6x + 15y = 21 \\ \underline{-6x - 4y = -10} \end{array}$$

Las ecuaciones resultantes se suman:

$$\begin{array}{r} 6x + 15y = 21 \\ \underline{-6x - 4y = -10} \\ 11y = 11 \end{array}$$

$$y = \frac{11}{11}$$

$$y = 1$$

El valor de y = 1 se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales, en este caso se elige la ecuación 2x + 5y = 7 para determinar "x", entonces:

$$2x + 5y = 7 \quad \rightarrow \quad 2x + 5(1) = 7 \quad \rightarrow \quad 2x + 5 = 7$$

$$2x = 7 - 5$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

Por tanto, la solución del sistema es x = 1, y = 1, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

¿Cuáles son los valores de "m" y "n" que satisfacen el sistema $\begin{cases} 4m + 3n = 3 \\ 2m - 6n = -1 \end{cases}$?

a) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{3}$ b) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$ c) $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{3}$ d) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$

Solución:

Aplicando el método de reducción para eliminar "n", se multiplica por 6 la primera ecuación y por 3 la segunda,:

$$6(4m + 3n = 3) \qquad 24m + 18n = 18$$
$$3(2m - 6n = -1) \qquad 6m - 18n = -3$$
$$30m \quad = 15$$
$$m = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

El valor de $m = \frac{1}{2}$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales para hallar el valor de "n", entonces:

$$4m + 3n = 3 \quad \rightarrow \quad 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3n = 3 \quad \rightarrow \quad 2 + 3n = 3 \quad \rightarrow \quad 3n = 3 - 2$$
$$3n = 1$$
$$n = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

► **Método de sustitución**

Este método consiste en despejar una incógnita de cualquiera de ambas ecuaciones y sustituirla en la ecuación restante y obtener una ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 1

¿Cuáles son los valores que satisfacen el sistema $\begin{cases} 5a + 2b = -5 \\ 7a + 3b = -6 \end{cases}$?

a) $a = 3, b = 5$ b) $a = 3, b = -5$ c) $a = -3, b = -5$ d) $a = -3, b = 5$

Solución:

Se despeja una incógnita de cualquiera de las ecuaciones, en este caso "a" de la primera ecuación.

$$5a + 2b = -5 \quad \rightarrow \quad 5a = -5 - 2b \quad \rightarrow \quad a = \frac{-5 - 2b}{5}$$

El despeje que se obtiene se sustituye en la segunda ecuación y se resuelve la ecuación resultante.

$$7a + 3b = -6 \quad \rightarrow \quad 7\left(\frac{-5 - 2b}{5}\right) + 3b = -6 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{-35 - 14b}{5}\right) + 3b = -6$$
$$\frac{-35 - 14b}{5} = -6 - 3b$$
$$-35 - 14b = -30 - 15b$$
$$-14b + 15b = -30 + 35$$
$$b = 5$$

El valor de $b = 5$ se sustituye en el despeje de "a".

$$a = \frac{-5 - 2b}{5} = \frac{-5 - 2(5)}{5} = \frac{-5 - 10}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

Los valores que satisfacen el sistema son:

$$a = -3 \text{ y } b = 5$$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

¿Cuáles son los valores que satisfacen el sistema $\begin{cases} a = 2b + 1 \\ 3a - b = 13 \end{cases}$?

a) a = – 5, b = 2 b) a = 5, b = 2 c) a = 5, b = – 2 d) a = – 5, b = – 2

Solución:

Al sustituir a = 2b + 1 en la ecuación 3a – b = 13, y resolver la ecuación se obtiene:

$$3(2b + 1) - b = 13 \quad \rightarrow \quad 6b + 3 - b = 13 \quad \rightarrow \quad 5b = 10$$

$$b = \frac{10}{5}$$

$$b = 2$$

Si b = 2, entonces

$$a = 2b + 1 = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

Por tanto, los valores que satisfacen el sistema son: a = 5, b = 2

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Problemas de aplicación

Ejemplo 1

Los números que cumplen con la oración: “la suma de dos números es 55 y su diferencia es 15”, son:

a) 30 y 25 b) 40 y 15 c) 35 y 20 d) 10 y 45

Solución:

Los números se representan por “x” y ”y”, el planteamiento es:

$$x + y = 55$$
$$\underline{x - y = 15}$$

Se aplica cualquier método para la resolución, en este caso suma y resta:

$$x + y = 55$$
$$\underline{x - y = 15}$$
$$2x \quad = 70 \quad \rightarrow \quad x = \frac{70}{2} = 35$$

Se sustituye el valor de “x” para obtener “y” en cualquiera de las ecuaciones:

$$x + y = 55 \quad \rightarrow \quad 35 + y = 55 \quad \rightarrow \quad y = 20$$

Los números son: 35 y 20, la respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 2

“Se desean enllantar 52 vehículos, entre autos y motocicletas. Si se necesitan 176 llantas en total, ¿cuántos autos y motocicletas se les van a poner llantas?”. Un planteamiento que resuelve el problema es:

a) $\begin{matrix} x + y = 6 \\ 4x - 2y = 176 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x + y = 52 \\ 4x + 2y = 176 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} 4x + 2y = 52 \\ x + y = 176 \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x - y = 52 \\ 4x + 2y = 176 \end{matrix}$

Solución:

Sean

x = número de autos ; y = número de motocicletas

Planteamiento

– Se desean enllantar 52 vehículos → $x + y = 52$

– Se necesitan 176 llantas, 4 para cada auto y 2 para cada motocicleta → $4x + 2y = 176$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 3

"Un libro de matemáticas y uno de física cuestan \$400.00. Si el libro de matemáticas cuesta \$40.00 más que el de física, ¿cuánto cuesta cada libro?". Un planteamiento que resuelve el problema es:

a) $\begin{matrix} x + y = 400 \\ x = y + 40 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x - y = 40 \\ y = x + 400 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} x + y = 40 \\ x - y = 400 \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x - y = 400 \\ x = 40 - y \end{matrix}$

Solución:

Sean: x = costo del libro de matemáticas ; y = costo del libro de física

Planteamiento

– Un libro de matemáticas y un libro de física cuestan \$400.00 → $x + y = 400$

– El libro de matemáticas cuesta \$ 40.00 más que el de física → $x = y + 40$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

En una tienda de abarrotes se compran 2kg de queso y 1 kg de jamón y se paga \$ 140.00. Si se compran 3 kg de jamón y 1 kg de queso, y se paga \$270.00, ¿cuánto cuesta un kilo de jamón?

a) \$ 30.00 b) \$ 40.00 c) \$ 70.00 d) \$ 80.00

Solución:

Sean: x = costo de un kg de jamón ; y = costo de un kg de queso

Planteamiento

– Se compran 2kg de queso y 1kg de jamón y se paga \$ 140.00 → $2y + x = 140$

– Se compran 3kg de jamón y 1kg de queso se paga \$ 270.00 → $3x + y = 270$

Se desea conocer el valor de "x", se elimina "y"

$$\begin{matrix} -1(x + 2y = 140) \\ 2(3x + y = 270) \end{matrix} \qquad \begin{array}{l} -x - 2y = -140 \\ \underline{6x + 2y = \;\; 540} \\ 5x \qquad = 400 \end{array}$$

$$x = \frac{400}{5} = 80$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

En un parque de diversiones, 6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$820.00 y 4 entradas de adulto y 5 de niño cuestan \$530.00. ¿Cuál es el precio de entrada de un adulto?

a) \$ 80 b) \$ 90 c) \$ 70 d) \$ 60

Solución:

Sean

x = precio de entrada de un niño ; y = precio de entrada de un adulto

Planteamiento

6 entradas de adulto y 8 de niño cuestan \$820.00 → $6y + 8x = 820$

4 entradas de adulto y 5 de niño cuestan \$ 530.00 → $4y + 5x = 530$

Se desea conocer el valor de "y" , se aplica el método de reducción (suma y resta) para eliminar "x",

$$\begin{matrix} 5(6y + 8x = 820) \\ -8(4y + 5x = 530) \end{matrix} \qquad \begin{array}{l} 30y + 40x = \;\; 4100 \\ \underline{-32y - 40x = -4240} \\ -2y \qquad = -140 \end{array}$$

$$y = \frac{-140}{-2} = 70$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

c) De segundo grado con una incógnita

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c $\in$ R y $a \neq 0$, se le llama ecuación de segundo grado.

Los valores que satisfacen la ecuación se les llama raíces o soluciones de la ecuación.

Clasificación de las ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de segundo grado
- Completas : $ax^2 + bx + c = 0$
- Incompletas
  - Mixtas : $ax^2 + bx = 0$, con $c = 0$
  - Puras : $ax^2 + c = 0$, con $b = 0$

Métodos de solución

- Fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Factorización.
- Completando trinomio cuadrado perfecto.

Propiedades del discriminante de la fórmula general

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son imaginarias.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales.

Fórmula general

Para aplicar la fórmula general se deben obtener los valores de a, b y c en el orden de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c$, donde:

a: Coeficiente del término cuadrático.

b: Coeficiente del término lineal.

c: Término independiente.

– En la ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$, se sustituye $c = 0$.

– En la ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$, se sustituye $b = 0$.

Ejemplo 1

Las raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 3 = 0$ son:

a) 1, 3 b) – 1, – 3 c) 1, – 3 d) – 1, 3

Solución:

Se obtienen los valores de a, b y c de la ecuación:

$$a = 1,\ b = 4 \text{ y } c = 3$$

Estos valores se sustituyen en la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Por tanto, las raíces son: – 1 y – 3, la respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 2

Las soluciones de la ecuación $2x^2 - 6x - 20 = 0$ son:

a) 7, – 1 b) 4, – 3 c) 5, – 2 d) 5, – 4

Solución:

Se obtienen los valores de a, b y c de la ecuación.

$$a = 2,\ b = -6 \text{ y } c = -20$$

Estos valores se sustituyen en la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(-20)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{6 \pm 14}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+14}{4} = \dfrac{20}{4} = 5 \\ x_2 = \dfrac{6-14}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son: 5 y – 2, la respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 3

Los valores que satisfacen la ecuación $x^2 + 5x = 0$ son:

a) 25, 5 b) 5, – 1 c) 0, 5 d) 0, – 5

Solución:

Se obtienen los valores de a, b y c.

$$a = 1,\ b = 5 \text{ y } c = 0$$

Se sustituyen los valores en la fórmula general.

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-5 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+5}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ x_2 = \dfrac{-5-5}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Los valores que satisfacen la ecuación son: 0 y – 5, la respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 4

Las raíces de la ecuación $4x^2 - 16 = 0$ son:

a) 2 y – 2 b) 4 y – 4 c) 1 y – 1 d) 8 y – 8

Solución:

Se obtienen los valores de a, b y c:

$$a = 4,\ b = 0 \text{ y } c = -16$$

Se aplica la fórmula general,

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(4)(-16)}}{2(4)} = \frac{-0 \pm \sqrt{0+256}}{8} = \frac{-0 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-0 \pm 16}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-0+16}{8} = \dfrac{16}{8} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-0-16}{8} = \dfrac{-16}{8} = -2 \end{cases}$$

Las raíces de la ecuación son: 2 y – 2, la respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 5

Los valores que satisfacen la ecuación $4x^2 + 5x = 81 + 5x$ son:

a) $\frac{9}{4}$ y $-\frac{9}{4}$ b) $\frac{9}{2}$ y $-\frac{9}{2}$ c) $\frac{9}{8}$ y $-\frac{9}{8}$ d) $\frac{9}{16}$ y $-\frac{9}{16}$

Solución:

Se iguala a cero la ecuación y se simplifican los términos semejantes:

$$4x^2 + 5x = 81 + 5x \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 5x - 81 - 5x = 0$$
$$4x^2 - 81 = 0$$

Se obtienen los valores de a, b y c para sustituirlos en la fórmula general:

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(4)(-81)}}{2(4)} = \frac{-0 \pm \sqrt{1296}}{8} = \frac{-0 \pm 36}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-0+36}{8} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2} \\ x_2 = \dfrac{-0-36}{8} = \dfrac{-36}{8} = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 6

Las soluciones de la ecuación $2x^2 + ax = 6ax + 3a^2$ son:

a) $-3a,\ -\frac{a}{2}$ b) $3a,\ -\frac{a}{2}$ c) $3a,\ \frac{a}{2}$ d) $-3a,\ \frac{a}{2}$

Solución:

Se iguala la ecuación con cero y se determinan los valores de a, b y c,

$$2x^2 + ax = 6ax + 3a^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + ax - 6ax - 3a^2 = 0$$
$$2x^2 - 5ax - 3a^2 = 0$$

donde: $a = 2$, $b = -5a$ y $c = -3a^2$, aplicando la fórmula general

$$x = \frac{-(-5a) \pm \sqrt{(-5a)^2 - 4(2)(-3a^2)}}{2(2)} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 + 24a^2}}{4} = \frac{5a \pm \sqrt{49a^2}}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{5a+7a}{4} = \dfrac{12a}{4} = 3a \\ x_2 = \dfrac{5a-7a}{4} = \dfrac{-2a}{4} = -\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Factorización

Ejemplo 1

Las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ son:

a) $-5, 4$ b) $4, 5$ c) $-5, -4$ d) $-4, 5$

Solución:

Se factoriza el trinomio:

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)(x-4) = 0$$

$$x - 5 = 0,\; x - 4 = 0$$

$$x = 5,\; x = 4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una solución de la ecuación $3x^2 - 4x = 0$ es:

a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

Solución:

Se factoriza la expresión:

$$3x^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x(3x-4) = 0$$

$$x = 0,\; 3x - 4 = 0$$

$$x = 0,\; x = \frac{4}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Las soluciones de la ecuación $4x^2 - 9 = 0$

a) $\pm\frac{2}{3}$ b) $\pm\frac{3}{2}$ c) $\pm\frac{9}{4}$ d) $\pm\frac{5}{2}$

Solución:

La ecuación a resolver es cuadrática pura, por tanto, se aplica diferencia de cuadrados:

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad (2x+3)(2x-3) = 0$$

$$2x + 3 = 0,\; 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2},\quad x = \frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Completando trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo 1

Una de las soluciones de la ecuación $m^2 - 8m - 20 = 0$ es:

a) – 10 b) 6 c) – 2 d) 4

Solución:

Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$m^2 - 8m - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 8m = 20 \quad \rightarrow \quad m^2 - 8m + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$m^2 - 8m + 16 = 20 + 16$$

$$(m-4)^2 = 36$$

$$m - 4 = \pm\sqrt{36}$$

$$m - 4 = \pm 6$$

De esta expresión se obtienen las soluciones de la ecuación:

$$m - 4 = 6 \quad ; \quad m - 4 = -6$$

$$m = 6 + 4 \qquad m = -6 + 4$$

$$m = 10 \qquad m = -2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Una expresión que permite encontrar las raíces de $x^2 + 3x - 10 = 0$ es:

a) 2, 4 b) – 2, 4 c) – 2, – 4 d) 2, – 4

Solución:

Se completa el trinomio cuadrado perfecto y se despeja "x":

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x = 10 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

De esta expresión se obtienen las raíces de la ecuación:

$$x + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \qquad x + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \qquad x = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x = 2 \qquad x = -4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Variación proporcional

Es la relación que guardan dos cantidades.

Ejemplos:

El tanto por ciento de una cantidad.

La distancia recorrida en un determinado tiempo.

Al recorrer cierta distancia, a mayor velocidad, menor tiempo se emplea.

El precio por kilogramo de cierto artículo.

La variación proporcional se clasifica en:

- Variación directamente proporcional.
- Variación inversamente proporcional.

a) Directamente proporcional

Si "A" es directamente proporcional a "B", entonces,

$$A = kB$$

donde,

k: constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

La cantidad de tortilla que se consume por día en una ciudad varía en proporción directa con su población. Si se consumen 7.5 toneladas en una ciudad de 30 mil habitantes, ¿cuántas toneladas de tortilla se consumen en una ciudad de 50 mil habitantes?

a) 8.2 ton. b) 9.6 ton c) 10.5 ton d) 12.5 ton.

Solución:

Sean T: número de toneladas y h: número de habitantes, si "T" varía en proporción directa con "h", entonces,

$$T = kh$$

cuando T = 7.5, h = 30,000

$$7.5 = 30{,}000k \quad \rightarrow \quad k = \frac{7.5}{30{,}000} = \frac{1}{4000}$$

por tanto, la relación entre "T" y "h" es:

$$T = \frac{1}{4000}h$$

Luego, si h = 50,000

$$T = \frac{1}{4000}h = \frac{1}{4000}(50{,}000) = \frac{50{,}000}{4000} = 12.5$$

Esto es, en una ciudad de 50 mil habitantes, se consumirán 12.5 toneladas de tortillas, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Un automóvil viaja a velocidad constante. Si recorre 280 km en cuatro horas, ¿qué distancia recorrerá en dos horas 30 min?

a) 125 km b) 150 km c) 175 km d) 200 km

Solución:

La distancia (d) es directamente proporcional al tiempo (t), entonces,

$$d = kt$$

si d = 280 km, t = 4 hr,

$$280 = 4k \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{280}{4} = 70$$

por tanto, la relación entre "d" y "t" es,

$$d = 70t$$

luego, si t = 2hr 30 min = 2.5 hr,

$$d = 70(2.5) = 175$$

en dos horas 30 min la distancia recorrida será de 175 km. La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La ecuación que corresponde a la oración: "y" varía en proporción directa con el cuadrado de "x", es:

a) $y = kx$ b) $y = kx^2$ c) $y = \frac{k}{x^2}$ d) $y = \frac{x^2}{k}$

Solución:
Al establecer la igualdad, se obtiene:

$$y = kx^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

b) Inversamente proporcional

Si "A" es inversamente proporcional a "B", entonces:

$$A = \frac{k}{B}$$

Donde
k: constante de proporcionalidad

Ejemplo 1
Un automóvil emplea cuatro horas en ir de la ciudad P a la ciudad M con una velocidad constante de 80 km/hr. Si la velocidad varía en proporción inversa al tiempo, ¿qué velocidad debe llevar el automóvil para tardar 2.5 hr en ir de la ciudad P a la ciudad M?

a) 75 km/hr b) 90 km/hr c) 112 km/hr d) 128 km/hr

Solución:

Sean v: velocidad del automóvil y t: tiempo que emplea para ir de una ciudad a otra, entonces,

$$v = \frac{k}{t}$$

cuando v = 80 km/hr, t = 4 hr,

$$80 = \frac{k}{4} \qquad \rightarrow \qquad k = 320$$

por tanto,

$$v = \frac{320}{t}$$

si t = 2.5, entonces $v = \frac{320}{2.5} = 128$ km/hr, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La demanda de un juego de video varía en proporción inversa al precio del video. Si se venden 8 mil juegos a $300.00 c/u, ¿cuántos juegos de video se venderán si se venden a $250.00?

a) 5600 b) 7500 c) 9600 d) 10000

Solución:

Sean D: demanda de juegos de video y P: precio por juego, entonces,

$$D = \frac{k}{P}$$

cuando D = 8000, P = $300.00

$$8000 = \frac{k}{300} \qquad \rightarrow \qquad k = (8000)(300) = 2400000$$

por tanto la relación que existe entre la demanda del juego y el precio del juego es:

$$D = \frac{2400000}{P}$$

si P = $ 250.00

$$D = \frac{2400000}{P} = \frac{2400000}{250} = 9600$$

esto es, si el precio del video juego es de $ 250.00 la demanda sería de 9 mil 600 juegos, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La ecuación que corresponde a la oración: la aceleración "a" de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza "F" que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa "m".

a) $a = kFm$ b) $a = \frac{kF}{m}$ c) $a = \frac{km}{F}$ d) $a = \frac{m}{kF}$

Solución:

Al establecer la igualdad, se obtiene:

$$a = \frac{kF}{m}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

La ley de la gravitación universal, establece que:

Una partícula atrae a otra con una fuerza (F) directamente proporcional al producto de las masas de las partículas (m_1 y m_2), e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (r) entre ellas.

La ecuación que representa esta ley es:

a) $F = k\frac{r}{m_1m_2}$ b) $F = k\frac{m_1m_2}{r}$ c) $F = k\frac{r^2}{m_1m_2}$ d) $F = k\frac{m_1m_2}{r^2}$

Solución:

Al establecer la igualdad, se obtiene,

$$F = k\frac{m_1m_2}{r^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. El resultado de $6-[8-\{6-(8-10)+(3+4)-12\}-10]$,es:

   a) 11 b) 8 c) -11 d) -8

2. El resultado de $5-[2(5-2)-4(1-3)]$,es:

   a) 9 b) -9 c) 8 d) -8

3. Al resolver $2[6-(8-3)-2(3-4)+1]$, se obtiene:

   a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

4. El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 120, 180 ,es:

   a) 120 b) 180 c) 300 d) 360

5. El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 72, 96 ,es:

   a) 144 b) 96 c) 288 d) 304

6. El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 48, 54, 36 ,es:

   a) 54 b) 432 c) 48 d) 36

7. El máximo común divisor (M. C. D.) de 24, 36 , 40, es:

   a) 24 b) 4 c) 6 d) 8

8. El máximo común divisor (M. C. D.) de 18, 12, 15, es:

   a) 3 b) 6 c) 12 d) 5

9. El máximo común divisor (M. C. D.) de 48, 54, 36, es:

   a) 6 b) 8 c) 9 d) 4

10. El resultado de $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{10}$,es:

    a) $\frac{7}{20}$ b) $\frac{15}{240}$ c) $\frac{80}{60}$ d) $\frac{89}{60}$

11. ¿Cuál es el resultado de $\frac{7}{4}-\frac{1}{2}+3$?

    a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{17}{4}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{17}{2}$

12. El resultado de $2\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}$,es:

    a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{4}{3}$

13. ¿Cuál es el resultado de $\frac{3-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}$?

    a) $\frac{33}{4}$ b) $\frac{33}{2}$ c) $\frac{33}{8}$ d) $\frac{33}{12}$

14. ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{4+\frac{2}{3}}{\frac{7}{6}-\frac{1}{2}}$?

a) 8 b) 9 c) 7 d) 3

15. Calcular el valor de: $|3-4| - |10-6|$

a) 2 b) 4 c) 5 d) -3

16. El resultado de $|5| - |8| + |6|$,es:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

17. La expresión que representa el enunciado " La suma de los cuadrados de dos números" ,es:

a) $x^2 + y^2$ b) $(x+y)^2$ c) $x^2 - y^2$ d) $x + y$

18. "El cuadrado de un número más la quinta parte de otro número". La expresión algebraica que representa el enunciado anterior ,es:

a) $2x + \frac{1}{5}y$ b) $4x + \frac{1}{5}y$ c) $x^2 + 5y$ d) $x^2 + \frac{1}{5}y$

19. "El cuadrado de la suma de dos números es igual al triple de uno de los números menos la quinta parte del otro". La expresión que representa dicho enunciado, es:

a) $(a+b)^2 = 3a - 5b$ b) $(a+b)^2 = 3a - \frac{1}{5}b$ c) $a^2 + b^2 = 3a - \frac{1}{5}b$ d) $a + b = 3a - \frac{1}{5}b$

20. La expresión que representa el enunciado "La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos números" ,es:

a) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ b) $\sqrt{x+y}$ c) $\sqrt{x^2+y^2}$ d) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

21. "La suma de los cuadrados de dos números multiplicada por su diferencia". La expresión matemática que representa el enunciado anterior ,es:

a) $(x+y)^2(x-y)$ b) $(x^2+y^2)(x+y)$ c) $(x^2+y^2)(x-y)$ d) $(x^2-y^2)(x+y)$

22. Sumar $5x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ con $4x^3 - 10x + 10$

a) $9x^3 - 6x^2 + 2x + 3$ b) $9x^3 + 2x + 3$ c) $9x^3 + 6x^2 - 2x - 3$ d) $9x^3 + 6x^2 - 2x - 3$

23. Al sumar $6a^4 - 10a^3 - 12a^2 - 6a + 3$ con $3a^4 - 2a^3 - 6a^2 + 6a - 7$,se obtiene:

a) $9a^4 - 12a^3 + 18a^2 + 4$ b) $9a^4 - 12a^3 - 18a^2 - 4$
c) $6a^4 - 12a^3 - 18a^2 - 4$ d) $6a^4 + 12a^3 + 18a^2 + 4$

24. Sumar $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$ con $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$

a) $2x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{3}{2}$ b) $4x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{3}{2}$ c) $2x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{3}{2}$ d) $4x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{3}{2}$

25. Al sumar $\frac{3}{2}a^3 - \frac{5}{3}a^2 + \frac{5}{2}a - \frac{1}{4}$ con $\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{4}$, se obtiene:

a) $\frac{3}{4}a^2 - \frac{4}{3}a - \frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{2}a^3 + \frac{4}{3}a^2 + \frac{7}{3}a$ c) $\frac{3}{4}a^2 - \frac{4}{3}a - \frac{7}{3}$ d) $\frac{3}{2}a^3 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{7}{3}a$

26. Al restar $2x^3 - 7x^2 + 2x - 10$ de $9x^3 - 6x^2 - 2x - 6$, se obtiene:

a) $11x^3 - 13x^2 - 16$ b) $7x^3 + x^2 - 4x + 4$
c) $-7x^3 - x^2 + 4x - 4$ d) $11x^3 + 13x^2 - 16$

27. Al restar $8x^3 - 12x^2 - 12x + 3$ de $10x^3 - 12x^2 - 4x + 2$, se obtiene:

a) $2x^3 + 8x - 1$ b) $-2x^3 - 8x + 1$ c) $18x^3 - 24x^2 - 6x + 5$ d) $18x^3 - 16x + 5$

28. De $4x^4 - 6x^2 - 2x - 8$ restar $12x^4 - 2x^3 + 10x - 5$

a) $16x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x - 13$ b) $-8x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 12x - 3$
c) $8x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 3$ d) $-16x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x - 13$

29. De $2m^2 - 3m - 10$ restar $4m^2 + 10m - 4$

a) $-2m^2 - 13m - 6$ b) $2m^2 + 13m - 6$ c) $2m^2 - 13m + 6$ d) $-2m^2 - 13m$

30. El resultado de $(2x^4y)(5xy)$, es:

a) $10x^5y^2$ b) $7x^5y^2$ c) $10x^4y$ d) $7x^4y$

31. Al resolver $(5a^3b^2c)(-3a^2bc^5)$, se obtiene:

a) $-15a^6b^2c^5$ b) $-2a^5b^3c^6$ c) $2a^5b^3c^6$ d) $-15a^5b^3c^6$

32. El resultado de $(-4xz)(2x^5y^2z)(-3xy)$, es:

a) $-5x^7y^3z^2$ b) $24x^7y^3z^2$ c) $24x^5y^2z$ d) $-5x^5y^2z$

33. El resultado de $(5a^3b)(3a^2b^5 - 6ab^4)$, es:

a) $15a^6b^5 - 30a^3b^4$ b) $15a^5b^6 - 30a^4b^5$ c) $8a^5b^6 - a^4b^5$ d) $8a^6b^5 - a^4b^5$

34. Al resolver $\left(\frac{2}{3}x^2y\right)\left(-\frac{1}{4}xy\right)$, se obtiene:

a) $-\frac{1}{6}x^2y$ b) $\frac{1}{6}x^2y$ c) $-\frac{1}{6}x^3y^2$ d) $\frac{1}{6}x^3y^2$

35. Al resolver $(4x^{2a+1}y^{3a})(-5x^{3a-2}y^4)$, se obtiene:

a) $-20x^{5a-1}y^{3a+4}$ b) $20x^{5a-1}y^{3a-4}$ c) $-20x^{6a+2}y^{12a}$ d) $-20x^{6a+2}y^{12a}$

36. El resultado de $(-3a^{2x-4}b^{3x+1})(-2a^{x+1}b^{2x-3})$, es:

a) $-5a^{3x-3}b^{5x-2}$ b) $6a^{3x-3}b^{5x-2}$ c) $-a^{3x-3}b^{5x-2}$ d) $20a^{2x}$

37. Al multiplicar $5x - 6$ con $3x + 4$, se obtiene:

a) $15x^2 + 2x - 24$ b) $15x^2 - 2x - 24$ c) $-15x^2 - 2x - 24$ d) $-15x^2 + 2x + 24$

38. Al resolver $(2m - 7)(4m - 3)$, se obtiene:

a) $8m^2 - 34m - 21$ b) $8m^2 + 34m + 21$ c) $-8m^2 - 34m - 21$ d) $8m^2 - 34m + 21$

39. El resultado de $(3x^2 - 5x - 2)(2x - 5)$, es:

a) $6x^3 - 25x^2 + 21x + 10$ b) $6x^3 + 25x^2 - 21x - 10$
c) $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$ d) $6x^3 - 25x^2 - 21x - 10$

40. Al resolver $(3m^2 - 5m - 6)(2m^2 + 8m - 7)$, se obtiene:

a) $6m^4 + 14m^3 - 73m^2 - 13m + 42$ b) $6m^4 + 14m^3 + 73m^2 + 13m - 42$
c) $-6m^4 + 14m^3 - 73m^2 - 13m + 42$ c) $6m^4 - 14m^3 - 73m^2 + 13m + 42$

41. Al multiplicar $(4a^2 - 5ab - 7b^2)(4a - 6b)$, se obtiene:

a) $16a^3 + 44a^2b - 2ab^2 - 42b^3$ b) $16a^3 - 44a^2b - 2ab^2 + 42b^3$
c) $16a^3 - 44a^2b + 2ab^2 + 42b^3$ d) $16a^3 + 44a^2b + 2ab^2 + 42b^3$

42. Al simplificar $\dfrac{18x^5y^8z^4}{-9x^3y^5z^2}$,se obtiene:

a) $-9x^2y^3z^2$ b) $-2x^2y^3z^2$ c) $2x^2y^3z^2$ d) $9x^2y^3z^2$

43. Al simplificar $\dfrac{6a^4b^5c^2}{4a^3b^3c^2}$,se obtiene:

a) $-\dfrac{3}{2}a^7b^8$ b) $\dfrac{3}{2}a^7b^8$ c) $-\dfrac{3}{2}ab^2$ d) $\dfrac{3}{2}ab^2$

44. El resultado de $\dfrac{8a^{3x-4}b^{2y+1}c^{3z}}{-2a^{2x+1}b^{y-4}c^4}$,es:

a) $4a^{5x-3}b^{3y-3}c^{3z-4}$ b) $4a^{x-5}b^{y-5}c^{3z-4}$ c) $-4a^{x-5}b^{y+5}c^{3z-4}$ d) $-4a^{5x-3}b^{3y-3}c^{3z+4}$

45. Al simplificar $\dfrac{20x^6y^5-12x^5y^4-8x^3y^3}{-2x^2y^3}$, se obtiene:

a) $10x^4y^2+6x^3y+4x$
b) $10x^4y^2-6x^3y-4x$
c) $-10x^4y^2-6x^3y+4x$
d) $-10x^4y^2+6x^3y+4x$

46. Dividir $12x^5y^4-18x^4y^6$ por $-6x^2y^3$

a) $-2x^3y+3x^2y^3$ b) $2x^2-3x^2y^3$ c) $6x^2-12x^2y^3$ d) $-6x^2-12x^2y^3$

47. Dividir $a^{3m-5}b^{5m-4}-2a^{2m+3}b^{3m}$ por $a^{m+1}b^2$

a) $a^{2m-6}b^{5m-6}+2a^{m+2}b^{3m-2}$
b) $4a^{2m-6}b^{5m-6}-3a^{m+2}b^{3m-2}$
c) $-a^{2m-6}b^{5m-6}-2a^{m+2}b^{3m-2}$
d) $a^{2m-6}b^{5m-6}-2a^{m+2}b^{3m-2}$

48. Al simplificar $\dfrac{10x^{5a-4}y^{6a+1}-8x^{4a-3}y^{5a-4}}{-4x^{2a-3}y^{4a-1}}$, se obtiene:

a) $-\dfrac{5}{2}x^{3a-1}y^{2a}+2x^{2a+6}y^{a-5}$
b) $\dfrac{5}{2}x^{3a-1}y^{2a}-2x^{2a+6}y^{a-5}$
c) $-\dfrac{5}{2}x^{2a-1}y^{2a-3}+2xy$
d) $-\dfrac{5}{2}x^{2a-1}y^{2a-3}-2xy$

49. El resultado de $\dfrac{4x^3-16x^2+3x+18}{2x-3}$, es:

a) $-2x^2+5x+6$ b) $-2x^2-5x-6$ c) $2x^2-5x-6$ d) $2x^2+5x+6$

50. Al dividir $2a^4-a^3-21a^2+7a+4$ entre $2a^2+5a-4$ se obtiene:

a) $-a^2-3a-1$ b) a^2-3a+1 c) a^2+3a+1 d) a^2-3a-1

51. El resultado de $\dfrac{8x^2+22x-21}{2x+7}$, es:

a) $4x+3$ b) $4x-3$ c) $3x-4$ d) $3x+4$

52. Al dividir $10a^3-31a^2b+ab^2+35b^3$ entre $2a-5b$, se obtiene:

a) $-5a^2-3ab-7b^2$ b) $5a^2-3ab+7b^2$ c) $5a^2-3ab-7b^2$ d) $5a^2+3ab+7b^2$

53. Al simplificar $\dfrac{12m^2 - 16mn + 5n^2}{6m - 5n}$, se obtiene:

a) $2m - n$ b) $2m + n$ c) $2n - m$ d) $2n + m$

54. El resultado de $(5x - 4)^2$, es:

a) $25x^2 - 16$
b) $25x^2 + 40x + 16$
c) $25x^2 + 16$
d) $25x^2 - 40x + 16$

55. Al multiplicar los siguientes binomios $(3x + 4)(3x - 4)$, se obtiene:

a) $6x^2 - 8$ b) $6x^2 + 8$ c) $9x^2 - 16$ d) $9x^2 + 16$

56. Al desarrollar $(3x - 7)^2$, se obtiene:

a) $9x^2 - 49$
b) $9x^2 - 42x + 49$
c) $9x^2 + 49$
d) $9x^2 + 42x + 49$

57. El resultado de $(x - 6)(x + 4)$, es:

a) $x^2 - 2x - 24$
b) $x^2 - 10x - 24$
c) $x^2 - 24$
d) $x^2 + 24$

58. Al desarrollar $(3x + 4)^2$, se obtiene:

a) $9x^2 + 24x + 16$
b) $9x^2 + 16$
c) $6x^2 + 10x + 8$
d) $6x^2 + 16$

59. Al multiplicar los siguientes binomios $(5x^3 - 9)(5x^3 + 9)$, se obtiene:

a) $10x^6 - 18$ b) $25x^6 - 81$ c) $10x^6 + 18$ d) $25x^6 + 81$

60. El desarrollo de $(5x^4 - 2y^3)^3$, es:

a) $125x^{12} - 4y^9$
b) $125x^{64} - 8y^9$
c) $125x^8 - 150x^8y^3 + 60x^4y^6 - 8y^9$
d) $125x^8 + 150x^8y^3 + 60x^4y^6 + 8y^9$

61. El resultado de $\left(\dfrac{3}{5}x - \dfrac{2}{3}\right)^2$, es:

a) $\dfrac{9}{25}x^2 - \dfrac{4}{9}$
b) $\dfrac{9}{25}x^2 + \dfrac{4}{9}$
c) $\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{9}$
d) $\dfrac{9}{25}x^2 - \dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{9}$

62. El resultado de $(3m - 7)(3m + 5)$, es:

a) $9m^2 - 35$
b) $6m^2 - 35$
c) $9m^2 - 36m - 35$
d) $9m^2 - 6m - 35$

63. El resultado de $\left(\dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{1}{5}\right)$, es:

a) $\dfrac{6}{8}x^6 - \dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{6}{8}x^6 + \dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{9}{16}x^6 - \dfrac{1}{25}$ d) $\dfrac{9}{16}x^6 + \dfrac{1}{25}$

64. El desarrollo de $\left(\frac{1}{5}x^4 - 3y\right)^3$, es:

a) $\frac{1}{125}x^{12} - 9y^3$

b) $\frac{1}{125}x^{12} - \frac{9}{25}x^8y + \frac{27}{5}x^4y^2 - 27y^3$

c) $\frac{x^{12}}{125} + 9y^3$

d) $\frac{1}{125}x^{12} + \frac{9}{25}x^8y + \frac{27}{5}x^4y^2 + 27y^3$

65. El resultado de $(5m^4 - 3m^2n)^3$, es:

a) $125m^{12} - 225m^{10}n + 135m^8n^2 - 27m^6n^3$

b) $15m^6 - 225m^{10}n + 135m^8n^2 - 9m^6n^3$

c) $125m^{12} + 225m^{10}n + 135m^8n^2 + 27m^6n^3$

d) $15m^6 + 225m^{10}n + 135m^8n^2 + 9m^6n^3$

66. Al desarrollar $\left(\frac{5}{2}a^2 - 3ab\right)^2$, se obtiene:

a) $\frac{25}{4}a^4 - 15a^3b + 9a^2b^2$

b) $\frac{25}{4}a^4 + 15a^3b + 9a^2b^2$

c) $\frac{25}{4}a^4 - 9a^2b^2$

d) $\frac{25}{4}a^4 + 9a^2b^2$

67. Al multiplicar los siguientes binomios $\left(\frac{6x}{m} - 5y^2\right)\left(\frac{6x}{m} + 5y^2\right)$, se obtiene:

a) $\frac{36x^2}{m^2} + 25y^4$ b) $\frac{36x^2}{m^2} - 25y^4$ c) $\frac{12x^2}{m^2} - 10y^4$ d) $\frac{12x^2}{m^2} + 10y^4$

68. El resultado de $(x - 10)(x + 8)$, es:

a) $x^2 - 80$

b) $x^2 - 18$

c) $x^2 - 2x - 80$

d) $x^2 - 18x - 80$

69. El resultado de $(3a + 5)^2$, es:

a) $9a^2 + 25$

b) $6a^2 - 8a + 10$

c) $9a^2 - 25$

d) $9a^2 + 30a + 25$

70. Al multiplicar los siguientes binomios $(9m + 8)(9m - 8)$, se obtiene:

a) $18m^2 - 16$ b) $18m^2 + 16$ c) $81m^2 + 64$ d) $81m^2 - 64$

71. Al desarrollar $(4x^5 + 3y^3)^3$, se obtiene:

a) $12x^{15} + 144x^{10}y^3 + 108x^5y^6 + 9y^9$

b) $12x^{15} - 144x^{10}y^3 + 108x^5y^6 - 9y^9$

c) $64x^{15} + 144x^{10}y^3 + 108x^5y^6 + 27y^9$

d) $64x^{15} - 144x^{10}y^3 + 108x^5y^6 - 27y^9$

72. Al desarrollar $(3a^4b + 2ac^4)^2$

a) $9a^8b^2 - 12a^5bc^4 + 4a^2c^8$ b) $9a^8b^2 + 12a^5bc^4 + 4a^2c^8$ c) $9a^8b^2 + 4a^2c^8$ d) $9a^8b^2 - 4a^2c^8$

73. Al multiplicar los siguientes binomios $(3b^5 - 10c)(3b^5 + 10c)$, se obtiene:

a) $6b^{10} - 20c^2$ b) $6b^{10} + 20c^2$ c) $9b^{10} - 100c^2$ d) $9b^{25} - 100c^2$

74. El desarrollo de $(4x^4 + xy^3)^2$

a) $16x^8 + x^2y^6$ b) $16x^8 - x^2y^6$ c) $16x^8 - 8x^5y^3 + x^2y^6$ d) $16x^8 + 8x^5y^3 + x^2y^6$

75. El resultado de $\left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}ab^5\right)^2$, es:

a) $\frac{1}{16}a^8 - \frac{4}{9}a^2b^{10}$
b) $\frac{1}{16}a^8 - \frac{1}{3}a^5b^5 + \frac{4}{9}a^2b^{10}$
c) $\frac{1}{16}a^8 + \frac{4}{9}a^2b^{10}$
d) $\frac{1}{16}a^8 + \frac{1}{3}a^5b^5 + \frac{4}{9}a^2b^{10}$

76. El resultado de $(6\,a^4 - 7b^3)\,(6\,a^4 + 7b^3)$, es:

a) $12\,a^8 - 14b^6$ b) $12\,a^8 + 14b^6$ c) $36\,a^8 - 49b^6$ d) $36\,a^8 + 49b^6$

77. Al desarrollar $\left(\frac{2}{3}a^5b + 5b^4\right)^3$

a) $\frac{8}{27}a^{15}b^3 + \frac{20}{3}a^{10}b^6 + 50a^5b^9 + 125b^{12}$
c) $\frac{8}{27}a^{15}b^3 + 125b^{12}$
b) $\frac{8}{27}a^{15}b^3 - \frac{20}{3}a^{10}b^6 + 50a^5b^9 - 125b^{12}$
d) $\frac{8}{27}a^{15}b^3 - 125b^{12}$

78. El resultado de $(6a^4 - 3\,a^2c^4)^3$, es:

a) $216\,a^{12} + 324\,a^{10}c^4 + 162\,a^8c^8 + 27\,a^6c^{12}$
b) $216\,a^{12} - 324\,a^{10}c^4 + 162\,a^8c^8 - 27\,a^6c^{12}$
c) $216\,a^{12} - 27\,a^6c^{12}$
d) $216\,a^{12} + 27\,a^6c^{12}$

79. El resultado de $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$, es:

a) $x + y$ b) $x - y$ c) $x^2 - y^2$ d) $x^2 + y^2$

80. Al resolver $\left(x^2 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + 3\sqrt{2}\right)$, se obtiene:

a) $x^4 - 2\sqrt{2}\,x^2 + 6$
b) $x^4 - 3\sqrt{4}$
c) $x^4 + 2\sqrt{2}\,x^2 - 6$
d) $x^4 + 3\sqrt{4}$

81. Al factorizar $x^2 - 5x - 6$, se obtiene:

a) $(x - 6)\,(x + 1)$ b) $(x - 6)\,(x - 1)$ c) $(x + 6)\,(x + 1)$ d) $(x + 6)\,(x - 1)$

82. La factorización de $3x^4 - 5x^3 - 2x^2$, es:

a) $x(3x^2 - 5x - 2)$ b) $x^2(3x^2 - 5x - 2)$ c) $x^2(3x^3 - 5x^2 - 2x)$ d) $x(3x^3 - 5x^2 - 2)$

83. Una expresión equivalente a $16m^2 - 25$, es:

a) $(4m + 5)^2$ b) $(4m - 5)^2$ c) $(4m + 5)\,(4m - 5)$ d) $(4m - 5)\,(4m - 5)$

84. Al factorizar $36\,a^4 - 60\,a^2b + 25b^2$, se obtiene:

a) $(6a^2 + 5b)(6a^2 - 5b)$ b) $6\,a^2 - 5b$ c) $(6\,a^2 + 5b)^2$ d) $(6\,a^2 - 5b)^2$

85. La factorización de $ax + ay + bx + by$, es:

a) $(a + b)(x - y)$ b) $(a - b)(x + y)$ c) $(a - b)(x - y)$ d) $(a + b)(x + y)$

86. Una expresión equivalente a $3x^2 - 5x - 2$, es:

a) $(x - 2)\,(3x - 1)$ b) $(x + 2)\,(3x + 1)$ c) $(x - 2)\,(3x + 1)$ d) $(x + 2)\,(3x - 1)$

87. La factorización de $8m^3 - 27$, es:

a) $(2m + 3)\,(4m^2 - 6m + 9)$
b) $(2m - 3)\,(4m^2 + 6m + 9)$
c) $(2m + 3)^3$
d) $(2m - 3)^3$

88. Una expresión equivalente a $4m^2 - 6m$, es:

a) $2m(2m - 3)$ b) $2m(2m + 3)$ c) $4m(2m - 3)$ d) $4m(2m + 3)$

89. Al factorizar $49m^6 - 36n^8$, se obtiene:

a) $(7m^3 + 6n^4)(7m^3 - 6n^4)$ b) $(7m^3 + 6n^4)^2$
c) $(7m^3 + 6n^4)(7m^3 + 6n^4)$ d) $(7m^3 - 6n^4)^2$

90. Una expresión equivalente a $m^2 - m - 20$, es:

a) $(m + 5)(m - 4)$ b) $(m + 5)(m + 4)$ c) $(m - 5)(m + 4)$ d) $(m - 5)(m - 4)$

91. Al factorizar $3x^2 - 6x - 5x + 10$, se obtiene:

a) $(x + 2)(3x - 5)$ b) $(x - 2)(3x - 5)$ c) $(x - 2)(3x + 5)$ d) $(x + 2)(3x + 5)$

92. La factorización de $x^3 - 1$, es:

a) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ b) $(x - 1)^3$
c) $(x - 1)(x^2 - x + 1)$ d) $(x + 1)^3$

93. Una expresión equivalente a $m^6 + 10m^3 + 25$, es:

a) $m^3 + 5$ b) $m^3 - 5$ c) $(m^3 + 5)^2$ d) $(m^3 - 5)^2$

94. Factorizar $a(x - y) - b(x - y)$, se obtiene:

a) $(x - y)(a + b)$ b) $(x - y)(a - b)$ c) $(x + y)(a + b)$ d) $(x + y)(a - b)$

95. La factorización de $m(a + b) - n(a + b) + p(a + b)$

a) $(a + b)(m + n + p)$ b) $(a - b)(m + n + p)$
c) $(a + b)(m + n - p)$ d) $(a + b)(m - n + p)$

96. Una expresión equivalente a $y^2 - 9y + 14$ es:

a) $(y - 7)(y - 2)$ b) $(y + 7)(y - 2)$ c) $(y + 7)(y + 2)$ d) $(y - 7)(y + 2)$

97. La factorización de $64a^6b^2 - 49c^4$, es:

a) $(8a^3b + 7c^2)(8a^3b + 7c^2)$ b) $(8a^3b + 7c^2)^2$
c) $(8a^3b + 7c^2)(8a^3b - 7c^2)$ d) $(8a^3b - 7c^2)^2$

98. La factorización de $20y^2 - y - 1$, es:

a) $(4y + 1)(5y - 1)$ b) $(4y + 1)(5y + 1)$ c) $(4y - 1)(5y + 1)$ d) $(4y - 1)(5y - 1)$

99. Al factorizar $x^2 - 11x + 30$, es:

a) $(x + 6)(x + 5)$ b) $(x - 6)(x + 5)$ c) $(x + 6)(x - 5)$ d) $(x - 6)(x - 5)$

100. Al factorizar $x^2 - x$, se obtiene:

a) $x(x + 1)$ b) $x(x - 1)$ c) $x^2(x - 1)$ d) $x^2(x + 1)$

101. Al simplificar $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 36}$, se obtiene:

a) $\dfrac{x-1}{x-6}$ b) $\dfrac{x+1}{x-6}$ c) $\dfrac{x-1}{x+6}$ d) $\dfrac{x+1}{x+6}$

102. La simplificación de $\frac{m^2-36}{5m+30}$, es:

a) $\frac{m+6}{5}$ b) $\frac{m-6}{5}$ c) $\frac{m}{m+6}$ d) $\frac{m}{m-6}$

103. Al simplificar $\frac{x-1}{x^2-5x+4}$, se obtiene:

a) $\frac{1}{x+5}$ b) $\frac{1}{x-5}$ c) $\frac{1}{x-4}$ d) $\frac{1}{x+4}$

104. La simplificación de $\frac{x^3+8}{x^2-4}$, es:

a) $\frac{x^2-2x+4}{x+2}$ b) $\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ c) $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$ d) $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$

105. La simplificación de $\frac{2x^2-5x-3}{x^2-3x}$

a) $\frac{x-1}{x}$ b) $\frac{x+1}{x}$ c) $\frac{2x+1}{x}$ d) $\frac{2x-1}{x}$

106. Al simplificar $\frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})^2}{x^2-5}$, se obtiene:

a) $x-\sqrt{5}$ b) $x+\sqrt{5}$ c) $x-5$ d) $x+5$

107. Al reducir $\frac{x+\sqrt{7}}{x^2-7}$, es:

a) $\frac{1}{x+7}$ b) $\frac{1}{x-7}$ c) $\frac{1}{x-\sqrt{7}}$ d) $\frac{1}{x+\sqrt{7}}$

108. Al resolver $\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x+3}$, se obtiene:

a) $\frac{x+10}{(x-3)(x+3)}$ b) $\frac{x+27}{(x-3)(x+3)}$ c) $\frac{x-27}{(x-3)(x+3)}$ d) $\frac{x-10}{(x-3)(x+3)}$

109. El resultado de $\frac{2}{x-5}-\frac{6}{x^2-7x+10}$, es:

a) $\frac{2}{x-5}$ b) $\frac{2}{x+2}$ c) $\frac{2}{x-2}$ d) $\frac{2}{x+5}$

110. Al resolver $\left(\frac{x^2-8x+15}{x^2-2x}\right)\left(\frac{x^2+x-6}{x^2-9}\right)$, se obtiene:

a) $\frac{x+6}{x}$ b) $\frac{x-6}{x}$ c) $\frac{x+5}{x}$ d) $\frac{x-5}{x}$

111. El resultado de $\left(\frac{x^2-16}{x-3}\right)\left(\frac{x^3-3x^2}{x^2+4x}\right)$, es:

a) x^2+2x b) x^2-4x c) x^2+4x d) x^2-2x

112. Al resolver $\frac{x^2-5x-6}{x-7} \div \frac{x^2-36}{x^2-7x}$, es:

a) $\frac{x^2-x}{x+6}$ b) $\frac{x^2-x}{x-6}$ c) $\frac{x^2+x}{x+6}$ d) $\frac{x^2+x}{x-6}$

113. Al reducir la expresión $\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})^2}{x^2-2}$, se obtiene:

a) $x-2$ b) $x+2$ c) $x-\sqrt{2}$ d) $x+\sqrt{2}$

114. Al resolver $\frac{x-\frac{y^2}{x}}{\frac{y}{x}+1}$, se obtiene:

a) x^2+y^2 b) x^2-y^2 c) $x+y$ d) $x-y$

115. Simplifique: $\frac{3^{-4}\cdot 3^{10}}{3^5}$

a) 9 b) 27 c) 3 d) 81

116. Al simplificar $\frac{5^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^5}{5^{-\frac{5}{2}}}$, se obtiene:

a) 5^3 b) 5^{-3} c) 5^7 d) 5^{-7}

117. Al simplificar $\frac{x^4y^{-3}z^{-1}}{x^{-5}y^{-8}z^2}$, se obtiene:

a) $\frac{x^9y^5}{z}$ b) $\frac{x^3y^4}{z^2}$ c) $\frac{x^{10}y^2}{z^3}$ d) $\frac{x^9y^5}{z^3}$

118. La simplificación de $\frac{3a^{-5}b^2c^{-2}}{a^{-1}b^{-4}c}$, es:

a) $\frac{3b^6}{ac^3}$ b) $\frac{3b^6}{ac}$ c) $\frac{3b^6}{a^4c^3}$ d) $\frac{3b}{a^4c^3}$

119. Al simplificar $\left(\frac{x^3y^{-4}}{x^2y^{-3}}\right)^{-2}$, se obtiene:

a) $\frac{y}{x}$ b) $\frac{x^2}{y^2}$ c) $\frac{y}{x}$ d) $\frac{y^2}{x^2}$

120. Al reducir $\dfrac{\left(a^{n}\right)^{2n}}{a^{3n}\left(\dfrac{1}{a^{n}}\right)}$, se obtiene:

a) a^{n^2+2n} b) a^{n^2-2n} c) a^{2n^2-2n} d) a^{2n^2+2n}

121. Al simplificar $\dfrac{\frac{1}{2}(a+3)^{3/2}}{\frac{3}{4}(a+3)}$, se obtiene:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}(a+3)^{1/2}$ d) $\dfrac{2}{3}(a+3)^{1/2}$

122. El resultado de $(4)^{3/2}$, es:

a) 4 b) 8 c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt[3]{2}$

123. Al simplificar $\sqrt[4]{5^{12}}$, se obtiene:

a) 125 b) 25 c) 5 d) 625

124. Al simplificar $\sqrt[5]{2^{20}}$, se obtiene:

a) 2 b) 8 c) 4 d) 16

125. Al simplificar $\sqrt{48}$, se obtiene:

a) 24 b) $4\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) 12

126. La simplificación de $2\sqrt[3]{24}$, es:

a) $4\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $4\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt{3}$

127. Al simplificar $\sqrt{36x^{10}y^{4}z^{6}}$, se obtiene:

a) $18x^5y^2z^3$ b) $9x^2y^5z^2$ c) $6x^2y^2z^3$ d) $6x^5y^2z^3$

128. La simplificación de $\sqrt[3]{216x^{6}y^{3}z^{12}}$, es

a) $36x^4y^2z^8$ b) $72x^2yz^4$ c) $6x^2yz^4$ d) $18x^3y^2z^4$

129. Al simplificar $\sqrt{100x^{4}y^{8}z^{4}}$, se obtiene:

a) $x^2y^4z^4$ b) $10x^2y^4z^2$ c) $x^2y^4z^2$ d) $5x^2y^4z^2$

130. Al simplificar $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}}$, se obtiene:

a) $4a^2b^3$ b) a^2b^3 c) $2a^2b^3$ d) $8a^2b^3$

131. La simplificación de $\sqrt[5]{243x^{10}y^5}$, es:

a) $3x^2y$ b) x^2y c) $3xy$ d) x^2y

132. Al simplificar $\sqrt{50x^4y^5}$, se obtiene:

a) $xy\sqrt{2y}$ b) $x^2y^2\sqrt{2y}$ c) $5xy\sqrt{2y}$ d) $5x^2y^2\sqrt{2y}$

133. La simplificación de $\sqrt[3]{128x^6y^8z^3}$, es:

a) $4x^2y^2z\sqrt[3]{2y^2}$ b) $x^2y^2z\sqrt[3]{2y^2z}$ c) $4xyz\sqrt[3]{2y^2z}$ d) $xyz\sqrt[3]{2y^2z}$

134. Al simplificar $\sqrt{81x^{2n}y^{4m}}$, se obtiene:

a) $27x^ny^{2m}$ b) $3x^ny^{2m}$ c) $9x^ny^{2m}$ d) x^ny^{2m}

135. La simplificación de $\sqrt[3]{64a^{6x}b^{3y}}$, es:

a) $2a^{2x}b^{2y}$ b) $4a^{2x}b^{y}$ c) $4a^{x}b^{y}$ d) $2a^{2x}b^{y}$

136. ¿Cuál es el resultado de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$?

a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt[6]{5}$

137. ¿Cuál es el resultado de $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$?

a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[12]{3}$

138. El resultado de $\sqrt{5}\sqrt{5}$, es:

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{5}$ c) 5 d) 25

139. El resultado de $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}$, es:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16

140. El resultado de $\sqrt{7}\sqrt[3]{7}$, es:

a) 49 b) 7 c) $7^{\frac{6}{5}}$ d) $7^{\frac{5}{6}}$

141. La simplificación de $2\sqrt{450}-3\sqrt{48}+2\sqrt{12}+\sqrt{50}$, es:

a) $4\sqrt{2}+12\sqrt{3}$ b) $35\sqrt{2}-8\sqrt{3}$ c) $35\sqrt{2}+8\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{2}-12\sqrt{3}$

142. El resultado de $\sqrt{20} - 2\sqrt{12} + \sqrt{45}$, es:

a) $11\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$ c) $11\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{5} - \sqrt{3}$

143. Al simplificar $\sqrt{\dfrac{72x^5y^8}{2xy^4}}$, se obtiene:

a) $3xy$ b) $6xy$ c) $3x^2y^2$ d) $6x^2y^2$

144. La simplificación de $\sqrt[3]{\dfrac{162x^6y^4z^2}{2xyz^2}}$, es:

a) $xy\sqrt[3]{3x^2}$ b) $9xy\sqrt[3]{3x^2}$ c) $3xy\sqrt[3]{3x^2}$ d) $9y\sqrt[3]{3x^2}$

145. Al simplificar $\dfrac{\sqrt{x}\left(x^4\right)}{x^{-\frac{3}{2}}}$, se obtiene:

a) x b) x^2 c) x^4 d) x^6

146. La simplificación de $\left(\sqrt{6xy}\right)\left(\sqrt{4xy^3}\right)$, es:

a) $4xy\sqrt{6}$ b) $4xy^2\sqrt{6}$ c) $2xy^2\sqrt{6}$ d) $xy^2\sqrt{6}$

147. Al simplificar $\left(\sqrt[3]{4a^2b^5}\right)\left(\sqrt[3]{6ab}\right)$, se obtiene:

a) $2ab^2\sqrt[3]{3}$ b) $ab^2\sqrt[3]{3}$ c) $2ab\sqrt[3]{3}$ d) $2a\sqrt[3]{3}$

148. La simplificación de $\dfrac{\left(y^6\right)\sqrt[3]{y}}{y^{-\frac{2}{3}}}$, es:

a) y^2 b) y^3 c) y^4 d) y^7

149. El resultado de $\left(\sqrt[3]{x^4y^5}\right)\left(\sqrt{xy^4}\right)$,es:

a) $y^4\sqrt[6]{x^5y}$ b) $y^4\sqrt[6]{x^5y^4}$ c) $xy^3\sqrt[6]{x^5y^4}$ d) $\sqrt[6]{x^5y^4}$

150. La simplificación de $\left(\sqrt[4]{4ab^4}\right)\left(\sqrt{2ab}\right)$, es:

a) $2b\sqrt[4]{a^3b^2}$ b) $\sqrt[4]{a^3b^2}$ c) $2\sqrt[4]{a^3b^2}$ d) $2b\sqrt[4]{ab}$

151. Al simplificar $\frac{6x^2}{\sqrt{3x}}$, se obtiene:

a) $2\sqrt{3}$ b) $2x\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3x}$ d) $2x\sqrt{3x}$

152. La simplificación de $\frac{\sqrt{6x^3}}{\sqrt[4]{18x^2}}$, es:

a) $\sqrt[4]{2}$ b) $2\sqrt[4]{x}$ c) $x\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[4]{x}$

153. En la ecuación $bx + b^2 - x = b^2 + b$, el valor de x cuando b = 3, es:

a) a b) 3 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

154. En la ecuación $4ax - a^3 - 2ax = 4a - a^3 + 2$, el valor de x cuando $a = \frac{1}{4}$

a) $\frac{1}{6}$ b) 6 c) $\frac{1}{4}$ d) 4

155. El valor de "x" que cumple con la igualdad $10x - 5 = 8x + 7$, es:

a) 6 b) -6 c) 10 d) -10

156. Al resolver la ecuación $12 - 3x + 4x = 9 + 10x + 8$, el valor de "x", es:

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $-\frac{9}{5}$ d) $-\frac{5}{9}$

157. La solución de $6x + (4 + 2x) = 2x - (7x - 4) + 5$, es:

a) $x = \frac{3}{5}$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = \frac{5}{13}$ d) $x = \frac{2}{3}$

158. El valor de "x" en $\frac{x}{4} + \frac{2}{5} = \frac{x}{2} - 1$

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{28}{5}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{8}$

159. El valor de "x" que cumple con la ecuación $3 + \frac{2}{3x} = \frac{6}{x}$, es:

a) $\frac{9}{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{5}{6}$

160. Al resolver la siguiente ecuación $x - 8 = 4x + 10$, se obtiene:

a) $x = 6$ b) $x = 3$ c) $x = -3$ d) $x = -6$

161. Al resolver la ecuación $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} - \frac{x}{2}$, se obtiene:

a) $x = 13$ b) $x = -13$ c) $x = 12$ d) $x = -12$

162. Al resolver la ecuación $\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=\frac{4}{x}$ para $x\neq 0$,se obtiene:

a) $x=\frac{6}{5}$ b) $x=-\frac{6}{5}$ c) $x=-\frac{5}{6}$ d) $x=\frac{5}{6}$

163. El valor de "x" que cumple con la igualdad $12x-8+2x=20x-10$, es:

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 3 d) –3

164. Al resolver la ecuación $2y-3+5y=9y+1+8y$, el valor de "y", es:

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $-\frac{5}{2}$

165. La solución de $3(x-4)-2(3x-6)=2x-(7x-1)$, es:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) – 2

166. El valor de "z" en $\frac{2}{z-1}+\frac{2}{5}=\frac{4}{z-1}$

a) 6 b) –3 c) 6 d) –6

167. El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{1}{3-x}=2-\frac{5}{3-x}$, es:

a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 0 d) 3

168. Al resolver la siguiente ecuación $10x-8=4x+10$, se obtiene:

a) $x=\frac{1}{3}$ b) $x=3$ c) $x=-\frac{1}{3}$ d) $x=-3$

169. Al resolver la ecuación $2+\frac{3}{x+2}=\frac{2}{3}-\frac{4}{x+2}$, se obtiene:

a) $x=\frac{29}{4}$ b) $x=-\frac{29}{4}$ c) $x=\frac{4}{29}$ d) $x=-\frac{4}{29}$

170. Al resolver la ecuación $\frac{1}{3x}-\frac{5}{2}=\frac{7}{2x}-\frac{2}{3}$ para $x\neq 0$, se obtiene:

a) $x=\frac{19}{11}$ b) $x=-\frac{11}{19}$ c) $x=\frac{11}{9}$ d) $x=-\frac{19}{11}$

171. El valor de "z" en $\frac{4}{z+3}=4-\frac{1}{z+3}$

a) $-\frac{4}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $-\frac{7}{4}$ d) $\frac{7}{4}$

172. El valor de "x" que cumple con la ecuación $\frac{3}{x+5}-10=\frac{2}{x+5}$, es:

a) $-\frac{49}{10}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{3}{10}$

173. Al resolver la siguiente ecuación $4(x-2)=6(x-2)+10$, se obtiene:

a) $x=3$ b) $x=-3$ c) $x=6$ d) $x=-6$

174. Al resolver la ecuación $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{3}$, se obtiene:

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{2}{19}$ d) $\frac{1}{19}$

175. Al resolver la ecuación $\frac{3}{4x}-\frac{1}{20}-\frac{2}{5x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4x}$ para $x\neq0$, se obtiene:

a) $x=\frac{31}{12}$ b) $x=-\frac{31}{12}$ c) $x=-\frac{12}{31}$ d) $x=\frac{12}{31}$

176. La suma de tres números enteros consecutivos, es igual a 66. ¿Cuál es el número mayor?

a) 23 b) 13 c) 43 d) 33

177. La suma de dos números es 8, si el mayor es el triple del número menor. ¿Cuál es el mayor?

a) 8 b) – 6 c) 4 d) 6

178. Manuel tiene el doble de la edad de Fabián, si dentro de doce años Fabián tendrá nueve años menos que Manuel. ¿Cuántos años tiene Manuel?

a) 9 b) 8 c) 16 d) 18

179. El modelo matemático que resuelve el problema “ La suma de dos números es 25, si el mayor supera en cuatro al doble del menor, hallar los números si “x” es el número mayor”.

a) $x = 2(25-x)-4$ b) $25-x = x+4$ c) $x = 2(25-x)+4$ d) $x-4 = 25+x$

180. Una solución de la ecuación $x^2-7x+10=0$, es:

a) – 5 b) 5 c) –2 d) – 4

181. Al resolver la ecuación $3x^2-x=2$, se obtiene:

a) $x=3, x=-2$ b) $x=-1, x=\frac{2}{3}$ c) $x=-2, x=-3$ d) $x=1, x=-\frac{2}{3}$

182. Las raíces de la ecuación $x^2-16=0$, son:

a) – 16 y 16 b) – 4 y 4 c) – 8 y 8 d) – 4i y 4i

183. Una solución de la ecuación $5x^2+21x+4=0$, es:

a) 4 b) 5 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{5}$

184. Al resolver la ecuación $6x^2-7x=3$, se obtiene:

a) $x=\frac{3}{2}$ y $x=\frac{1}{3}$ b) $x=-\frac{3}{2}$ y $x=-\frac{1}{3}$ c) $x=\frac{3}{2}$ y $x=\frac{1}{3}$ d) $x=\frac{3}{2}$ y $x=-\frac{1}{3}$

185. Las raíces de la ecuación $16x^2-25=0$, son:

a) – 5 y 5 b) – 4 y 4 c) $-\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{4}$ d) $-\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{5}$

186. Una solución de la ecuación $6x^2+x-2=0$, es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

187. Al resolver la ecuación $8x^2 - 2x = 3$, se obtiene:

a) $x = \frac{3}{4}$ y $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{3}{4}$ y $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = -\frac{3}{4}$ y $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = -\frac{3}{4}$ y $x = \frac{1}{2}$

188. Las raíces de la ecuación $5x^2 - 10x = 0$, son:

a) 0, 2 b) 5, – 10 c) 5, 10 d) 2, – 2

189. Una solución de la ecuación $3x^2 + 10x - 8 = 0$, es:

a) $x = 4$ b) $x = 8$ c) $x = -4$ d) $x = -8$

190. Al resolver la ecuación $10x^2 - 23x = 5$, se obtiene:

a) $x = \frac{5}{2}, x = \frac{1}{5}$ b) $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{5}$ c) $x = -\frac{5}{2}, x = \frac{1}{5}$ d) $x = -\frac{5}{2}, x = -\frac{1}{5}$

191. Las raíces de la ecuación $4x^2 - 81 = 0$, son:

a) – 9, 9 b) –4, 4 c) $-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}$ d) $-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}$

192. Una solución de la ecuación $x^2 + 11x + 10 = 0$, es:

a) – 10 b) 10 c) 11 d) –11

193. Al resolver la ecuación $x^2 - x = 0$, se obtiene:

a) $x = 1, x = 0$ b) $x = -1, x = 0$ c) $x = 2, x = 0$ d) $x = -2, x = 0$

194. Las raíces de la ecuación $3x^2 - 48 = 0$, son:

a) $x = -48, x = 48$ b) $x = 3, x = -3$ c) $x = 16, x = -16$ d) $x = 4, x = -4$

195. Una solución de la ecuación $6x^2 - 5x + 1 = 0$, es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 2 d) $-\frac{1}{2}$

196. La suma de dos números es 7 y la de sus cuadrados es 29. ¿Cuál es el número mayor?

a) 5 b) 7 c) 29 d) 25

197. El largo de un rectángulo mide el doble que su ancho. Si se aumentan dos metros a cada lado el área aumenta en 34 m^2. ¿Cuánto mide el largo?

a) 7 b) 10 c) 12 d) 5

198. El ancho de un rectángulo mide diez unidades menos que su largo. Si su área es de 96 unidades cuadradas. ¿Cuánto mide el ancho?

a) 16 b) 10 c) 6 d) 8

199. ¿Cuánto mide el lado de una cuadrado si su área es de 18 m^2?

a) 9 m b) 18 m c) $\sqrt{2}$ m d) $3\sqrt{2}$ m

200. Si se aumentan 4 metros a los lados de un cuadrado el área aumenta en 80 m^2. ¿Cuál es el modelo matemático para encontrar la medida de lado del cuadrado?

a) $(x+4)^2 + x^2 = 80$ b) $(x-4)^2 - x^2 = 80$ c) $(x+4)^2 - x^2 = 80$ d) $(x-4)^2 + x^2 = 80$

201. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "y" es:

a) 2 b) – 2 c) 1 d) – 13

202. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} x - 6y = -16 \\ 3x + 4y = -4 \end{cases}$

a) x = 4, y = 2 b) x = 4, y = –2 c) x = – 4, y = 2 d) x = – 4, y = – 2

203. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6x + y = -9 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "y" es:

a) – 1 b) – 3 c) 1 d) 3

204. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 5y = -29 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "x" es:

a) 5 b) – 5 c) 2 d) – 2

205. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 3x - y = 15 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

a) x = 4, y = –3 b) x = 4, y = 3 c) x = – 3, y = 4 d) x = 3, y = – 4

206. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5x + 2y = -7 \\ 3x - 4y = -25 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "y", es:

a) 3 b) – 4 c) – 3 d) 4

207. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x + 5y = -3 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$ el valor que se obtiene para "x", es:

a) – 1 b) – 4 c) 1 d) 4

208. Un granjero tiene 22 animales, entre cerdos y gallinas. Si el número de patas es de 64. ¿Cuántos cerdos tiene el granjero?

a) 24 b) 64 c) 22 d) 10

209. En una granja hay 50 cabezas y 140 patas entre patos y borregos. ¿Cuántos patos hay?

a) 50 b) 30 c) 70 d) 20

210. En una feria un grupo de 10 personas paga $210 en total. Si el precio del boleto para los adultos es de $30 y el de niños es de $15. ¿Cuántos adultos son?

a) 6 b) 10 c) 4 d) 15

211. Patricia compró 3 blusas y 2 pantalones por $1250 mientras que Norma compró 2 blusas y 3 pantalones por $1500. ¿Cuál es el precio de cada pantalón?

a) $ 500 b) $ 400 c) $ 350 d) $300

212. La ecuación que expresa que "y" varía directamente proporcional a la enésima potencia de "x", es:

a) $y = kx^n$ b) $y = \frac{k}{x^n}$ c) $y = \frac{k^n}{x}$ d) $y = k^n x$

213. La ecuación que expresa que "y" varia inversamente proporcional a "x", es:

a) $y = kx$ b) $y = \frac{x}{k}$ c) $y = \frac{k}{x}$ d) $y = kx^2$

2 Geometría y trigonometría

Propósito: el alumno conocerá los conceptos básicos de la geometría euclidiana así como la trigonometría y los aplicará a problemas diversos.

Función exponencial

Es de la forma $f(x) = a^x$ o $y = a^x$, donde a: constante, x: variable.

Ejemplo:

¿Cuál de las siguientes funciones es una función exponencial?

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2^x$ c) $f(x) = x + 1$ d) $f(x) = 3^2$

Solución:

Una función exponencial es aquélla en la que la variable "x" es el exponente. Por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

► Función exponencial natural

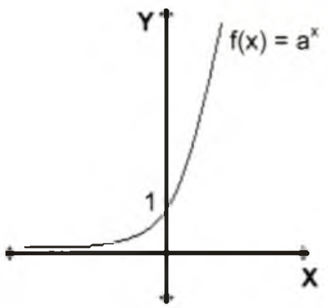
Es de la forma $f(x) = e^x$, con $e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$ a medida que "n" tiende a "∞".

Gráfica y propiedades de la función exponencial

Sea la función $f(x) = a^x$, entonces,

– Si $a > 1$

Gráfica

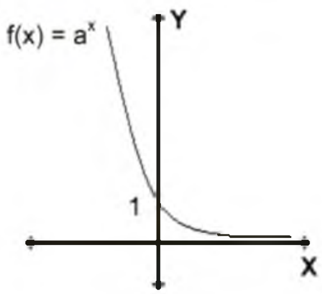


Propiedades

– La función es creciente.
– Interseca al eje Y en el punto (0,1).
– Es positiva para cualquier valor de "x".
– El dominio son todos los reales, $x \in (-\infty, \infty)$.
– El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
– Su asíntota es el eje X con ecuación $y = 0$.

– Si $0 < a < 1$

Gráfica



Propiedades

– La función es decreciente.
– Interseca al eje Y en el punto (0,1).
– Es positiva para cualquier valor de "x".
– El dominio son todos los reales, $x \in (-\infty, \infty)$.
– El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
– Su asíntota es el eje X con ecuación $y = 0$.

Ecuación exponencial

Una ecuación exponencial es una igualdad en la que, la incógnita se encuentra como exponente.

Ejemplo 1

El valor de "x" en $3^{x+1} = 9$ es:

a) 2 b) – 1 c) – 2 d) 1

Solución:

El resultado 9 se expresa como 3^2,

$$3^{x+1} = 9 \quad \rightarrow \quad 3^{x+1} = 3^2$$

Para que la igualdad se cumpla, tanto la base como los exponentes deben ser iguales, entonces

$$x + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 - 1 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El valor de "x" en $2^{3x-1} = 32$ es:

a) 2 b) – 1 c) – 2 d) 1

Solución:

El resultado 32 se expresa como 2^5,

$$2^{3x-1} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{3x-1} = 2^5$$

Para que se cumpla la igualdad, las bases y los exponentes deben ser iguales, entonces:

$$3x - 1 = 5 \quad \rightarrow \quad 3x = 5 + 1 \quad \rightarrow \quad 3x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El valor de "y" en la ecuación $5^{2y+1} = \frac{1}{25}$ es:

a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

Solución:

El resultado se expresa como potencia de la base 5,

$$5^{2y+1} = \frac{1}{25} \quad \rightarrow \quad 5^{2y+1} = 5^{-2}$$

se igualan los exponentes, y se despeja "y".

$$2y + 1 = -2 \quad \rightarrow \quad 2y = -2 - 1 \quad \rightarrow \quad 2y = -3 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Función logarítmica

Es de la forma:

$$f(x) = \log_a x \quad o \quad y = \log_a x \quad \text{si y solo si} \quad a^y = x$$

Donde:

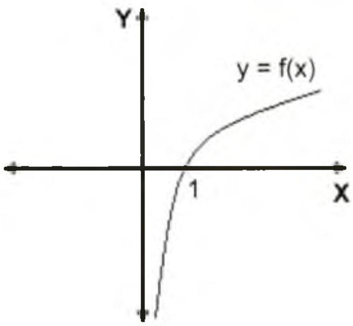
a = base, x = argumento o resultado, f(x) = y = exponente

Se lee:

El logaritmo con base "a" de "x" es igual al exponente f(x).

Gráfica y propiedades de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Gráfica



Propiedades

– La función es creciente.

– Interseca al eje X en el punto (1,0).

– El dominio es: $x > 0$.

– El rango son todos los reales, $y \in (-\infty, +\infty)$.

– Su asíntota vertical es el eje Y con ecuación $x = 0$.

► **Logaritmo común**

Son aquellos logaritmos cuya base es 10 y se representan por:

$$\log_{10} x = \log x$$

► **Logaritmo natural**

Son aquellos logaritmos cuya base es el número e = 2.718… y se representa por:

$$\log_e x = \ln x$$

Representación de la función logarítmica en su forma exponencial

Forma logarítmica		Forma exponencial
$y = \log_a x$	$\leftrightarrow$	$a^y = x$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $\log_3 x = 2$, es:

a) $x^2 = 3$ b) $3^2 = x$ c) $2^3 = x$ d) $3^x = 2$

Solución:

Se transforma $\log_3 x = 2$ a su forma exponencial, la base (3) elevada al exponente (2) es igual a su argumento (x). Por tanto,

$$\log_3 x = 2 \quad \rightarrow \quad 3^2 = x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\log_2 b = a$, es:

a) $a^2 = b$ b) $2^b = a$ c) $2^a = b$ d) $b^a = 2$

Solución:

La transformación del logaritmo es: la base (2) elevada al exponente (a) es igual al argumento (b),

$$\log_2 b = a \quad \rightarrow \quad 2^a = b$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La forma logarítmica de $x^2 = y$, es:

a) $\log_2 y = x$ b) $\log_x 2 = y$ c) $\log_x y = 2$ d) $\log_2 x = y$

Solución:

La transformación es: el logaritmo con base "x" de "y" es igual al exponente "2",

$$x^2 = y \quad \rightarrow \quad \log_x y = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

La forma logarítmica de $y = e^{3x}$ es:

a) $\log_{3x} y = e$ b) $\ln y = 3x$ c) $\ln 3x = y$ d) $\log_y 3x = e$

Solución:

Si $y = e^{3x}$, entonces su representación logarítmica es:

$$\log_e y = 3x$$

la cual es equivalente a:

$$\ln y = 3x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

El resultado de $\log_3 9$ es:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Solución:

Sea $y = \log_3 9$, entonces $3^y = 9$, la cual representa una ecuación exponencial y al resolverla se obtiene:

$$3^y = 9 \quad \rightarrow \quad 3^y = 3^2 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

El resultado de $\log 1000$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Solución:

Sea $y = \log 1000$, entonces $10^y = 1000$, la cual representa una ecuación exponencial y al resolverla se obtiene:

$$10^y = 1000 \quad \rightarrow \quad 10^y = 10^3 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

► **Propiedades de los logaritmos**

Sean A y B dos números positivos:

1) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

3) $\log_a A^n = n \log_a A$

4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$

5) $\log_a 1 = 0$

6) $\log_a a = 1$

7) $\ln e = 1$

8) $\ln e^y = y$

9) $e^{\ln x} = x$

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a $\log_a x^2y$, es:

a) $2(\log_a x + \log_a y)$ b) $2\log_a x + \log_a y$ c) $\log_a x + \log_a y$ d) $\log_a x + 2\log_a y$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_a x^2y = \log_a x^2 + \log_a y = 2\log_a x + \log_a y$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Una expresión equivalente a $\log \frac{x^3}{y^2}$, es:

a) $3\log x - 2\log y$ b) $2\log x - 3\log y$ c) $\log 3x + \log 2y$ d) $\log 3x - \log 2y$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3\log x - 2\log y$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

El resultado de $\ln x^2e^{2x}$ es:

a) $2 \ln x + 2x$ b) $\ln x + 2x$ c) $\ln 2x + x^2$ d) $\ln 2 + 2x$

Solución:

Aplicando $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ y $\log_a A^n = n \log_a A$

$$\ln x^2e^{2x} = \ln x^2 + \ln e^{2x} = 2 \ln x + 2x \ln e$$

pero $\ln e = 1$, entonces:

$$\ln x^2e^{2x} = \ln x^2 + \ln e^{2x} = 2 \ln x + 2x \ln e = 2 \ln x + 2x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

► Ecuaciones logarítmicas

Son ecuaciones, cuya incógnita se encuentra afectada por logaritmos y para su resolución se aplican tanto las propiedades de los logaritmos, como su definición.

Ejemplo 1

El valor de "x" en la ecuación $\log_3(2x+1)=2$, es:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6

Solución:

Se transforma el logaritmo a su forma exponencial,

$$\log_3(2x+1)=2 \quad\rightarrow\quad 3^2=2x+1$$

se obtiene una ecuación de primer grado, al resolver,

$$3^2=2x+1 \quad\rightarrow\quad 9=2x+1 \quad\rightarrow\quad 9-1=2x$$

$$8=2x$$

$$4=x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El valor de "x" en la ecuación $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$, es:

a) – 1 b) 1 c) – 2 d) 2

Solución:

Se aplica la propiedad $\log_a A+\log_a B=\log_a AB$,

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3 \quad\rightarrow\quad \log_2(x+1)(x+3)=3$$

se transforma a su forma exponencial y se resuelve la ecuación resultante,

$$\log_2(x+1)(x+3)=3 \quad\rightarrow\quad 2^3=(x+1)(x+3)$$

$$8=x^2+4x+3$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$(x+5)(x-1)=0$$

$$x=-5,\ x=1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de "x" en la ecuación $\log(x+6)-\log(x-3)=1$, es:

a) 4 b) 10 c) 8 d) 12

Solución:

Se aplica la propiedad $\log_a A-\log_a B=\log_a \frac{A}{B}$,

$$\log(x+6)-\log(x-3)=1 \quad\rightarrow\quad \log\frac{x+6}{x-3}=1 \quad\rightarrow\quad 10^1=\frac{x+6}{x-3}$$

se resuelve la ecuación,

$$10^1=\frac{x+6}{x-3} \quad\rightarrow\quad 10=\frac{x+6}{x-3} \quad\rightarrow\quad 10(x-3)=x+6$$

$$10x-30=x+6$$

$$9x=36$$

$$x=4$$

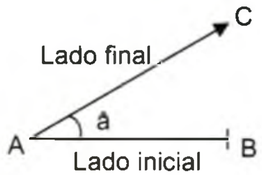
La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Geometría euclidiana

a) Conceptos básicos

Ángulo

Es la abertura comprendida entre dos semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.

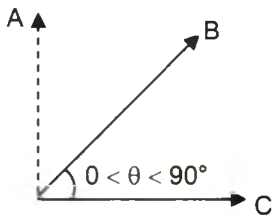


Los ángulos se representan por: ∠ A, ∠ BAC, â o con letras del alfabeto griego.

Tipos de ángulos

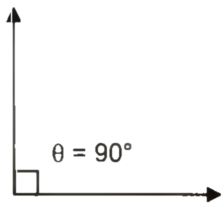
Ángulo agudo

Es aquél cuya magnitud es mayor a 0°, y menor a 90°



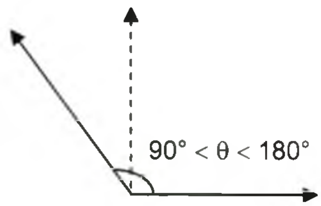
Ángulo recto

Es aquél cuya magnitud es de 90°



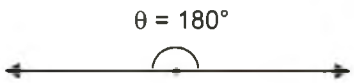
Ángulo obtuso

Es aquél cuya magnitud es mayor a 90°, y menor a 180°



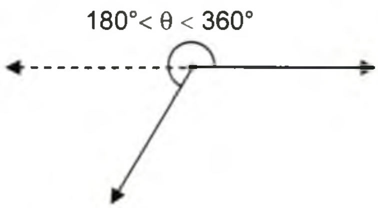
Ángulo llano

Es aquél cuya magnitud es de 180°



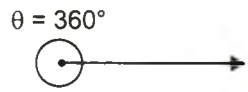
Ángulo entrante

Es aquél cuya magnitud es mayor a 180°, y menor a 360°



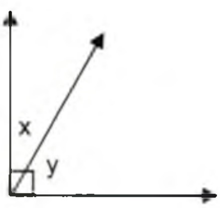
Angulo perigonal

Es aquél cuya magnitud es 360°



Ángulos complementarios

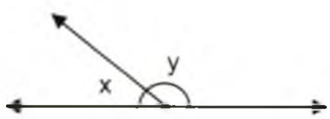
Son aquellos cuya suma es 90°



$x + y = 90°$

Ángulos suplementarios

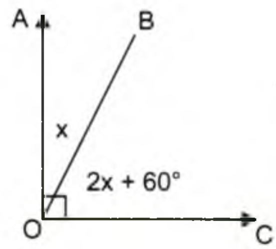
Son aquellos cuya suma es 180°



$x + y = 180°$

Ejemplo 1

El valor del ángulo $\angle$ AOB en la siguiente figura es:



a) 10° b) 20° c) 30° d) 40°

Solución:

En la figura:

$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ Suma de ángulos

$\angle AOB + \angle BOC = 90°$ Por ser ángulo recto

Al sustituir $\angle AOB = x$, $\angle BOC = 2x + 60°$, se obtiene:

$$x + 2x + 60° = 90° \quad \rightarrow \quad 3x + 60° = 90°$$

$$3x = 90° - 60°$$

$$3x = 30°$$

$$x = \frac{30°}{3}$$

$$x = 10°$$

Por tanto, el ángulo $\angle AOB = 10°$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Si M y N son ángulos suplementarios, ¿cuál es el valor del ángulo N si M vale 135°?

a) 25° b) 45° c) 65° d) 85°

Solución:

Si dos ángulos son suplementarios, su suma es 180°, entonces:

$$\angle M + \angle N = 180°$$

Al sustituir $\angle M = 135°$, se obtiene:

$$135° + \angle N = 180° \quad \rightarrow \quad \angle N = 180° - 135°$$

$$\angle N = 45°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Si P y Q son ángulos complementarios, ¿cuál es el valor de P si $\angle Q = 36°$?

a) 144° b) 54° c) 154° d) 44°

Solución:

$$\angle P + \angle Q = 90° \quad \rightarrow \quad \angle P + 36° = 90°$$

$$\angle P = 90° - 36°$$

$$\angle P = 54°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Sistemas de medición de ángulos

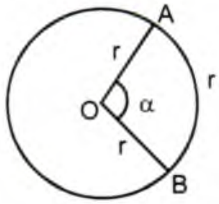
> Sistema sexagesimal

En este sistema se divide la circunferencia en 360 partes llamadas grados, el grado en sesenta minutos y el minuto en sesenta segundos.

$$1° = 60' \qquad ; \qquad 1' = 60''$$

> Sistema cíclico o circular

Este sistema tiene como unidad fundamental el radián, el radián es el ángulo central subtendido por un arco, igual a la longitud del radio del círculo y se llama valor natural o valor circular de un ángulo.



Conversión de grados a radianes y radianes a grados

– Para convertir grados en radianes se multiplica el número en grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$, el resultado se simplifica de ser posible.

– Para convertir radianes en grados se multiplica el número en radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$, el resultado se simplifica de ser posible.

Ejemplo 1

Una expresión equivalente a 210° es:

a) $\frac{7}{4}\pi$ rad b) $\frac{7}{3}\pi$ rad c) $\frac{7}{6}\pi$ rad d) $\frac{7}{12}\pi$ rad

Solución:

Se multiplica 210° por el factor $\frac{\pi}{180°}$

$$(210°)\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{210°\pi}{180°} = \frac{7}{6}\pi \text{ rad}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La expresión $\frac{11}{6}\pi$ es equivalente a:

a) 75° b) 150° c) 225° d) 330°

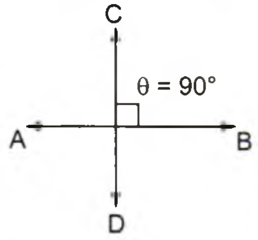
Solución:

La expresión $\frac{11}{6}\pi$ se multiplica por el factor $\frac{180°}{\pi}$,

$$\left(\frac{11}{6}\pi\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{1980°\pi}{6\pi} = 330°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

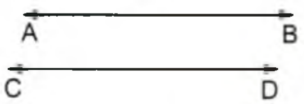
b) Paralelismo y perpendicularidad



> Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si, al cortarse, forman cuatro ángulos rectos.

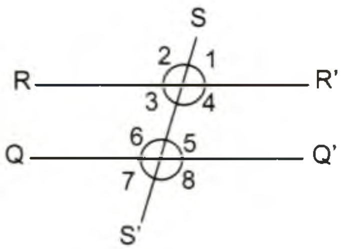
$$\overline{AB} \perp \overline{CD}$$



> Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si no tienen un punto en común y guardan siempre una misma distancia.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$



> Rectas paralelas cortadas por una secante

Dadas las rectas $\overleftrightarrow{RR'} \parallel \overleftrightarrow{QQ'}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ una recta secante, los ángulos que se forman se clasifican de la siguiente manera:

Ángulos opuestos por el vértice

Son aquellos que tienen el vértice en común y los lados de uno de los ángulos, son la prolongación de los del otro, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$,

$\angle 5 = \angle 7$ y $\angle 6 = \angle 8$

Ángulos alternos internos

Son ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante. Los ángulos alternos internos son iguales.

$\angle 3 = \angle 5$ y $\angle 4 = \angle 6$

Ángulos alternos externos

Son ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la secante. Los ángulos alternos externos son iguales.

$\angle 2 = \angle 8$ y $\angle 1 = \angle 7$

Ángulos correspondientes

Dos ángulos no adyacentes situados en un mismo lado de la secante. Los ángulos correspondientes son iguales.

$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$,
$\angle 3 = \angle 7$ y $\angle 4 = \angle 8$

Ángulos adyacentes

Son aquellos que tienen un lado en común y en las rectas paralelas cortadas por una secante suman 180°, esto es, dos ángulos adyacentes son suplementarios.

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ $\angle 2 + \angle 3 = 180°$

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ $\angle 1 + \angle 4 = 180°$

$\angle 5 + \angle 6 = 180°$ $\angle 6 + \angle 7 = 180°$

$\angle 7 + \angle 8 = 180°$ $\angle 5 + \angle 8 = 180°$

Ángulos colaterales internos (Suplementarios)

Dos ángulos internos no adyacentes y situados del mismo lado de la secante. Los ángulos colaterales internos suman 180°.

$\angle 3 + \angle 6 = 180°$ y $\angle 4 + \angle 5 = 180°$

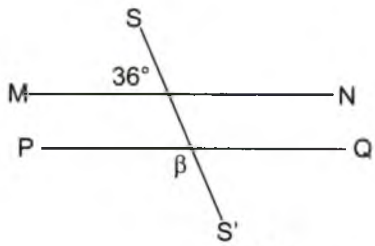
Ángulos colaterales externos (Suplementarios)

Dos ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante. Los ángulos colaterales externos suman 180°.

$\angle 1 + \angle 8 = 180°$ y $\angle 2 + \angle 7 = 180°$

Ejemplo 1

Si $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ es una recta secante, ¿cuál es el valor de "β"?



a) 144° b) 54° c) 154° d) 44°

Solución:

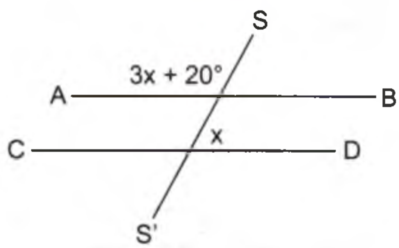
Los ángulos 36° y "β" son colaterales externos y suman 180°, entonces:

$$36° + \beta = 180° \quad \rightarrow \quad \beta = 180° - 36° = 144°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

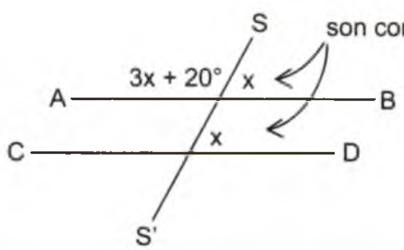
Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ es una recta secante, ¿cuál es el valor de "x"?



a) 20° b) 30° c) 40° d) 50°

Solución:

En la figura



Entonces, los ángulos "3x + 20°" y "x" son ángulos suplementarios, esto es,

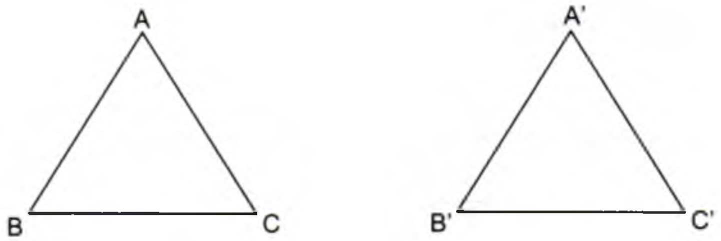
$$3x + 20° + x = 180° \quad \rightarrow \quad 3x + x = 180° - 20° \quad \rightarrow \quad 4x = 160°$$

$$x = 40°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

c) Congruencia de triángulos

Son aquellos que tienen la misma forma y tamaño.



$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Se lee: "el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'B'C' ".

Si dos triángulos son congruentes entonces,

a) Sus lados homólogos son iguales.

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ y $\overline{AC} = \overline{A'C'}$

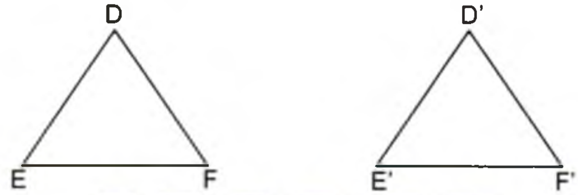
b) Sus ángulos homólogos son iguales o congruentes.

$\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$

Casos de congruencia de triángulos

Teorema I (Lado, Lado, Lado)

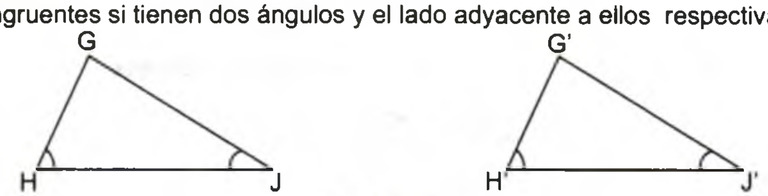
Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados iguales.



$\overline{DE} = \overline{D'E'}$, $\overline{EF} = \overline{E'F'}$ y $\overline{DF} = \overline{D'F'}$

Teorema II (Ángulo, Lado, Ángulo)

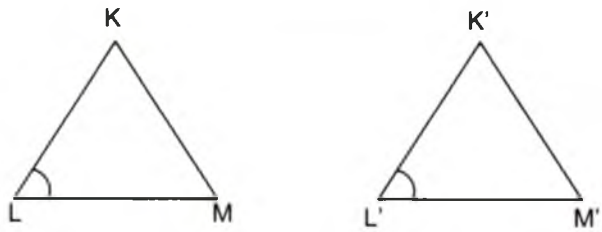
Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente iguales .



$\angle H = \angle H'$, $\overline{HJ} = \overline{H'J'}$ y $\angle J = \angle J'$

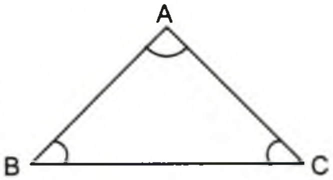
Teorema III (Lado, Ángulo, Lado)

Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a sus homólogos del otro.



$\overline{KL} = \overline{K'L'}$, $\angle L = \angle L'$ y $\overline{LM} = \overline{L'M'}$

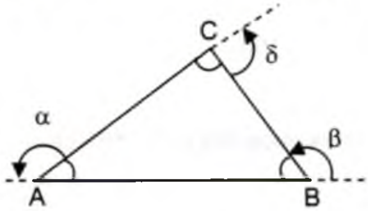
d) Teoremas **fundamentales de los triángulos**



Teorema 1

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Teorema 2

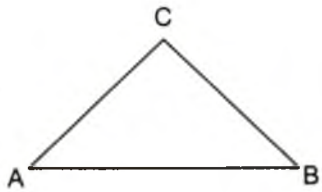
Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

$$\angle B + \angle C = \alpha \quad , \quad \angle A + \angle B = \delta \quad \text{y} \quad \angle A + \angle C = \beta$$

Teorema 3

La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°.

$$\alpha + \beta + \delta = 360^\circ$$



Teorema 4

La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el otro lado y su diferencia menor que el tercer lado.

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$$

Teorema 5

Si dos lados de un triángulo son distintos, al mayor lado se opone mayor ángulo.

Si $\overline{BC} > \overline{AC}$ entonces $\angle A > \angle B$

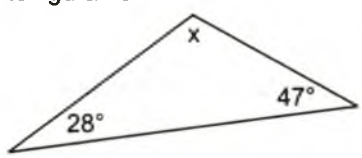
Teorema 6

Para dos ángulos distintos de un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

Si $\angle A > \angle B$ entonces $\overline{BC} > \overline{AC}$

Ejemplo 1

El valor del ángulo "x" en la siguiente figura es:



a) 90° b) 105° c) 125° d) 135°

Solución:

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es 180°, entonces:

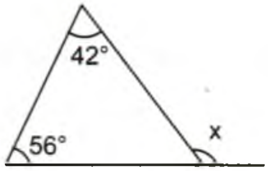
$$x + 28^\circ + 47^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \quad x = 180^\circ - 28^\circ - 47^\circ$$

$$x = 105^\circ$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El valor de "x" en la siguiente figura es:



a) 56° b) 75° c) 98° d) 108°

Solución:

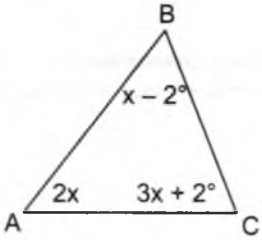
En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, entonces,

$$x = 42° + 56° \quad \rightarrow \quad x = 98°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El valor del ángulo ∠ A en la siguiente figura es:



a) 105° b) 30° c) 25° d) 60°

Solución:

La suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180°, entonces,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

al sustituir cada uno de los ángulos, se obtiene:

$$2x + x - 2° + 3x + 2° = 180° \quad \rightarrow \quad 2x + x + 3x = 180° - 2° + 2°$$

$$6x = 180°$$

$$x = 30°$$

El ángulo ∠ A = 2x = 2(30°) = 60°, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

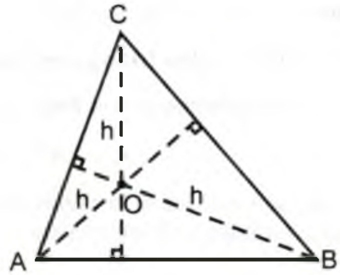
Rectas y puntos notables de un triángulo

Altura

Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto.

Ortocentro

Es el punto donde se intersecan las alturas.



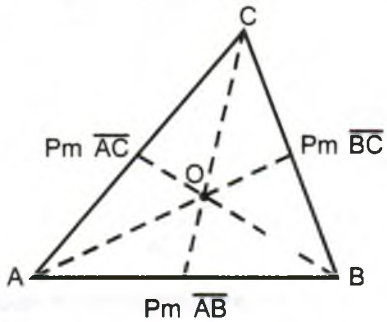
O: Ortocentro

Mediana

Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Baricentro

Es el punto donde se intersecan las medianas



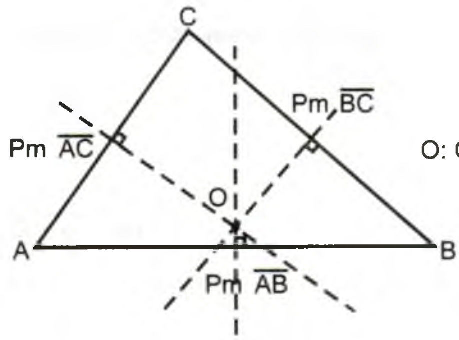
O: Baricentro

Mediatriz

Recta perpendicular al lado de un triángulo y que pasa por el punto medio de este mismo lado.

Circuncentro

Es el punto donde se intersecan las mediatrices



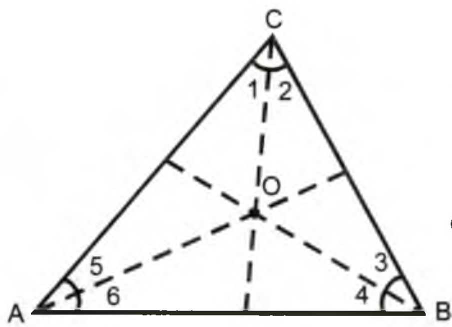
O: Circuncentro

Bisectriz

Semirrecta que divide en dos ángulos iguales a un ángulo interior de un triángulo.

Incentro

Es el punto donde se intersecan las bisectrices.



O: Incentro

e) Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Propiedades fundamentales de los triángulos semejantes

1) Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o congruentes.

$$\angle A = \angle A' \ , \ \angle B = \angle B' \ \text{ y } \ \angle C = \angle C'$$

2) Dos triángulos son semejantes si la razón de cada par de lados homólogos es constante, es decir, si sus lados son respectivamente proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

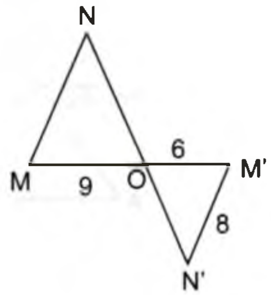
Lados homólogos: son aquéllos cuyos ángulos adyacentes son iguales.
a con a', b con b', c con c'.



Para indicar que dos triángulos son semejantes se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ donde el símbolo (~) se lee "es semejante".

Ejemplo 1

Si los triángulos de la figura son semejantes, ¿cuál es el valor del lado $\overline{MN}$?



a) 10 b) 12 c) 14 d) 16

Solución:

Se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos,

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{O'N'}}$$

de acuerdo con los datos, $\overline{OM} = 9$, $\overline{OM'} = 6$ y $\overline{M'N'} = 8$, entonces se toma la igualdad,

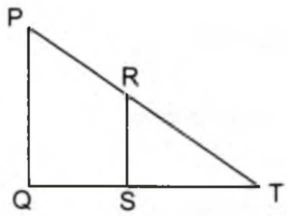
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{MN}}{8} = \frac{9}{6} \quad \rightarrow \quad \overline{MN} = \frac{(9)(8)}{6}$$

$$\overline{MN} = 12$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Si los triángulos de la figura son semejantes, hallar el valor de $\overline{RS}$ sabiendo que $\overline{ST}=10$, $\overline{QT}=20$ y $\overline{PQ}=16$.



a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

Solución:

Se establece la proporción entre los lados homólogos,

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}=\frac{\overline{QT}}{\overline{ST}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{RT}}$$

de acuerdo con los datos, se aplica la igualdad,

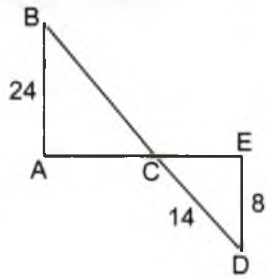
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}=\frac{\overline{QT}}{\overline{ST}} \quad \rightarrow \quad \frac{16}{\overline{RS}}=\frac{20}{10} \quad \rightarrow \quad \overline{RS}=\frac{(16)(10)}{20}$$

$$\overline{RS}=8$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 3

Si los triángulos de la figura son semejantes, hallar el valor de $\overline{BC}$.



a) 42 b) 35 c) 28 d) 7

Solución:

Se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$$

de acuerdo con la figura, $\overline{AB}=24$, $\overline{CD}=14$ y $\overline{DE}=8$, entonces se aplica la igualdad,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \quad \rightarrow \quad \frac{24}{8}=\frac{\overline{BC}}{14} \quad \rightarrow \quad \overline{BC}=\frac{(24)(14)}{8}$$

$$\overline{BC}=42$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

f) Polígonos

Se llama polígono a aquella figura plana cerrada, delimitada por segmentos de recta. Éstos se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados o sus ángulos.

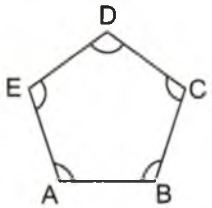
Por sus lados, los polígonos se clasifican en:
Regulares

Los polígonos regulares tienen todos sus lados iguales

Irregulares

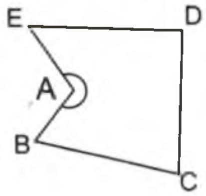
Los polígonos irregulares tienen sus lados diferentes.

Por sus ángulos, los polígonos se clasifican en:



Convexo

Es aquel polígono en el cual los ángulos interiores son todos menores de 180º.



Cóncavo

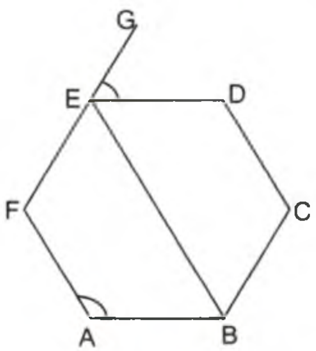
Es aquel polígono en el cual uno de sus ángulos interiores es mayor de 180°.

$$\angle A > 180°$$

Los polígonos reciben un nombre según su número de lados

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	12	Dodecágono
4	Cuadrilátero	13	Tridecágono
5	Pentágono	14	Tetradecágono
6	Hexágono	15	Pentadecágono
7	Heptágono	16	Hexadecágono
8	Octágono	17	Heptadecágono
9	Nonágono	18	Octadecágono
10	Decágono	19	Nonadecágono
11	Undecágono	20	Icoságono

Elementos de los polígonos



Vértice

Es el punto donde concurren dos lados, ej.: el vértice A

Ángulo interior

Es el que se forma con dos lados adyacentes de un polígono, ej.: $\angle$ BAF

Ángulo exterior

Es el que se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente, ej.: $\angle$ DEG

Diagonal

Es el segmento de recta que une dos vértices no adyacentes, ej.: $\overline{BE}$

Cabe destacar que un polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos interiores, así como exteriores.

Diagonales de un polígono

Número de diagonales trazadas desde un solo vértice.

Fórmula

$$d = n - 3$$

Donde:

d = diagonales trazadas desde un solo vértice.

n = número de lados.

Número de diagonales totales

Fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde:

D = diagonales totales del polígono.

n = número de lados.

Ejemplo 1

El número total de diagonales que se pueden trazar en un octágono son:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20

Solución:

En un octágono n = 8, entonces,

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Por tanto, se pueden trazar 20 diagonales en total, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El polígono en el que se pueden trazar 35 diagonales en total es:

a) Hexágono b) Octágono c) Decágono d) Dodecágono

Solución:

En este caso D = 35, entonces

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 35 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 70 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n - 10)(n + 7) = 0$$

$$n = 10,\ n = -7$$

Por tanto, el polígono es un decágono y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

El polígono en el que se pueden trazar 17 diagonales desde un solo vértice es:

a) icoságono b) decágono c) nonágono d) dodecágono

Solución:

En este caso d = 17, entonces,

$$d = n - 3 \quad \rightarrow \quad 17 = n - 3 \quad \rightarrow \quad 17 + 3 = n$$

$$20 = n$$

Por tanto, se trata de un icoságono, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ángulos en un polígono

Suma de ángulos interiores

$$S_i = 180°(n-2)$$

Ángulo interior de un polígono regular

$$i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Suma de ángulos exteriores

$$S_e = 360°$$

Ángulo exterior de un polígono regular

$$e = \frac{360°}{n}$$

Donde n = número de lados.

Ejemplo 1

La suma de los ángulos interiores en un pentágono es:

a) 180° b) 360° c) 540° d) 720°

Solución:

Un pentágono tiene cinco lados, entonces n = 5, al sustituir en la fórmula,

$$S_i = 180°(n-2)$$

se obtiene,

$$S_i = 180° (5 - 2) = 180° (3) = 540°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c"

Ejemplo 2

¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores es 1260°?

a) octágono b) eptágono c) nonágono d) undecágono

Solución:

En este caso S_i = 1260°, entonces,

$$S_i = 180°(n-2) \rightarrow 1260° = 180°(n-2) \rightarrow 1260° = 180°n - 360°$$

$$1260° + 360° = 180°n$$

$$1620° = 180°\, n$$

$$9 = n$$

Por tanto, el polígono es un Nonágono y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

¿Cuál es la medida de un ángulo interior en un Hexágono regular?

a) 180° b) 150° c) 135° d) 120°

Solución:

En un Hexágono regular n = 6, entonces,

$$i = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(6-2)}{6} = \frac{180°(4)}{6} = \frac{720°}{6} = 120°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

g) Circunferencia y círculo

Circunferencia
Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y su longitud representa el perímetro del círculo.

Círculo
Es la superficie limitada por una circunferencia.

Rectas notables en la circunferencia

Radio
Es el segmento de recta unido por el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.

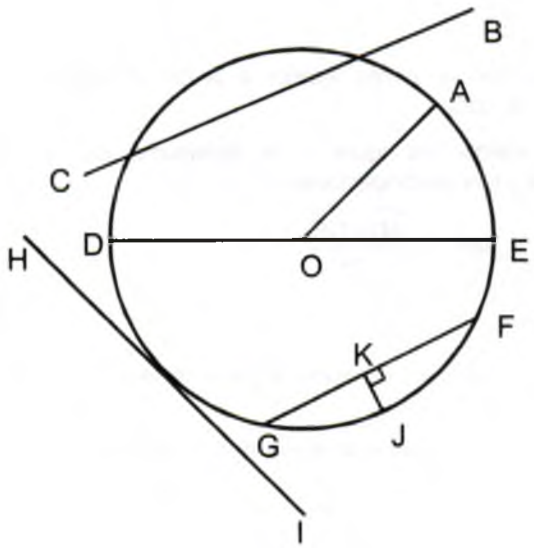
Cuerda
Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.

Diámetro
Es la cuerda más grande que une dos puntos opuestos de la circunferencia y pasa por el centro.

Secante
Es la recta que pasa por dos puntos de la circunferencia.

Tangente
Es la línea recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia.

Flecha o Sagita
Es la perpendicular trazada de un punto de la circunferencia al punto medio de una cuerda.



$\overline{OA}$: Radio

$\overline{DE}$: Diámetro

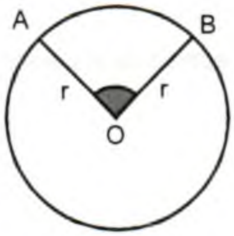
$\overleftrightarrow{BC}$: Secante

$\overleftrightarrow{HI}$: Tangente

$\overline{FG}$: Cuerda

$\overline{KJ}$: Sagita o Flecha

Ángulos en la circunferencia y el círculo

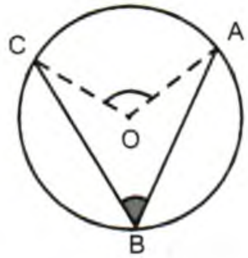


Ángulo central

Es aquel ángulo que está formado por dos radios, o bien por un diámetro y un radio, y tiene su vértice en el centro.

La medida de un ángulo central es igual al arco comprendido entre sus lados.

$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

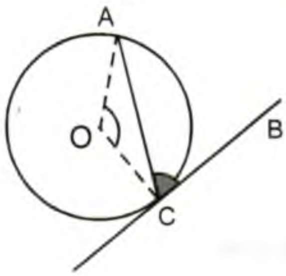


Ángulo inscrito

Es aquél que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y está formado por un par de cuerdas.

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

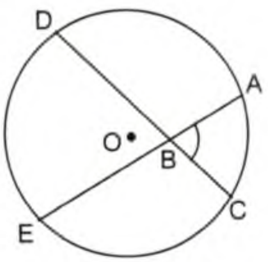


Ángulo semi-inscrito

Es aquél que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente.

La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

$$\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

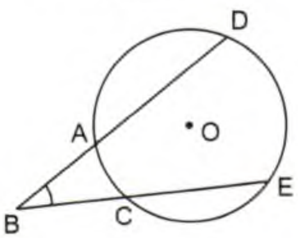


Ángulo interior

Es aquél que tiene su vértice en un punto interior a la circunferencia y está formado por dos cuerdas que se cortan.

La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

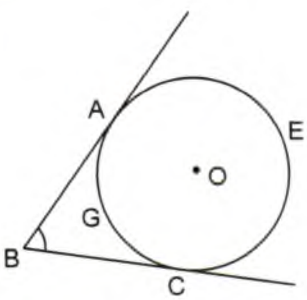


Ángulo exterior

Es aquel ángulo que tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y está formado por dos secantes.

La medida de un ángulo exterior es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{AC}}{2}$$



Ángulo circunscrito

Es el ángulo que está formado por dos tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia.

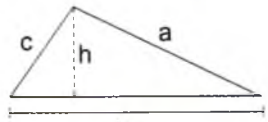
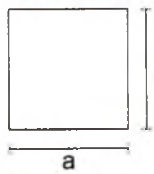
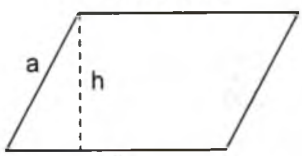
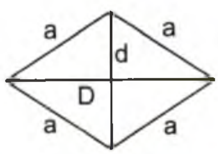
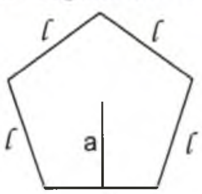
La medida de un ángulo circunscrito es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

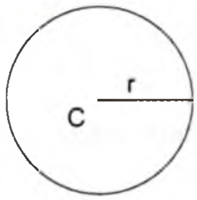
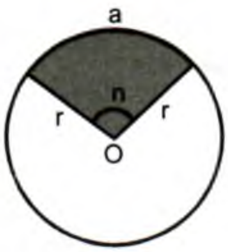
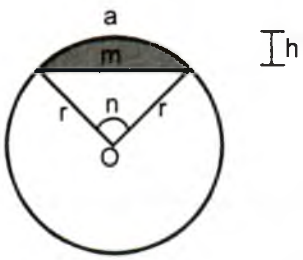
$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AEC} - \overset{\frown}{AGC}}{2}$$

h) Áreas y volúmenes

Superficie o Área

Región del plano limitada por los lados de un polígono.

Figura	Fórmulas	Elementos
Triángulo  	**Perímetro** $P = a + b + c$ **Área** $A = \frac{1}{2}bh$	a, b, c: Lados del triángulo b: Base h: Altura
Cuadrado  	**Perímetro** $P = 4a$ **Área** $A = a^2$	a: Lado del cuadrado
Rectángulo  	**Perímetro** $P = 2b + 2h$ **Área** $A = bh$	b: Base h: Altura
Paralelogramo  	**Perímetro** $P = 2a + 2b$ **Área** $A = bh$	a, b: Lados del paralelogramo h: Altura
Rombo  	**Perímetro** $P = 4a$ **Área** $A = \frac{d \cdot D}{2}$	a = Lado del rombo d = Diagonal menor D = Diagonal mayor
Polígono regular de "n" lados  	**Perímetro** $P = n\ell$ **Área** $A = \frac{P \cdot a}{2}$	ℓ: Lado del polígono n : Número de lados a: Apotema

Circunferencia 	**Perímetro** $P = 2\pi r = \pi D$ **Área** $A = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4}$	r = Radio D = Diámetro C = Centro de la circunferencia
Sector circular 	**Perímetro** $P = a + 2r$ **Área** $A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{ar}{2}$	r = Radio n = Grados sexagesimales $\pi = 3.14159\ldots$ a = Longitud de arco $\left(\frac{2\pi nr}{360°}\right)$
Segmento circular 	**Perímetro** $P = a + m$ **Área** $A = \frac{\pi r^2 n}{360°} - \frac{m(r-h)}{2}$	r = Radio n = Grados sexagesimales $\pi = 3.14159\ldots$ m = Cuerda h = altura a: arco = $\frac{2\pi rn}{360°}$

Ejemplo 1

El área de un círculo de radio 2.5, es:

a) $2.5\pi\ u^2$ b) $5\pi\ u^2$ c) $6.25\pi\ u^2$ d) $12.5\pi\ u^2$

Solución:

El área de un círculo de radio "r", es,

$$A = \pi r^2$$

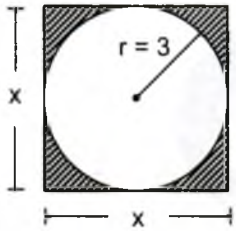
si r = 2.5, entonces,

$$A = \pi r^2 = \pi(2.5)^2 = \pi(6.25) = 6.25\pi\ u^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El área de la figura sombreada es:



a) $x^2 - 9\pi$ b) $9\pi - x^2$ c) 9π d) x^2

Solución:

Sean,

A_s: Área sombreada, A_2: Área del cuadrado y A_3: Área del círculo,

entonces, el área sombreada se obtiene,

$$A_s = A_2 - A_3$$

Siendo,

$A_2 = x^2$ y $A_3 = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$

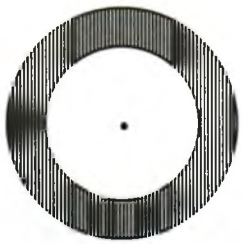
Por tanto, el área sombreada es,

$$A_s = A_2 - A_3 = x^2 - 9\pi$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r_1 = 5 cm y r_2 = 8 cm.



¿Cuál es el área del anillo formado por los dos círculos?

a) 18π cm^2 b) 39π cm^2 c) 54π cm^2 d) 64π cm^2

Solución:

Sean, A_s: Área del anillo, A_1: Área del círculo de radio 5 cm y A_2: Área del círculo de 8 cm, entonces,

$$A_s = A_2 - A_1$$

donde,

$A_1 = \pi(5)^2 = 25\pi$ y $A_2 = \pi(8)^2 = 64\pi$

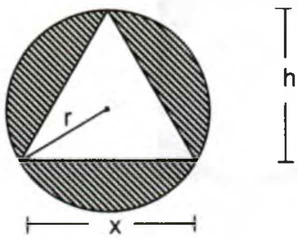
por tanto,

$A_s = A_2 - A_1 = 64\pi - 25\pi = 39\pi$ cm^2

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

Se inscribe un triángulo equilátero de lado "x" en un círculo de radio "r", como lo muestra la figura:



El área sombreada es:

a) $\pi r^2 - \sqrt{3}\,x^2$ b) $\pi r^2 - \frac{1}{4}x^2$ c) $\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ d) $\pi r^2 - x^2$

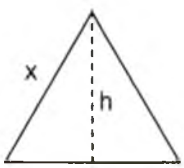
Solución:

Sean A_s: Área sombreada, A_1: Área del círculo y A_2: Área del triángulo, entonces,

$$A_s = A_1 - A_2$$

Área del triángulo

En el triángulo, se obtiene la altura en términos de su lado y se aplica teorema de Pitágoras.



$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3}{4}x^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Entonces, el área del triángulo es:

$$A_2 = \frac{xh}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

Área del círculo

El área del círculo de radio "r", es:

$$A_1 = \pi r^2$$

Área de la figura sombreada

El área de la figura sombreada es:

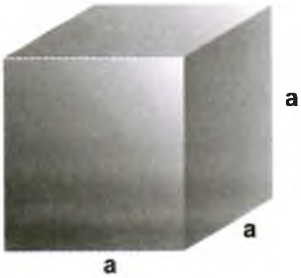
$$A_s = A_1 - A_2 = \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Volumen

Se le llama volumen a la magnitud del espacio ocupado por un cuerpo geométrico.

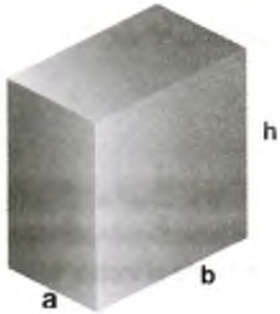
Cubo



$V = a^3$

a = Longitud de la arista

Prisma rectangular (Paralelepípedo)



$V = abh$

a = Ancho

b = Largo

h = Altura

Cilindro circular



$V = \pi r^2 h$

r = Radio

h = Altura

Cono



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

r = Radio

h = Altura

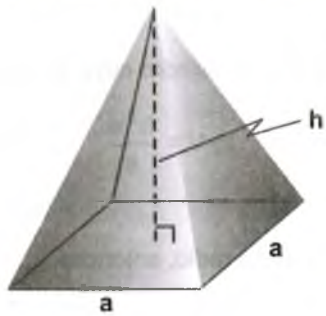
Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

r = Radio

Pirámide de base cuadrada



$V = \frac{1}{3}a^2 h$

a = Lado de la base

h = Altura

Ejemplo 1

¿Cuál es el volumen de una esfera de radio cuatro centímetros?

a) $12\pi\ cm^3$ b) $\frac{256\pi}{3} cm^3$ c) $\frac{64\pi}{3} cm^3$ d) $\frac{256\pi}{192} cm^3$

Solución:

El volumen de una esfera de radio "r" es,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

si r = 4 cm, entonces,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4\ cm)^3 = \frac{4}{3}\pi\ (64\ cm^3) = \frac{256\pi}{3} cm^3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El volumen de un cono circular recto de altura 12.5 cm y radio 3.2 cm es:

a) $\frac{64}{3}\pi$ b) $\frac{128}{3}\pi$ c) $\frac{16}{3}\pi$ d) $\frac{32}{3}\pi$

Solución:

El volumen de un cono circular recto es,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

si r = 3.2 y h = 12.5, entonces,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(3.2)^2(12.5) = \frac{1}{3}\pi(10.24)(12.5) = \frac{128}{3}\pi$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Al expresar el volumen de un cilindro cuya altura es el doble de su radio, en términos de su altura, se obtiene:

a) $V = \frac{h^2\pi}{4}$ b) $V = \frac{h^3\pi}{8}$ c) $V = \frac{h^2\pi}{8}$ d) $V = \frac{h^3\pi}{4}$

Solución:

Si la altura es el doble de su radio, entonces,

$$h = 2r \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{h}{2}$$

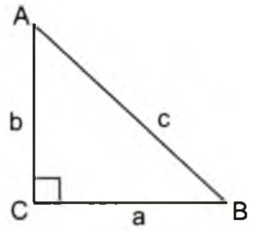
sustituyendo $r = \frac{h}{2}$ en la fórmula del volumen de un cilindro, se obtiene,

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{h^3\pi}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Trigonometría

Triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras
Es el triángulo que tiene un ángulo recto (90°), a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y el lado que se opone a dicho ángulo, se llama hipotenusa.



c: hipotenusa

a, b: catetos

$\angle A, \angle B$: ángulos agudos

$\angle A + \angle B = 90°$

$\angle C = 90°$

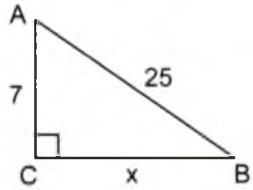
– Teorema de Pitágoras

Establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor de lado "x" en el siguiente triángulo?



a) 12 b) 17 c) 24 d) 28

Solución:

Por teorema de Pitágoras,

$$(\text{hip})^2 = (\text{cat. } 1)^2 + (\text{cat. } 2)^2 \rightarrow (25)^2 = (7)^2 + x^2 \rightarrow 625 = 49 + x^2$$

$$625 - 49 = x^2$$

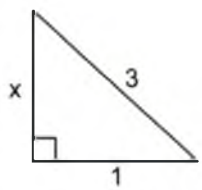
$$576 = x^2$$

$$x = \sqrt{576} = 24$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

En el siguiente triángulo rectángulo, el valor del lado "x" es:



a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 4

Solución:

Por el teorema de Pitágoras,

$$(3)^2 = (1)^2 + x^2 \rightarrow 9 = 1 + x^2 \rightarrow 8 = x^2$$

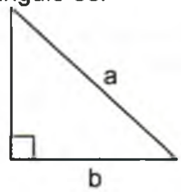
$$\sqrt{8} = x$$

$$2\sqrt{2} = x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

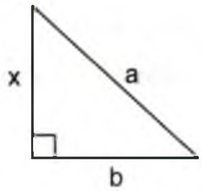
El valor del lado restante en el triángulo rectángulo es:



a) $\sqrt{a^2 + b^2}$ b) $\sqrt{b^2 - a^2}$ c) $a - b$ d) $\sqrt{a^2 - b^2}$

Solución:

Sea "x" el lado restante, entonces,



Por el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + x^2$$

despejando "x", se obtiene,

$$a^2 - b^2 = x^2 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{a^2 - b^2} = x$$

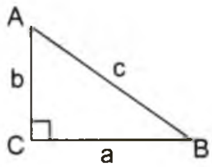
La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Funciones trigonométricas

Son las relaciones por cociente entre los lados de un triángulo rectángulo.

	Abreviatura		Abreviatura
Seno = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	**sen** θ	**Cotangente** = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	**cot** θ **= ctg** θ
Coseno = $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	**cos** θ	**Secante** = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	**sec** θ
Tangente = $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	**tan** θ **= tg** θ	**Cosecante** = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	**csc** θ

En el triángulo ABC, los catetos se designan de acuerdo al ángulo del que se desea obtener sus razones trigonométricas.

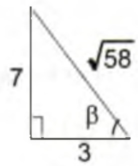


Para el ángulo A
- c: hipotenusa
- a: cateto opuesto
- b: cateto adyacente

Para el ángulo B
- c: hipotenusa
- b: cateto opuesto
- a: cateto adyacente

Ejemplo 1

En el siguiente triángulo rectángulo:



La función "tan β" se define por:

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{\sqrt{58}}{3}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{3}{\sqrt{58}}$

Solución:

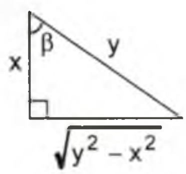
Para el ángulo β la hipotenusa = $\sqrt{58}$, cateto opuesto = 7 y cateto adyacente: 3, entonces,

$$\tan\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{7}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

En el siguiente triángulo rectángulo,



La función csc β es:

a) $\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}$ b) $\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ c) $\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}$ d) $\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$

Solución:

Para el ángulo β, la hipotenusa = y, cateto opuesto = $\sqrt{y^2-x^2}$ y cateto adyacente = x, entonces,

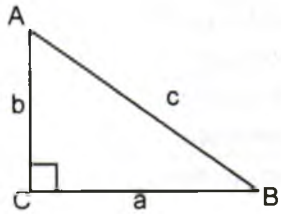
$$\csc\beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Cofunciones

En todo triángulo rectángulo la función de uno de los ángulos agudos es igual a su cofunción del ángulo complementario.

En el triángulo ABC, los ángulos A y B son complementarios, esto es, suman 90°, entonces,



$$\text{sen } A = \cos B = \frac{a}{c} \qquad \text{ctg } A = \tan B = \frac{b}{a}$$

$$\cos A = \text{sen } B = \frac{b}{c} \qquad \sec A = \csc B = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \text{ctg } B = \frac{a}{b} \qquad \csc A = \sec B = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 1

La función sen 36° en términos de su cofunción es:

a) csc 54° b) cot 54° c) sec 54° d) cos 54°

Solución:

El ángulo complementario de 36° es 54° y la cofunción de seno es coseno, por tanto,

$$\text{sen } 36° = \cos 54°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Valor de las funciones trigonométricas

Dado el valor de una función trigonométrica, determinar el valor de las funciones restantes.

Ejemplo 1

Si $\text{sen } \theta = \frac{1}{3}$, el valor de $\tan \theta$ y $\sec \theta$ es:

a) $\tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sec \theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

b) $\tan \theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\sec \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

c) $\tan \theta = \frac{1}{3}$, $\sec \theta = 3$

d) $\tan \theta = 2\sqrt{2}$, $\sec \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

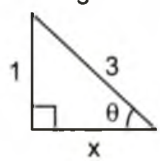
Solución:

Se construye un triángulo rectángulo colocando el ángulo θ en un ángulo agudo cualquiera y se ubican los datos de acuerdo a la función dada,

Definición

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{3} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Triángulo



se aplica teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente,

$$3^2 = 1^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad 9 = 1 + x^2 \quad \rightarrow \quad 8 = x^2$$

$$\sqrt{8} = x$$

$$2\sqrt{2} = x$$

luego,

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

► **Signos de las funciones trigonométricas**

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–
Cotangente	+	–	+	–
Secante	+	–	–	+
Cosecante	+	+	–	–

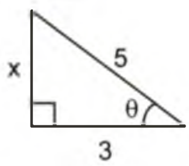
Ejemplo 1

El valor de sen θ si cos θ = $-\frac{3}{5}$ y θ se encuentra en el segundo cuadrante es:

a) sen θ = $\frac{4}{5}$ b) sen θ = $-\frac{4}{5}$ c) sen θ = $\frac{5}{4}$ d) sen θ = $-\frac{5}{4}$

Solución:

Se construye un triángulo rectángulo con los datos establecidos sin tomar en cuenta el signo,



Por el teorema de Pitágoras,

$5^2 = 3^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad 25 = 9 + x^2 \quad \rightarrow \quad 16 = x^2$

$4 = x$

en el segundo cuadrante la función seno es positiva, entonces,

$$\text{sen}\ \theta = \frac{4}{5}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

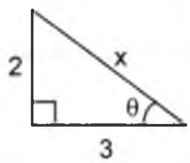
Ejemplo 2

El valor cos θ si tan θ = $\frac{2}{3}$ y θ se encuentra en el tercer cuadrante es:

a) cos θ = $\frac{3}{\sqrt{13}}$ b) cos θ = $-\frac{3}{\sqrt{13}}$ c) cos θ = $\frac{\sqrt{13}}{3}$ d) cos θ = $-\frac{2}{\sqrt{13}}$

Solución:

Se construye un triángulo rectángulo con los datos dados,



Por el teorema de Pitágoras,

$x^2 = 2^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 + 9 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{13}$

en el tercer cuadrante la función coseno es negativa, por tanto,

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

▶ Solución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es hallar la medida de los ángulos y lados faltantes en función de los datos que se proporcionaron.

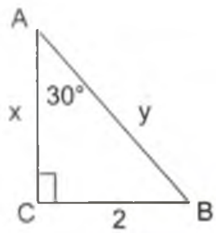
Para resolver un triángulo se utiliza tanto el teorema de Pitágoras como las funciones trigonométricas.

Valores de funciones trigonométricas para ángulos notables

Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Grados	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ejemplo 1

El valor de los lados "x", "y" y el ángulo B es:



Solución:

La suma de ángulos agudos es 90°, $\angle A + \angle B = 90° \rightarrow 30° + \angle B = 90°$

$$\angle B = 90° - 30°$$

$$\angle B = 60°$$

para el ángulo A = 30°,

cateto opuesto = 2 cateto adyacente = x hipotenusa = y

El valor de "x" se obtiene utilizando una función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente,

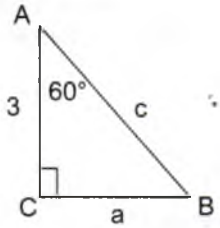
$$\tan 30° = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad x \tan 30° = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{\tan 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

El valor de "y" se obtiene utilizando una función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y la hipotenusa,

$$\text{sen } 30° = \frac{2}{y} \quad \rightarrow \quad y \text{ sen } 30° = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2}{\text{sen } 30°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Ejemplo 2

En el siguiente triángulo:



Los valores de "a" y "c" son:

a) a = 3.18, c = 4.35 b) a = 4.51, c = 5.5 c) a = 5.19, c = 6 d) a = 2. 34, c = 4

Solución:

Para el ángulo A = 60°,

cateto opuesto = a cateto adyacente = 3 hipotenusa = c

para hallar el valor de "a" se elige la función que relacione el cateto adyacente y el cateto opuesto,

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \rightarrow \tan 60° = \frac{a}{3} \rightarrow a = 3\tan 60°$$

$$a = 3(\sqrt{3})$$
$$a = 5.19$$

para hallar el valor de "c" se elige la función que relacione el cateto adyacente y la hipotenusa,

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \cos 60° = \frac{3}{c} \rightarrow c = \frac{3}{\cos 60°}$$

$$c = \frac{3}{0.5}$$
$$c = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

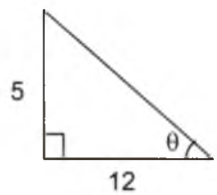
Ejemplo 3

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 12 cm, ¿cuál es el valor del ángulo opuesto al cateto que mide cinco centímetros?

a) $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ c) $\cos^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ d) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

Solución:

Sea θ el ángulo opuesto al cateto que mide cinco centímetros,



se elige la función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente, entonces,

$$\tan\theta = \frac{5}{12} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

▶ Reducción al primer cuadrante

Las funciones trigonométricas de ángulos mayores a 90° se pueden expresar en términos de ángulos que se encuentren en el primer cuadrante aplicando la forma ($n \cdot 90° \pm \theta$), donde "n" es un número positivo y "θ" un ángulo menor a 90°, el resultado será equivalente a:

a) La misma función de "θ" si n es par.

b) La cofunción de "θ" si n es impar

Estos resultados respetarán los signos de las funciones dadas.

Ejemplo 1

Al expresar sen 210° en función de un ángulo menor a 90° se obtiene:

a) – sen 30° b) sen 30° c) – cos 30° d) cos 30°

Solución:

El ángulo 210° se encuentra en el tercer cuadrante, por lo que la función seno es negativa, entonces,

$$\text{sen } 210° = \text{sen } (2 \cdot 90° + 30°) = -\text{ sen } 30°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Al expresar tan 63° en términos de un ángulo menor a 45°, se obtiene:

a) tan 27° b) – tan 27° c) cot 27° d) – cot 27°

Solución:

El ángulo de 63° se encuentra en el primer cuadrante donde la tangente es positiva, entonces,

$$\tan 63° = \tan (1 \cdot 90° - 27°) = \cot 27°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Al expresar sec 312° en términos de un ángulo menor a 90°, se obtiene:

a) sec 48°, csc 42° b) sec 42°, csc 48° c) sen 48°, cos 42° d) sen 42°, cos 48°

Solución:

El ángulo 312° se encuentra en el cuarto cuadrante donde la secante es positiva, entonces,

$$\sec 312° = \sec (4 \cdot 90° - 48°) = \sec 48°$$

también se puede expresar como,

$$\sec 312° = \sec (3 \cdot 90° + 42°) = \csc 42°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

▶ Identidades trigonométricas

Las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas se les denomina identidades trigonométricas y existe una gran variedad de ellas.

Inversas

$\text{sen } x = \frac{1}{\csc x}$ $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$

De cociente

$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$

Pitagóricas

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

De la suma de ángulos

$\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x$

$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y$

$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

De la diferencia de ángulos

$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cos y - \text{sen } y \cos x$

$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{ sen } y$

$\tan (x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Del ángulo doble

$\text{sen } 2x = 2\text{sen}x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Del ángulo mitad

$\text{sen } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\text{sen } x}$

Transformaciones de productos a sumas y diferencias

$\text{sen } x \cos y = \frac{1}{2}[\text{sen}(x + y) + \text{sen } (x - y)]$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

$\cos x \text{ sen } y = \frac{1}{2}[\text{sen}(x + y) - \text{sen } (x - y)]$ $\text{sen } x \text{ sen } y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos (x - y)]$

Transformaciones de sumas y diferencias a productos

$\text{sen } x + \text{sen } y = 2\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$ $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$

$\text{sen } x - \text{sen } y = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x - y}{2}\right)$ $\cos x - \cos y = -2\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x - y}{2}\right)$

Ecuaciones trigonométricas

Son igualdades que contienen funciones trigonométricas y cuya incógnita es el ángulo, éste se puede representar en grados o en radianes.

Al resolver una ecuación trigonométrica se determinan los valores del ángulo para los cuales se cumple la igualdad, esto es, que en una ecuación trigonométrica no siempre existe una única solución, en ocasiones existen varias, las cuales se expresan como conjunto solución.

Ejemplo 1

Los valores de "x" que satisfacen la ecuación sen x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ son:

a) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{3}$ y $-\frac{2\pi}{3}$ d) $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$

Solución:

Se despeja el ángulo x de la siguiente manera,

$$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad x = \text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

luego la función seno es positiva en el primero y segundo cuadrantes, entonces,

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

El valor de "x" que satisface la ecuación sen x = sen (π – x) es:

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $-\frac{3\pi}{2}$

Solución:

Para que se cumpla la igualdad los ángulos deben ser iguales, entonces,

$$\text{sen } x = \text{sen }(\pi - x) \quad \rightarrow \quad x = \pi - x$$

$$x + x = \pi$$

$$2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de "x" que satisface la ecuación sen x + sen x cos x = 0 es:

a) 0° b) 90° c) 270° d) 45°

Solución:

Se factoriza la expresión y cada uno de los factores se iguala a cero para resolver la ecuación,

$$\text{sen } x + \text{sen } x \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{sen } x(1 + \cos x) = 0$$

$$\text{sen } x = 0, \quad 1 + \cos x = 0$$

de las expresiones se obtiene,

$$x = \text{arc sen }(0) \quad ; \quad x = \text{arc cos }(-1)$$

$$x = 0°, 180°, 360° \qquad x = 180°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

El valor de "x" que satisface la ecuación cos x + cos 2x = 0 en el intervalo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ es:

a) 90° b) 270° c) 210° d) 330°

Solución:

La ecuación cos x + cos 2x = 0, se puede expresar como,

$$\cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

se factoriza la expresión,

$$\cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x\,(1 + 2\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad , \quad 1 + 2\operatorname{sen} x = 0$$

de las cuales se obtiene,

$$x = \operatorname{arc\,cos} 0 \quad ; \quad x = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 90°, 270° \qquad x = 210°, 330°$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

El valor de "x" que satisface la ecuación $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$ es:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{6}$

Solución:

Se factoriza la expresión,

$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0$$

igualando con cero cada uno de los factores,

$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad ; \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} x = -1$$

$$x = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad x = \operatorname{arc\,sen}(-1)$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{3\pi}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. La forma exponencial de $\log_6 216 = 3$, es:

 a) $3^6 = 216$ b) $216^3 = 6$ c) $6^{1/3} = 216$ d) $6^3 = 216$

2. Log 1000 es igual a:

 a) 2 b) 4 c) 10 d) 3

3. $\ln e^{3x}$ es igual a:

 a) x b) 3x c) 2x d) 4x

4. El valor de "x" en $\log_2 x = 3$, es:

 a) 4 b) 8 c) 16 d) 32

5. La forma logarítmica de $3^4 = 81$, es:

 a) $\log_4 3 = 81$ b) $\log_3 4 = 81$ c) $\log_3 81 = 4$ d) $\log\ 3 = 81$

6. El valor de x en $2^{2x-4} = 8$, es:

 a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{2}{7}$ c) 8 d) $\frac{1}{8}$

7. El valor de x en $9^{2x-4} = 27^x$, es:

 a) – 8 b) 8 c) 4 d) – 4

8. Las soluciones de $\log_2 (x + 1)^2 = 2$, son:

 a) 1 y – 1 b) –2 y 2 c) – 3 y 1 d) 3 y 1

9. Al resolver la ecuación $\ln(x - 1) = 1 + \ln x$, se obtiene:

 a) $1 + e$ b) $\frac{1}{1+e}$ c) $\frac{1}{1-e}$ d) $1 - e$

10. La suma de dos ángulos complementarios, es:

 a) 45° b) 90° c) 180° d) 360°

11. La suma de dos ángulos suplementarios ,es:

 a) 180° b) 360° c) 60° d) 90°

12. Un ángulo agudo es aquél que mide:

 a) Mas de 90° b) Mas de 180° c) 90° d) Menos de 90°

13. Un ángulo obtuso es aquél que mide:

 a) 180° b) Mas de 180 c) Mas de 90° y menos de 180° d) Menos de 90°

14. ¿Cuál es el complemento de 36°?

 a) 144° b) 54° c) 324° d) 9°

15. ¿Cuál es el ángulo suplementario a 132°?

a) 228° b) 138° c) 48° d) 68°

16. Si A y B son ángulos complementarios y B mide 32°, el valor de A, es:

a) 158° b) 13° c) 238° d) 58°

17. Si los ángulos M y N son suplementarios y N mide 84°, entonces M mide:

a) 16° b) 6° c) 36° d) 96°

18. Si P y Q son ángulos complementarios y Q mide 56°, el valor de P, es:

a) 64° b) 34° c) 124° d) 44°

19. El ángulo complementario de B = 48° , es:

a) 42° b) 72° c) 32° d) 132°

20. El ángulo suplementario a A = 128°, es:

a) 42° b) 32° c) 52° d) 62°

21. Convierta 48° a radianes:

a) $\frac{7\pi}{15}$ b) $\frac{2\pi}{15}$ c) $\frac{4\pi}{15}$ d) $\frac{\pi}{15}$

22. Convierta $\frac{5\pi}{4}$ a grados:

a) 315° b) 225° c) 45° d) 135°

23. Convierta $\frac{4\pi}{3}$ a grados:

a) 240° b) 120° c) 80° d) 300°

24. Convierta 120° a radianes:

a) $\frac{7\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{2\pi}{3}$

25. Convierta 150° a radianes:

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

26. Convierta 315° a radianes:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{7\pi}{4}$

27. Convierta 300° a radianes:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{5\pi}{3}$ d) $\frac{7\pi}{6}$

28. Convierta 240° a radianes:

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3}$

29. Convierta $\frac{3\pi}{2}$ a grados:

a) 0° b) 180° c) 90° d) 270°

30. Convierta $\frac{11\pi}{6}$ a grados:

a) 390° b) 330° c) 150° d) 210°

31. Convierta 405° a radianes:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{4}$ d) $\frac{9\pi}{4}$

32. Convierta 28.45 radianes a grados:

a) 28.5° b) 1630.06° c) 815.03° d) 5121°

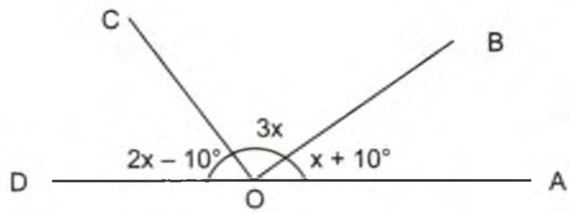
33. Convierta 5.24 radianes a grados:

a) 524° b) 52.4° c) 30.02° d) 300.23°

34. Convierta 2.56 radianes a grados:

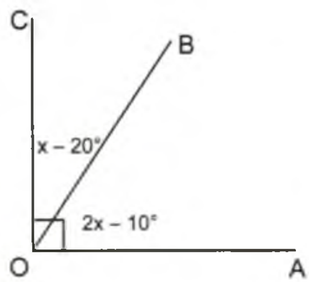
a) 146.67° b) 14.667° c) 256° d) 25.6°

35. Hallar el valor de $\angle AOB$:



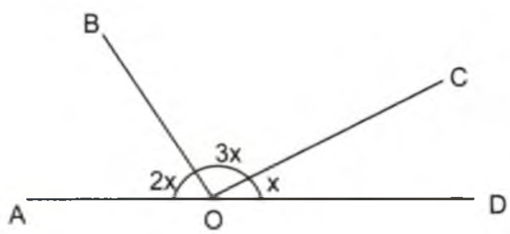
a) 180° b) 40° c) 20° d) 60°

36. Hallar el valor de $\angle BOC$:



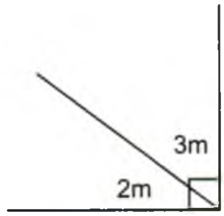
a) 40° b) 20° c) 70° d) 80°

37. Hallar el valor de x:



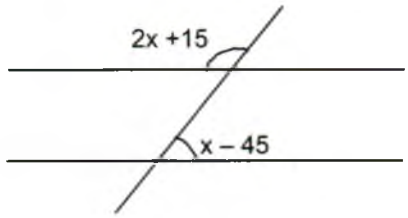
a) 90° b) 180° c) 15° d) 30°

38. Hallar el valor de “m”:



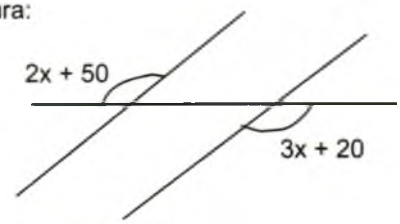
a) 18° b) 15° c) 36° d) 90°

39. ¿Cuál es el valor de x?



a) 180° b) 70° c) 40° d) 10°

40. Observe la siguiente figura:



De acuerdo con ella, ¿Cual es el valor de “x”?

a) 30° b) 22° c) 90° d) 180°

41. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a:

a) 90° b) 270° c) 180° d) 360°

42. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a:

a) 270° b) 360° c) 90° d) 180°

43. Todo ángulo exterior a un triángulo es igual a:

a) La suma de los tres ángulos interiores.
b) El ángulo opuesto.
c) La suma de los dos ángulos exteriores restantes.
d) La suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

44. El ángulo interior de un triángulo equilátero mide:

a) 180° b) 45°° c) 60° d) 30°

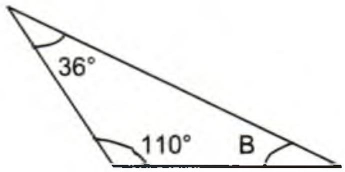
45. Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales y el lado adyacente a dichos ángulos se les conoce como:

a) Semejantes b) Simétricos c) Equiláteros d) Congruentes

46. Dos triángulos son semejantes si la correspondencia entre ellos es tal que:

a) Los ángulos correspondientes son proporcionales.
b) Los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son congruentes.
c) Los ángulos y lados correspondientes son diferentes.
d) Los ángulos de uno miden el doble de los del otro triángulo.

47. Del triángulo dado, ¿Cuál es el valor del ángulo B?



a) 24° b) 44° c) 34° d) 54°

48. Si el siguiente triángulo es isósceles, ¿cuánto miden los ángulos A y B?

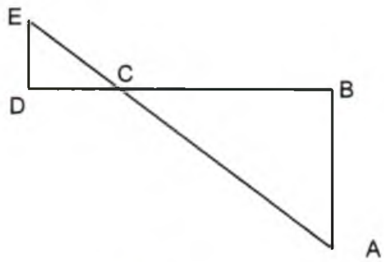


a) 80° b) 20° c) 60° d) 40°

49. Si la suma de dos ángulos interiores de un triángulo es de 140°, entonces el tercer ángulo mide:

a) 90° b) 140° c) 30° d) 40°

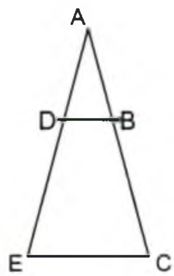
50. Observe la siguiente figura:



Si $\overline{DE} = 4$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{DC} = 2$, ¿Cuál es el valor de $\overline{AB}$?

a) 12 b) 2 c) 6 d) 4

51. Si en la figura $\overline{CE} = 12$, $\overline{AB} = 5$ y $\overline{BC} = 10$. ¿Cuál es el valor de $\overline{BD}$?



a) 6 b) 3 c) 4 d) 2

52. El polígono que tiene diez lados se llama:

a) pentágono b) decágono c) octágono d) hexágono

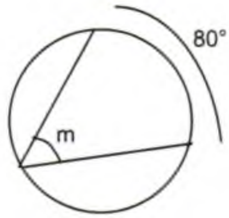
53. La recta que interseca en dos puntos a una circunferencia recibe el nombre de:

a) cuerda b) secante c) tangente d) diámetro

54. El segmento de recta que va de un punto de la circunferencia a otro pasando por el centro se le llama:

a) radio b) tangente c) exterior d) diámetro

55. Según la figura, ¿cuál es la medida del ángulo m?



a) 80° b) 40° c) 20° d) 160°

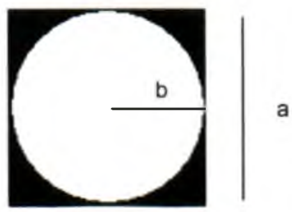
56. El volumen de una esfera de radio 9 cm, es:

a) 243π cm^3 b) 972π cm^3 c) 27π cm^3 d) 9π cm^3

57. Si el radio de un circulo es "m". ¿Cuál es su área?

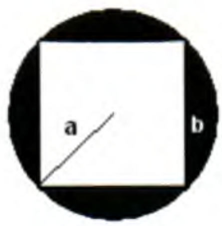
a) πm^3 b) $\pi^2 m^2$ c) πm^2 d) $2\pi m$

58. El área de la figura sombreada, es:



a) $a^2 - \pi b^2$ b) $b^2 - \pi a^2$ c) $\pi b^2 - a^2$ d) $b^2 - \pi a^2$

59. El área de la figura sombreada, es:



a) $a^2 - \pi b^2$ b) $\pi a^2 - b^2$ c) $\pi b^2 - a^2$ c) $b^2 - \pi a^2$

60. ¿Cuál es el área de un rectángulo de 10 cm de largo y 40 cm de ancho?

a) 40 cm^2 b) 200 cm^2 c) 400 cm^2 d) 80 cm^2

61. ¿Cuál es el área de un cuadrado de 20 cm por lado?

a) 400 cm^2 b) 40cm^2 c) 20cm^2 d) 80cm^2

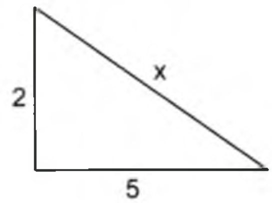
62. ¿Cuánto mide la arista de un cubo de 216 cm^3 de volumen?

a) 4 cm b) 8 cm c) 6 cm d) 12 cm

63. Si se tienen dos círculos concéntricos de radios r_1 = 5 cm y r_2 = 6 cm. ¿Cuál es el área del anillo formado entre los círculos?

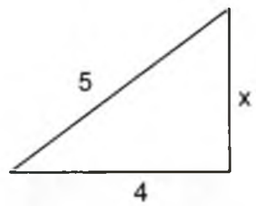
a) 11π cm^2 b) 6π cm^2 c) 5π cm^2 d) 10π cm^2

64. De acuerdo a la figura. ¿Cuál es el valor de x?



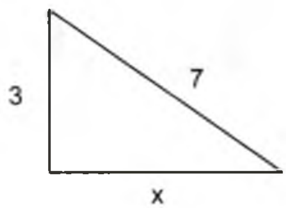
a) $\sqrt{29}$ b) 29 c) 24 d) $\sqrt{24}$

65. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $\sqrt{5}$ d) 4

66. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



a) $\sqrt{5}$ b) 20 c) $2\sqrt{10}$ d) $3\sqrt{7}$

67. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo cuyo ancho mide 6 cm y su largo mide 8 cm?

a) $\sqrt{10}$ cm b) 5 cm c) $\sqrt{5}$ cm d) 10 cm

68. ¿Cuánto mide la altura de un triángulo equilátero de 12 cm por lado?

a) 6 cm b) $6\sqrt{3}$ cm c) $\sqrt{3}$ d) 108

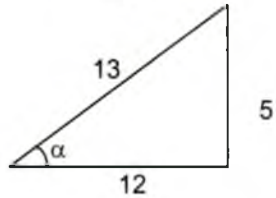
69. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{50}$ cm?

a) 5 cm b) 25 cm c) 10cm 50 cm

70. ¿Cuánto mide la altura de un triángulo si su base es de 40 cm y su área es de 600 cm^2?

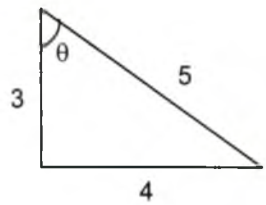
a) 40 cm b) 300 cm c) 15 cm d) 30 cm

71. En relación al triángulo mostrado, la razón $\frac{5}{13}$ expresa el valor de:



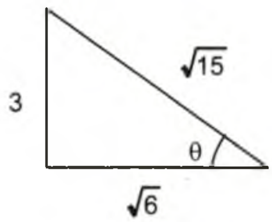
a) sen α b) cos α c) tan α d) cot α

72. En relación al triángulo mostrado la razón $\frac{3}{4}$ expresa el valor de:



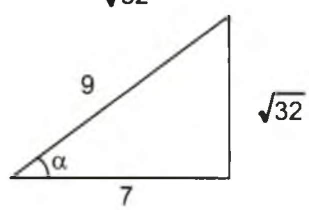
a) cos θ b) sen θ c) cot θ d) tan θ

73. En relación al triángulo mostrado, la razón $\frac{\sqrt{15}}{3}$ expresa el valor de:



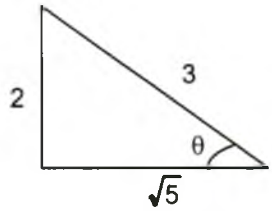
a) sec θ b) sen θ c) cot θ d) csc θ

74. En relación al triángulo mostrado, la razón $\frac{7}{\sqrt{32}}$ expresa el valor de:



a) sen α b) cos α c) tan α d) cot α

75. En relación al triángulo mostrado la razón $\frac{2}{3}$ expresa el valor de:



a) cos θ b) sen θ c) cot θ d) tan θ

76. ¿Cuál es el valor del sen 60°?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

77. ¿Cuál es el valor de tan 45°?

a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

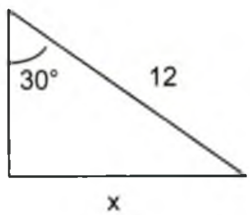
78. ¿Cuál es el valor de tan 60°?

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 1 d) $\sqrt{3}$

79. ¿Cuál es el valor de csc 45°?

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) 1 d) 0

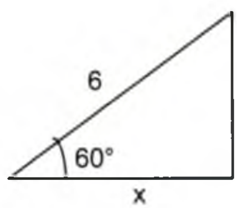
80. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



sen 30° = 0 .5
cos 30° = .8860
tan 30° = .5774

a) 12 b) 24 c) 10 d) 6

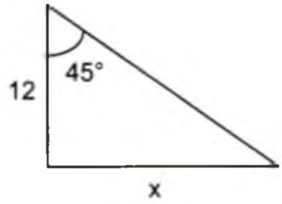
81. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



cos 60° = 0 .5
sen 60° = .8860
tan 60° = 1.7343

a) 8 b) 4 c) 3 d) 6

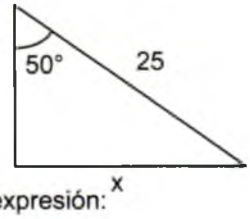
82. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de x?



cos 45° = 0. 7071
sen 45° = 0.7071
tan 45° = 1

a) 6 b) 12 c) 8 d) 3

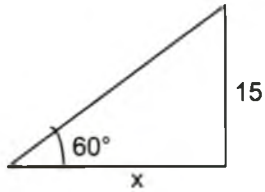
83. En el siguiente triángulo



El valor de " x " se obtiene con la expresión:

a) 25 sen 50° b) 25 cos 50° c) $\frac{25}{\text{sen}\,50°}$ d) $\frac{25}{\cos 50°}$

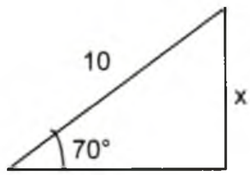
84. En el siguiente triángulo



El valor de " x " se obtiene con la expresión:

a) 15tan 60° b) 15 sen 60° c) $\frac{15}{\cot 60°}$ d) $\frac{15}{\tan 60°}$

85. En el siguiente triángulo



el valor de " x " se obtiene con la expresión:

a) 10tan 70° b) 10 sen 70° c) $\frac{10}{\text{sen}70°}$ d) $\frac{10}{\cos 70°}$

86. La expresión $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$ es igual a:

a) – 1 b) tan x c) cot x d) 1

87. La expresión $\frac{1}{\text{sen}\alpha}$ corresponde a:

a) tan α b) csc α c) sec α d) cos α

88. La expresión $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ es igual a:

a) $\sec\alpha$ b) $\cot\alpha$ c) $\csc\alpha$ d) $\tan\alpha$

89. La expresión $1 + \tan^2\alpha$ es igual a:

a) $\sec^2\alpha$ b) $\sec\alpha$ c) $\csc^2\alpha$ d) $\csc\alpha$

90. La expresión $\frac{1}{\cos\alpha}$ corresponde a:

a) $\cot\alpha$ b) $\sec\alpha$ c) $\csc\alpha$ d) $\tan\alpha$

91. En términos de sen θ y cos θ, cot θ es igual a:

a) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ b) $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ c) $\csc\theta\sec\theta$ d) $\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

92. La expresión $1 + \cot^2\theta$ es igual a:

a) $\tan^2\theta$ b) $\csc^2\theta$ c) $\operatorname{sen}^2\theta$ d) $\cos^2\theta$

93. La expresión $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ es igual a:

a) sen 2x b) cos 2x c) tan 2x d) csc 2x

94. La expresión sen (x – y) es igual a:

a) sen x cosy + sen y cos x
b) sen x cosy – sen y cos x
c) cos x cosy + sen y sen x
d) cos x cosy – sen y sen x

95. La expresión cos A cos B – sen A sen B corresponde a:

a) cos (A – B) b) sen (A – B) c) sen (A + B) d) cos (A + B)

96. Si $\cos x = \frac{4}{5}$, ¿cuál es el valor de tan x, si x está en el cuarto cuadrante?

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{4}{3}$

97. Si $\tan A = \frac{12}{5}$, ¿cuál es el valor de sen A, si A está en el tercer cuadrante?

a) $\frac{13}{12}$ b) $-\frac{13}{12}$ c) $\frac{12}{13}$ d) $-\frac{12}{13}$

98. ¿Cuál es el valor de “x” en la ecuación tanx = 1?

a) 30° b) 60° c) 180° d) 45°

99. Uno de los valores de x en la ecuación $4\cos^2x - 3 = 0$ es:

a) 60° b) 45° c) 30° d) 90°

100. La solución positiva de la ecuación $\cos^2x - \operatorname{sen}^2 x = 0$ es:

a) 45° b) 30° c) 60° d) 90°

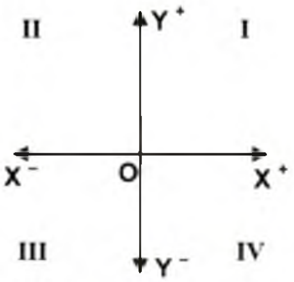
101. El valor de “x” en la ecuación sen (80° – x) = sen x:

a) 80° b) 40° c) 20° d) 100°

3 Geometría analítica

Propósito: el alumno conocerá los conceptos básicos de la geometría analítica y hallará los elementos, así como la ecuación de las cónicas.

Sistemas de coordenadas



a) Plano cartesiano

El plano cartesiano se forma por dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección O se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de Eje X o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de Eje Y o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano está dividido en 4 regiones llamadas "cuadrantes" y a cada punto P se le asigna un par coordenado P (x, y).

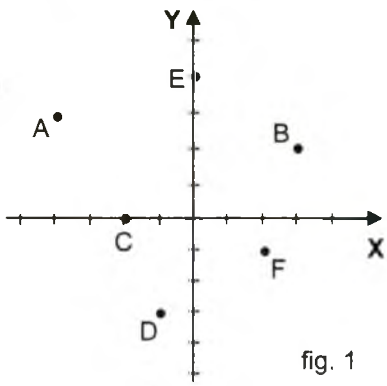


fig. 1

b) Localización de puntos

Para localizar un punto P(x, y) en el plano cartesiano se toma como referencia el origen, avanzando tanto como lo indique el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda según sea su signo, a partir de ese punto se avanza hacia arriba o abajo, según lo indique el signo del segundo número (ordenada).

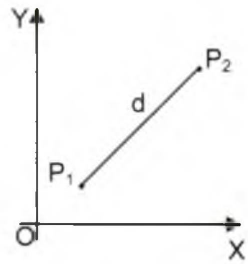
Ejemplo:

Graficar los puntos A (–4, 3), B (3,2), C (–2,0), D(–1, –3), E(0, 4) y F(2, –1) en el plano cartesiano. Ver fig. 1

c) Distancia entre dos puntos

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la distancia $\overline{P_1P_2}$ se define por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ejemplo 1

La distancia entre los puntos A(2, – 5) y B(1, 2) es:

a) $\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$ d) $25\sqrt{2}$

Solución:

Aplicando la fórmula, se obtiene:

$$d_{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La distancia entre los puntos A y B es de 5 u. Si el punto A tiene coordenadas (– 2, 1) y la abscisa de B es 1, ¿cuál es la ordenada del punto B?

a) – 4 b) – 3 c) – 2 d) – 1

Solución:

De acuerdo con los datos A(– 2, 1), B(1, y) y $\overline{AB} = 5$, entonces

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \rightarrow \quad 5 = \sqrt{(1-(-2))^2 + (y-1)^2}$$

$$25 = 9 + (y-1)^2$$

$$16 = (y-1)^2$$

$$\pm 4 = y - 1$$

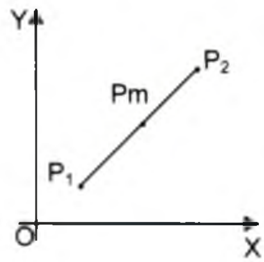
$$y = 5,\ y = -3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

d) Punto medio

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento, entonces las coordenadas de su punto medio son:

$$Pm\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Ejemplo 1

Determinar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A(3, – 1) y B(– 5, 7).

a) (– 4, 4) b) (– 1, 3) c) (– 2, – 4) d) (1, – 3)

Solución:

Aplicando la fórmula, se obtiene:

$$Pm\left(\frac{3-5}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) \quad \rightarrow \quad Pm(-1, 3)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Las coordenadas del punto medio de un segmento son (2, – 3). Si uno de los extremos tiene coordenadas (4, 5) determinar las coordenadas del otro extremo.

a) (3, 1) b) (3, – 4) c) (0, – 11) d) (0, 11)

Solución:

Sea P_1 (x_1, y_1) las coordenadas del extremo a determinar, entonces

$$2 = \frac{x_1 + 4}{2} \quad ; \quad -3 = \frac{y_1 + 5}{2}$$

despejando "x_1" y "y_1" respectivamente

$$x_1 = 2(2) - 4 \quad ; \quad y_1 = 2(-3) - 5$$

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = -11$$

por tanto, las coordenadas del extremo restante son:

$$(0, -11)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

e) Lugar geométrico

Primer problema fundamental de la geometría analítica. Discusión de un lugar geométrico

Dada una ecuación, trazar su gráfica.

- **Intersecciones con los ejes**
  - Con el eje X: Se sustituye y = 0, la ecuación resultante se resuelve para "x".
  - Con el eje Y: Se sustituye x = 0, la ecuación resultante se resuelve para "y"
- **Simetría con los ejes y el origen**
  - **Simetría con el eje X.**

Se sustituye la variable "y" por "– y", si la ecuación no se altera entonces la curva es simétrica con el eje X.

- **Simetría con el eje Y.**

Se sustituye la variable "x" por "– x", si la ecuación no se altera entonces la curva es simétrica con el eje Y.

- **Simetría con el origen.**

Si la curva es simétrica con el eje X y con el eje Y, entonces es simétrica con el origen.

- **Extensión de la curva**

Determina los intervalos de variación con respecto a "x" y "y".

- **Gráfica**

Conjunto de puntos del plano que satisfacen las condiciones establecidas por la ecuación

Ejemplo

Obtener la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$

Solución:

Intersecciones con los ejes

Con el eje X (y = 0):

$$x^2 + (0)^2 = 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2 \qquad I_x(\pm 2, 0)$$

Con el eje Y (x = 0):

$$(0)^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm 2 \qquad I_y(0, \pm 2)$$

Simetría con los ejes y el origen

Con el eje X (y por – y)

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + (-y)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

Es simétrica con el eje X

Con el eje Y (x por – x)

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$(-x)^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

Es simétrica con el eje Y

Con el origen

Es simétrica con el origen porque es simétrica con los ejes

Extensión de la curva

Dominio

Se despeja la variable "y"

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

donde

$$D_f = \{x \in R \,/\, -2 \le x \le 2\}$$

Rango

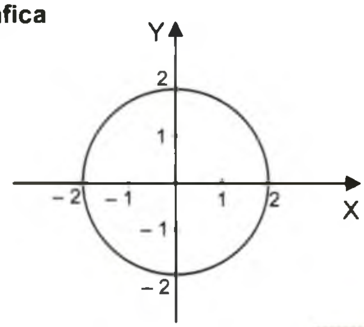
Se despeja la variable "x"

$$x = \sqrt{4 - y^2}$$

donde

$$R_f = \{y \in R \,/\, -2 \le y \le 2\}$$

Gráfica



Segundo problema fundamental de la geometría analítica

Determinar la ecuación del lugar geométrico que satisface las condiciones dadas.

Ejemplo 1

La ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que siempre están a 4 unidades del punto A(2, 3).

Solución:

Sea el punto móvil P(x, y), entonces

$d_{AP} = 4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 4$

desarrollando e igualando a cero

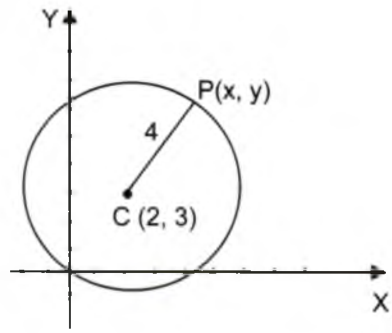
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 4 \quad \rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

Se obtiene la ecuación de una circunferencia con centro en (2, 3) y radio 4

Gráfica



Ejemplo 2

La ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos A (– 2, 0) y B (2, 0) es 6.

Solución:

Sea el punto móvil P(x, y), entonces

$$d_{PA} + d_{PB} = 6 \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

elevando ambos miembros al cuadrado

$$(x+2)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x-2)^2+y^2} + (x-2)^2 + y^2$$

$$2x - 9 = -3\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

elevando ambos miembros al cuadrado

$$4x^2 - 36x + 81 = 9(x^2 - 4x + 4 + y^2)$$

$$4x^2 - 36x + 81 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$

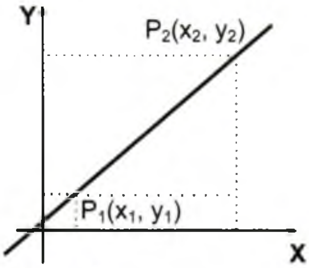
$$5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$$

se obtiene la ecuación de una elipse con centro en el origen.

La línea recta

a) Pendiente

Se define como la tangente del ángulo de inclinación de una recta.



La pendiente "m" de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 se obtiene con la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (5, 8) y B (– 1, 6)?

a) $-\frac{1}{3}$ b) 3 c) – 3 d) $\frac{1}{3}$

Solución:

Sustituyendo en la fórmula $(x_1, y_1) = (5, 8)$; $(x_2, y_2) = (-1, 6)$ se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-8}{-1-5} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La pendiente de una recta es $-\frac{1}{4}$, si pasa por el punto A(2, – 4) y el punto B cuya ordenada es – 6, ¿cuál es el valor de la abscisa de B?

a) – 10 b) – 2 c) 2 d) 10

Solución:

De acuerdo con los datos: $m = -\frac{1}{4}$, $(x_1, y_1) = (2, -4)$, $(x_2, y_2) = (x, -6)$, sustituyendo en la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{-6-(-4)}{x-2} \rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{-2}{x-2} \rightarrow -1(x-2) = -2(4)$$

$$-x + 2 = -8$$
$$-x = -8 - 2$$
$$-x = -10$$
$$x = 10$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

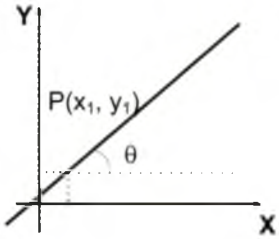
Formas de la ecuación de la recta y sus gráficas

Es el lugar geométrico de todos los puntos tales que si se toman dos cualesquiera, el valor de la pendiente es constante.

La ecuación general de la recta está dada por:

$$Ax + By + C = 0 \text{ donde A, B y C son constantes.}$$

Caso I. La ecuación de la recta punto - pendiente



Dado un punto $P(x_1, y_1)$ de una recta con pendiente m, la ecuación de la recta está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, – 6) y su pendiente es 2?

a) $2x + y - 2 = 0$ b) $2x - y + 16 = 0$ c) $2x - y - 2 = 0$ d) $2x - y - 14 = 0$

Solución:

Sustituyendo el punto $(x_1, y_1) = (4, -6)$ y $m = 2$ en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$y - (-6) = 2(x - 4)$ (Simplificando)

$y + 6 = 2x - 8$ (Igualando con cero)

$2x - 8 - y - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - y - 14 = 0$

La ecuación de la recta es: $2x - y - 14 = 0$, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La ecuación de la recta que pasa por el punto (– 3, 7) y su pendiente es $-\frac{2}{3}$ es:

a) $2x + 3y - 15 = 0$ b) $2x - 3y + 15 = 0$ c) $2x - y - 23 = 0$ d) $2x + y + 23 = 0$

Solución:

Sustituyendo el punto $(x_1, y_1) = (-3, 7)$ y $m = -\frac{2}{3}$ en $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 7 = -\frac{2}{3}(x - (-3))$ (Simplificando)

$3(y - 7) = -2(x + 3)$

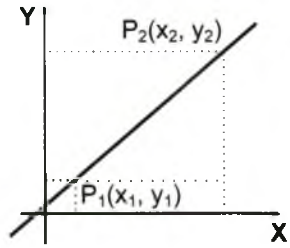
$3y - 21 = -2x - 6$ (Igualando a cero)

$2x + 6 + 3y - 21 = 0$

$2x + 3y - 15 = 0$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Caso II. La ecuación de la recta que pasa por dos puntos



Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ sobre una recta, su ecuación está dada por:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo:

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(– 2, 1) y B(– 10 , – 5)?

a) $4x - 3y + 19 = 0$ b) $3x - 4y + 19 = 0$ c) $4x + 3y - 10 = 0$ d) $3x - 4y + 10 = 0$

Solución:

Sustituyendo los puntos A(– 2, 1) y B(– 10 , – 5) en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{-5-1}{-10-(-2)}(x-(-2)) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{-6}{-8}(x+2)$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$$

$$4(y - 1) = 3(x + 2)$$

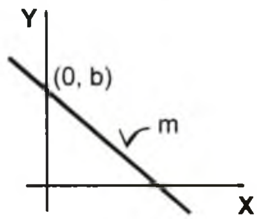
$$4y - 4 = 3x + 6$$

$$3x + 6 - 4y + 4 = 0$$

$$3x - 4y + 10 = 0$$

La ecuación de la recta es $3x - 4y + 10 = 0$, la respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Caso III. Forma pendiente – ordenada al origen de la ecuación de la recta



La ecuación pendiente ordenada al origen está dada por:

$$y = mx + b$$

Donde “m” es la pendiente y “b” la ordenada al origen.

Ejemplo 1

¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en – 6 y su pendiente es – 7?

a) $6x + y + 7 = 0$ b) $6x - y - 7 = 0$ c) $7x - y - 6 = 0$ d) $7x + y + 6 = 0$

Solución:

Sustituyendo los valores $m = -7$, $b = -6$ en la ecuación:

$$y = mx + b \quad \rightarrow \quad y = -7x - 6 \quad \rightarrow \quad 7x + y + 6 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

El valor de la pendiente de la recta $5x - 4y - 8 = 0$ es:

a) $\frac{5}{4}$ b) $-\frac{5}{4}$ c) 5 d) -4

Solución:

Se transforma la ecuación a la forma pendiente - ordenada al origen, $y = mx + b$, despejando "y":

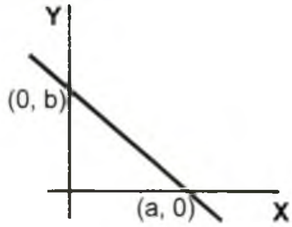
$$5x - 4y - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -4y = -5x + 8 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-5x+8}{-4}$$

$$y = \frac{-5}{-4}x + \frac{8}{-4}$$

$$y = \frac{5}{4}x - 2$$

De la ecuación $m = \frac{5}{4}$ y $b = -2$, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Caso IV. Forma simétrica de la ecuación de la recta



Dadas las intersecciones con los ejes coordenados "X" y "Y", la ecuación de la recta en su forma simétrica está dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo:

¿Cuál es la ecuación de la recta en su forma simétrica que interseca al eje X en 3 y al eje Y en -4?

a) $3x - 4y - 12 = 0$ b) $4x + 3y - 12 = 0$ c) $4x - 3y - 12 = 0$ d) $3x + 4y - 12 = 0$

Solución:

Sustituyendo $a = 3$, $b = -4$ en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, se obtiene:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{4x - 3y}{12} = 1$$

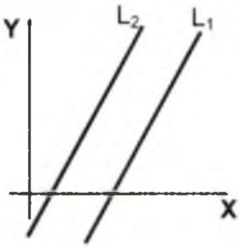
$$4x - 3y = 12$$

$$4x - 3y - 12 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.



Si $m_1 = m_2$ entonces $L_1 \parallel L_2$

Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, – 4) y B (8, – 6)?

a) $-\frac{2}{7}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $-\frac{7}{2}$

Solución:

Se obtiene la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(1 , – 4) y B (8, – 6), sustituyendo en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6-(-4)}{8-1} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$$

La pendiente de la recta paralela es $m = -\frac{2}{7}$, la respuesta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta 12x – 3y – 6 = 0?

a) $y = 4x + 5$ b) $y = -4x + 5$ c) $y = \frac{1}{4}x + 5$ d) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

Solución:

Se transforma la ecuación 12x – 3y – 6 = 0 a la forma y =mx + b, despejando "y":

$$12x - 3y - 6 = 0 \rightarrow -3y = -12x + 6 \rightarrow y = \frac{-12x+6}{-3} \rightarrow y = \frac{-12}{-3}x + \frac{6}{-3}$$

$$y = 4x - 2$$

$$y = mx + b$$

donde $m = 4$, $b = -2$

La pendiente de la recta es 4, la recta que tiene la misma pendiente es y = 4x + 5, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos A(2, – 1) y B(– 4, 3)?

a) $y = \frac{3}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{3}{2}x - 1$ c) $y = \frac{2}{3}x - 1$ d) $y = -\frac{2}{3}x - 1$

Solución:

Se determina la pendiente de la recta que pasa por A y B: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-1)}{-4-2} = \frac{3+1}{-4-2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$,

luego, las ecuaciones de las rectas tienen la forma y = mx + b, la recta con la misma pendiente es: $y = -\frac{2}{3}x - 1$,

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La ecuación de la recta que pasa por el punto (– 3, 5) y que es paralela a la recta $2x - 3y + 4 = 0$ es:

a) $2x + 3y + 1 = 0$ b) $2x - 3y + 21 = 0$ c) $3x + 2y - 1 = 0$ d) $2x - 3y + 14 = 0$

Solución:

Se expresa la ecuación $2x - 3y + 4 = 0$ en la forma $y = mx + b$

$$2x - 3y + 4 = 0 \rightarrow -3y = -2x - 4 \rightarrow y = \frac{-2x-4}{-3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

La pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$.

Dado que la recta buscada es paralela, la pendiente será la misma, sustituyendo $m = \frac{2}{3}$ y el punto $(x_1, y_1) = (-3, 5)$ en la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene:

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x - (-3)) \rightarrow 3(y - 5) = 2(x + 3) \rightarrow 3y - 15 = 2x + 6$$

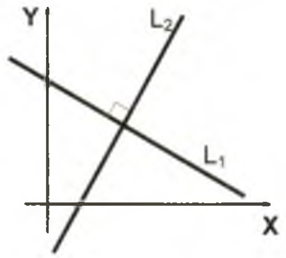
$$0 = 2x + 6 - 3y + 15$$

$$2x - 3y + 21 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es – 1.



Si $m_1 \cdot m_2 = -1$ entonces $L_1 \perp L_2$

Ejemplo 1

Si una recta tiene pendiente $\frac{5}{4}$, la pendiente de la recta perpendicular a ella es $-\frac{4}{5}$, ya que satisface la condición: $\left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -1$

Ejemplo 2

¿Cuál es la pendiente de la recta perpendicular a la recta que pasa por los puntos A (9, – 2) y B (– 9, 10)?

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{2}$

Solución:

Se obtiene la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(9 , – 2) y B (– 9, 10),

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-(-2)}{-9-(9)} = \frac{12}{-18} = -\frac{2}{3}$$

La pendiente de la recta perpendicular es el recíproco de la pendiente encontrada y de signo contrario, es decir

$$m_{\perp} = \frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $6x + 2y - 4 = 0$?

a) $y = 3x + 1$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = \frac{1}{3}x + 1$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Solución:

Se transforma la ecuación $6x + 2y - 4 = 0$ a la forma $y = mx + b$:

$$6x + 2y - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2y = -6x + 4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-6x + 4}{2}$$

$$y = \frac{-6}{2}x + \frac{4}{2}$$

$$y = -3x + 2$$

La pendiente de la recta es $m = -3$.

La recta perpendicular tiene como pendiente el recíproco de -3 y de signo contrario, es decir $m_{\perp} = \frac{1}{3}$.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (3, 5) y (2, 1)?

a) $y = \frac{1}{4}x + 6$ b) $y = -\frac{1}{4}x + 6$ c) $y = 4x + 6$ d) $y = -4x + 6$

Solución:

Se determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos (3, 5) y (2, 1)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$$

La recta perpendicular es aquella de pendiente recíproca a 4 y de signo contrario, es decir, $m_{\perp} = -\frac{1}{4}$,

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

La ecuación de la recta que pasa por el punto (2, – 7) y que es perpendicular a la recta $3x - 4y - 8 = 0$ es:

a) $3x + 4y + 22 = 0$ b) $3x - 4y - 34 = 0$ c) $4x - 3y - 24 = 0$ d) $4x + 3y + 13 = 0$

Solución:

Se expresa la ecuación $3x - 4y - 8 = 0$ en la forma $y = mx + b$

$$3x - 4y - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -4y = -3x + 8 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-3x + 8}{-4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

La pendiente de la recta es $m = \frac{3}{4}$.

La pendiente de la recta perpendicular es el recíproco de $\frac{3}{4}$ y de signo contrario, es decir, $m_{\perp} = -\frac{4}{3}$.

Se determina la ecuación de la recta que pasa por (2, – 7) y tiene pendiente $-\frac{4}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - (-7) = -\frac{4}{3}(x - 2) \quad \rightarrow \quad 3(y + 7) = -4(x - 2) \quad \rightarrow \quad 3y + 21 = -4x + 8$$

$$4x - 8 + 3y + 21 = 0$$

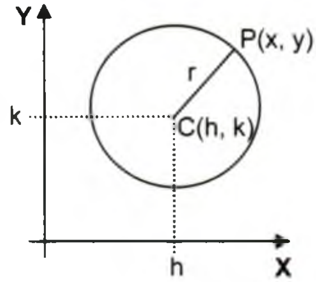
$$4x + 3y + 13 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Circunferencia

Definición y elementos

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.



Ecuación de la circunferencia

- **Forma canónica**

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen (0, 0) y radio "r" está dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- **Forma ordinaria**

Dados el centro (h, k) y el radio "r", la ecuación está dada por la fórmula:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- **Forma general**

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = C$

Ejemplo 1

¿Cual de las siguientes ecuaciones representa una circunferencia?

a) $y^2 = 4x$ b) $x + 2y - 3 = 0$ c) $x^2 + y^2 = 9$ d) $x^2 + 2y^2 = 4$

Solución:

En la ecuación de la circunferencia los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales tanto en número como en signo, la opción correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (3, – 4) y radio igual a 6?

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$

Solución:

Sustituyendo las coordenadas del centro y el radio se obtiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = (6)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

La circunferencia en su forma general es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4 es:

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $x^2 + y^2 = 4$ c) $x^2 + y^2 = 8$ d) $x^2 + y^2 = 16$

Solución:

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen es: $x^2 + y^2 = r^2$, sustituyendo r = 4

$$x^2 + y^2 = 4^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

¿Cuál es el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 34 = 0$?

a) (4, – 5) b) (–4, 5) c) (5, 4) d) (5, – 4)

Solución:

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 34 = 0$$

Agrupando los términos: $(x^2 + 8x) + (y^2 - 10y) = -34$

Completando el trinomio cuadrado perfecto: $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 10y + 25) = -34 + 16 + 25$

Factorizando: $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 7$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

El centro tiene coordenadas (– 4, 5), la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

Las coordenadas del centro de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4$ son:

a) (2, – 6) b) (– 6, 2) c) (2, 6) d) (6, – 2)

Solución:

La ecuación está en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, las coordenadas del centro (h, k) son: (2, 6).

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 6

La ecuación $x^2 + y^2 = 36$, representa:

a) Una circunferencia de centro en el origen y radio 36
b) Una circunferencia de centro en el origen y radio 6
c) El punto (0, 36)
d) El punto (0, 6)

Solución:

La ecuación tiene la forma $x^2 + y^2 = r^2$, la cual representa una circunferencia de centro en el origen, entonces

$$r^2 = 36 \quad \rightarrow \quad r = 6$$

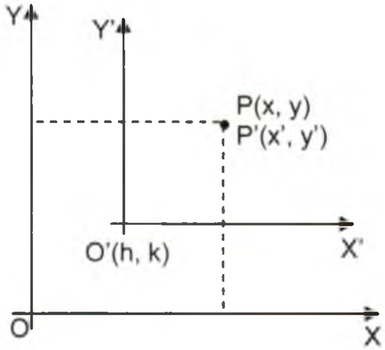
La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Traslación de ejes

Desplazamiento de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el nuevo origen sea el punto O'(h, k). La traslación se utiliza para eliminar los términos lineales de la ecuación de segundo grado.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Fórmulas que relacionan el sistema de coordenadas X'Y' con el sistema XY.



Transformaciones

$x = x' + h$; $y = y' + k$

Ejemplo 1

Transformar la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$, trasladando el origen al punto O'(2, – 2).

Solución:

El nuevo origen es el punto O'(h, k) = O'(2, – 2),entonces h = 2 y k = – 2

Se obtienen las coordenadas en términos del sistema X'Y':

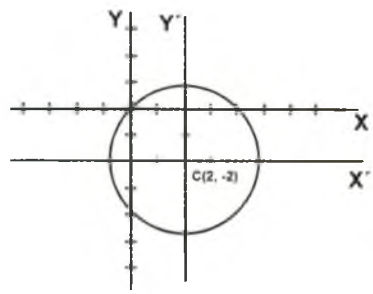
$$x = x' + h = x' + 2 \quad ; \quad y = y' + k = y' - 2$$

Por tanto, la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$(x' + 2)^2 + (y' - 2)^2 - 4(x' + 2) + 4(y' - 2) = 0$$

$$x'^2 + 4x' + 4 + y'^2 - 4y' + 4 - 4x' - 8 + 4y' - 8 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$



Ejemplo 2

Mediante una traslación de ejes eliminar los términos lineales de la ecuación $x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$ y hallar las coordenadas del nuevo origen.

Solución:

Sustituyendo $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación, resulta:

$$(x' + h)^2 + 9(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 18(y' + k) - 23 = 0$$

Desarrollando y agrupando los términos lineales

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Para eliminar los términos lineales de x' y y' se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$2h + 4 = 0 \qquad 18k - 18 = 0$$

$$2h = -4 \qquad 18k = 18$$

$$h = -2 \qquad k = 1$$

Entonces, el nuevo origen se encuentra en el punto (–2, 1) y la ecuación referida al nuevo origen es:

$$x'^2 + 9y'^2 + (2(-2) + 4)x' + (18(1) - 18)y' + (-2)^2 + 9(1)^2 + 4(-2) - 18(1) - 23 = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 + (-4 + 4)x' + (18 - 18)y' + 4 + 9 - 8 - 18 - 23 = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 = 36$$

Secciones cónicas

Las cónicas como cortes de un cono

- **Circunferencia**



- **Parábola**



- **Elipse**

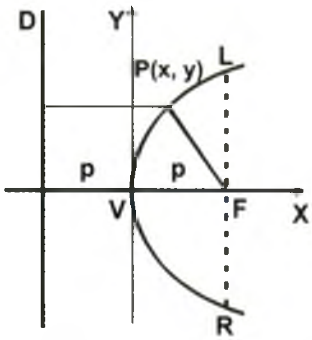


- **Hipérbola**



Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la distancia a un punto fijo llamado foco equidista de una recta fija llamada directriz.



Elementos

V: Vértice

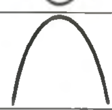
F: Foco

D: Directriz

LR: Lado recto, LR = $|4p|$

p: Parámetro
(Distancia del vértice al foco o a la directriz)

De acuerdo al signo del parámetro, se determina la concavidad de la parábola:

	Horizontal	Vertical
"p" es positivo		
"p" es negativo		

Fórmulas

Parábola horizontal con vértice en el origen

- Su eje focal coincide con el eje X ($y = 0$).
- Su ecuación canónica es: $y^2 = 4px$.
- Foco: $F(p, 0)$.
- Directriz: $x + p = 0$.

Parábola vertical con vértice en el origen

- Su eje focal coincide con el eje Y ($x = 0$).
- Su ecuación canónica es: $x^2 = 4py$.
- Foco: $F(0, p)$.
- Directriz: $y + p = 0$.

Parábola horizontal con vértice fuera del origen

- Su eje focal es paralelo al eje X.
- Su ecuación ordinaria es: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.
- Vértice: (h, k).
- Foco: $F(h + p, k)$.
- Directriz: $x - h + p = 0$.

Parábola horizontal con vértice fuera del origen

- Su eje focal es paralelo al eje Y.
- Su ecuación ordinaria es: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.
- Vértice: (h, k).
- Foco: $F(h, k + p)$.
- Directriz: $y - k + p = 0$.

Ecuación general de la parábola

Horizontal: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; Vertical: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una parábola?

a) $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - y^2 = 9$

c) $3y^2 - x - 6y - 1 = 0$

d) $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 21 = 0$

Solución:

Si la ecuación tiene un solo término cuadrático ya sea en "x" o en "y", la ecuación es una parábola, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El foco de la parábola $y^2 = -8x$ tiene sus coordenadas en:

a) $F(0, -2)$ b) $F(-2, 0)$ c) $F(2, 0)$ d) $F(0, 2)$

Solución:

La parábola $y^2 = -8x$ tiene la forma $y^2 = 4px$ que representa una parábola horizontal, donde

$$4p = -8 \quad \rightarrow \quad p = \frac{-8}{4} = -2$$

Su foco es el punto $(p,0)$, entonces:

$$F(-2, 0)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

La ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz la recta $y - 3 = 0$, es:

a) $x^2 = 12y$ b) $y^2 = -12x$ c) $y^2 = 12x$ d) $x^2 = -12y$

Solución:

La directriz $y - 3 = 0$ corresponde a una parábola vertical y tiene la forma $y + p = 0$, entonces:

$$p = -3$$

La ecuación es $x^2 = 4py$, por tanto:

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad x^2 = 4(-3)y \quad \rightarrow \quad x^2 = -12y$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco el punto (– 4, 0) es:

a) $x^2 = -16y$ b) $y^2 = -16x$ c) $y^2 = 16x$ d) $x^2 = 16y$

Solución:

Las coordenadas del foco tienen la forma (p, 0), entonces la parábola es horizontal con ecuación $y^2 = 4px$ por tanto, $p = -4$ y la ecuación es:

$$y^2 = 4px \quad \rightarrow \quad y^2 = 4(-4)x \quad \rightarrow \quad y^2 = -16x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

Las coordenadas del vértice de la parábola $(x-2)^2 = 8(y-2)$ son:

a) V(2, 2) b)V(– 2, 2) c) V(2, – 2) d) V(– 2, – 2)

Solución:

La ecuación de la parábola tiene la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y el vértice tiene coordenadas (h, k), entonces:

$$-h = -2 \qquad -k = -2$$

$$h = 2 \qquad k = 2$$

Las coordenadas del vértice son V(2, 2), la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

Las coordenadas del vértice de la parábola $(y-4)^2 = -16x - 48$ son:

a) (3, – 4) b) (– 3, 4) c) (4, – 3) d) (– 4, 3)

Solución:

Se factoriza la expresión del lado derecho:

$$(y-4)^2 = -16x - 48 \quad \rightarrow \quad (y-4)^2 = -16(x+3)$$

La ecuación tiene la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, entonces:

$$-k = -4 \qquad -h = 3$$

$$k = 4 \qquad h = -3$$

Las coordenadas del vértice son (h, k) = (– 3, 4), la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 7

Las coordenadas del foco de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 12x - 6y + 21 = 0$, son:

a) F(3, –4) b) F(4, –3) c) F(4, 3) d) F(–4, 3)

Solución:

Se agrupan los términos en "y" y se completa el trinomio cuadrado perfecto:

$$y^2 - 12x - 6y + 21 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 6y = 12x - 21 \quad \rightarrow \quad y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 12x - 21 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x - 21 + 9$$

$$(y-3)^2 = 12x - 12$$

$$(y-3)^2 = 12(x-1)$$

La ecuación tiene la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, entonces:

$$-k = -3 \qquad -h = -1 \qquad 4p = 12$$

$$k = 3 \qquad h = 1 \qquad p = 3$$

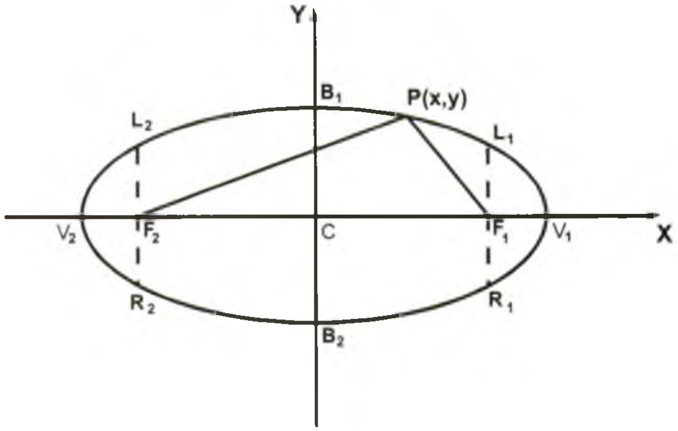
La parábola es horizontal y las coordenadas del foco son:

$$(h + p, k) = (1 + 3, 3) = (4, 3)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre constante.



C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$)

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ (lado recto)

Fórmulas

Elipse horizontal con centro en el origen

- Su eje focal coincide con el eje X.
- Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(a, 0)$, $V_2(-a, 0)$.
- Focos: $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

Elipse vertical con centro en el origen

- Su eje focal coincide con el eje Y.
- Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$.
- Focos: $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(b, 0)$, $B_2(-b, 0)$.

Elipse horizontal con centro en el punto (h, k)

- Su eje focal es paralelo al eje X.
- Su ecuación ordinaria es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(h + a, k)$, $V_2(h - a, k)$.
- Focos: $F_1(h + c, k)$, $F_2(h - c, k)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(h, k + b)$, $B_2(h, k - b)$.

Elipse vertical con centro en el punto (h, k)

- Su eje focal es paralelo al eje Y.
- Su ecuación ordinaria es: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.
- Vértices: $V_1(h, k + a)$, $V_2(h, k - a)$.
- Focos: $F_1(h, k + c)$, $F_2(h, k - c)$.
- Extremos del eje menor: $B_1(h + b, k)$, $B_2(h - b, k)$.

Ecuación general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

con $A \neq C$ y de igual signo.

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una elipse?

a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 + y^2 = 4$ c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

Solución:

Para que una ecuación represente una elipse, los coeficientes de los términos cuadráticos deben ser diferentes y de igual signo,

a) $y^2 = 4x$, solo tiene un término al cuadrado, representa una parábola.

b) $x^2 + y^2 = 4$, los coeficientes son iguales y de igual signo, representa una circunferencia.

c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, los coeficientes son diferentes y de igual signo, representa una elipse.

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 2

Las coordenadas de los vértices de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, son:

a) (– 5, 0) (5, 0) b) (0, – 5) (0, 5) c) (– 4, 0) (4, 0) d) (0, – 4) (0, 4)

Solución:

Para determinar los elementos de una elipse se deben tomar en cuenta las siguientes condiciones:

– Una elipse es horizontal, si el mayor de los denominadores se encuentra debajo de "x^2".

– Una elipse es vertical, si el mayor de los denominadores se encuentra debajo de "y^2".

Por tanto, la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ es vertical con centro en el origen y tiene la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, entonces:

$$a^2 = 25 \quad ; \quad b^2 = 16$$
$$a = 5 \quad\quad b = 4$$

Las coordenadas de los vértices son: (0, –a), (0, a) = (0, – 5), (0, 5), la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

¿Cuál es la longitud del lado recto de la elipse cuya ecuación es $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$?

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{8}{3}$ c) 4 d) 9

Solución:

Se transforma la ecuación a su forma canónica:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad\rightarrow\quad 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad\rightarrow\quad \frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=\frac{36}{36} \quad\rightarrow\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

La elipse es horizontal ya que el mayor de los denominadores se encuentra debajo de "x^2" y tiene la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, por tanto: $a^2 = 9, a = 3$; $b^2 = 4, b = 2$

el lado recto se define por:

$$\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(2)^2}{3}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 4

La forma ordinaria de la ecuación $5x^2 + 9y^2 + 30x - 36y + 36 = 0$ es:

a) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$ b) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$ c) $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$ d) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

Solución:

$$5x^2 + 9y^2 + 30x - 36y + 36 = 0 \quad\rightarrow\quad 5x^2 + 30x + 9y^2 - 36y = -36$$

$$5(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36$$

$$5(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 45 + 36$$

$$5(x + 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 45$$

dividiendo por 45 $\frac{5(x+3)^2}{45}+\frac{9(y-2)^2}{45}=\frac{45}{45}$

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 5

Las coordenadas de los focos de la ecuación $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$, son:

a) (3, 3), (3, – 5) b) (4, 0)(– 4, 0) c) (3, 3), (– 5, 3) d) (0, 4), (0, – 4)

Solución:

La elipse es horizontal y es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

El centro tiene coordenadas en (– 1, 3), a = 5 y b = 3, para determinar “c” se utiliza la condición:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad (5)^2=(3)^2+c^2 \quad \rightarrow \quad 25=9+c^2$$

$$25-9=c^2$$

$$16=c^2$$

$$c=4$$

Las coordenadas de los focos son:

$$(h+c, k)=(-1+4, 3)=(3, 3) \quad ; \quad (h-c, k)=(-1-4, 3)=(-5, 3)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 6

La ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4, 0), (– 4, 0) y focos los puntos (3, 0), (– 3, 0) es:

a) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{7}=1$ c) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{16}=1$ d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

Solución:

Los vértices y los focos son de la forma: (± a, 0) y (± c, 0), por tanto a = 4, c = 3, se aplica la condición para obtener el valor de “b”.

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad b^2=a^2-c^2 \quad \rightarrow \quad b^2=4^2-3^2=16-9=7$$

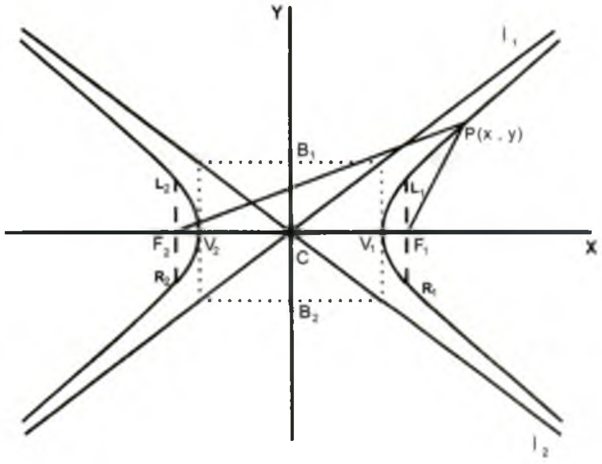
La elipse es horizontal con centro en el origen con ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre constante.



C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ (lado recto)

l_1 y l_2: Asíntotas

Fórmulas

Hipérbola horizontal con centro en el origen

– Su eje focal coincide con el eje X.

– Su ecuación canónica es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(a, 0)$, $V_2(-a, 0)$.

– Focos: $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

– Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Hipérbola vertical con centro en el origen

– Su eje focal coincide con el eje Y.

– Su ecuación canónica es: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(0, a)$, $V_2(0, -a)$.

– Focos: $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(b, 0)$, $B_2(-b, 0)$.

– Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Hipérbola horizontal con centro en (h, k)

– Su eje focal es paralelo al eje X.

– Su ecuación ordinaria es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(h + a, k)$, $V_2(h - a, k)$.

– Focos: $F_1(h + c, k)$, $F_2(h - c, k)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(h, k + b)$, $B_2(h, k - b)$.

– Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$.

Hipérbola vertical con centro en (h, k)

– Su eje focal es paralelo al eje Y.

– Su ecuación ordinaria es: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

– Vértices: $V_1(h, k + a)$, $V_2(h, k - a)$.

– Focos: $F_1(h, k + c)$, $F_2(h, k - c)$.

– Extremos del eje conjugado: $B_1(h + b, k)$, $B_2(h - b, k)$.

– Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$.

Ecuación general:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con A y C de signo diferente.

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una hipérbola?

a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 9$ c) $x^2 = 8y$ d) $4x^2 - 9y^2 = 36$

Solución:

Para que una ecuación represente una hipérbola, los coeficientes de los términos cuadráticos deben tener signos diferentes:

$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, los coeficientes de los términos cuadráticos son diferentes pero del mismo signo, representa una elipse.

$x^2 + y^2 = 9$, los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales y del mismo signo, representa una circunferencia.

$x^2 = 8y$, sólo una variable se encuentra al cuadrado, representa una parábola.

$4x^2 - 9y^2 = 36$, los coeficientes de los términos cuadráticos son de diferente signo, representa una hipérbola.

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Las coordenadas de los vértices de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ son:

a) $V_1(0, 4), V_2(0, -4)$ c) $V_1(0, 3), V_2(0, -3)$

b) $V_1(3, 0), V_2(-3, 0)$ d) $V_1(4, 0), V_2(-4, 0)$

Solución:

La ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, por tanto es horizontal con centro en el origen, entonces:

$$a^2 = 9,\ a = 3 \quad ; \quad b^2 = 16,\ b = 4$$

Los vértices tienen coordenadas $V_1(a, 0), V_2(-a, 0) = V_1(3, 0), V_2(-3, 0)$, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Las coordenadas de los focos de la hipérbola $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$, son:

a) $F_1(1, 2), F_2(1, -6)$ c) $F_1(1, 3), F_2(1, -7)$

b) $F_1(6, -2), F_2(-4, -2)$ d) $F_1(4, -2), F_2(-2, -2)$

Solución:

La ecuación tiene la forma $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, por tanto es vertical con centro en (h, k), entonces:

$$C(h, k) = C(1, -2) \quad ; \quad a^2 = 16,\ a = 4 \quad y \quad b^2 = 9,\ b = 3$$

Se aplica la condición $c^2 = a^2 + b^2$, para encontrar el valor de "c".

$$c^2 = 16 + 9 \quad \rightarrow \quad c^2 = 25 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{25} = 5$$

Las coordenadas de los focos son: $F_1(h, k + c), F_2(h, k - c)$

$$F_1(1, -2 + 5) = F_1(1, 3) \quad ; \quad F_2(1, -2 - 5) = F_2(1, -7)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

Al transformar la ecuación $x^2 - 4y^2 = 16$ a su forma canónica, se obtiene:

a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ c) $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{16} = 1$ d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solución:

Se divide la ecuación por 16.

$$x^2 - 4y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

Las coordenadas del centro y el valor del semieje transverso de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ son:

a) $C(-1, -3)$, $a = 3$ c) $C(-3, -1)$, $a = 2$

b) $C(-3, -1)$, $a = 3$ d) $C(-1, -3)$, $a = 2$

Solución:

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$9x^2 - 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 9x^2 + 18x - 4y^2 - 24y = -9$$

Factorizando $\quad 9(x^2 + 2x) - 4(y^2 + 6y) = -9$

Completando el T.C.P $\quad 9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 + 6y + 9) = -9 + 9 - 36$

$$9(x + 1)^2 - 4(y + 3)^2 = -36$$

Se divide la expresión por -36 $\quad \frac{9(x+1)^2}{-36} - \frac{4(y+3)^2}{-36} = \frac{-36}{-36}$

$$-\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

El centro $C(h, k) = C(-1, -3)$, $a^2 = 9$, $a = 3$, por tanto, el semieje transverso es $a = 3$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

La ecuación de la hipérbola con semieje transverso = 2, semieje conjugado = 5 y las coordenadas de sus vértices los puntos (4, 1) y (– 2, 1), es:

a) $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ c) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

Solución:

Semieje transverso es $a = 2$ y Semieje conjugado es $b = 5$

El centro es el punto medio entre los vértices: $C\left(\frac{4-2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1, 1)$

La hipérbola es horizontal por que el eje transverso es paralelo al eje X, entonces:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{(2)^2} - \frac{(y-1)^2}{(5)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ecuación general de segundo grado

Identificación de curvas

La naturaleza de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se identifica con la expresión $I = B^2 - 4AC$, que recibe el nombre de indicador o invariante.

Si $B = 0$, entonces se genera la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la cual representa:

- Circunferencia, si $A = C$.
- Parábola, si A ó $C = 0$.
- Elipse, si $A \neq C$ pero del mismo signo.
- Hipérbola, si A y C tienen signos contrarios.

Ejemplos:

$2x^2 + 2y^2 = 7$	Circunferencia	$3x^2 + 4y^2 = 12$	Elipse
$x^2 = 8y$	Parábola	$y^2 - x^2 = 1$	Hipérbola

Si $B \neq 0$, entonces, la cónica representa:

- Parábola si $I = 0$
- Elipse si $I < 0$
- Hipérbola si $I > 0$

Ejemplo 1

La curva $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 40x + 20y = 0$, representa una:

a) Circunferencia b) Recta c) Hipérbola d) Parábola

Solución:

Se toman los valores:

$$A = 2, B = -4 \text{ y } C = 2$$

Se evalúan en la fórmula del indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

$$I = 0$$

La curva representa una parábola y la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La naturaleza de la curva $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y - 2 = 0$ es:

a) Parábola b) Elipse c) Hipérbola d) Paraboloide

Solución:

De la ecuación:

$$A = 3, B = 2 \text{ y } C = 3$$

Los valores se sustituyen en el indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(3)(3) = 4 - 36 = -32$$

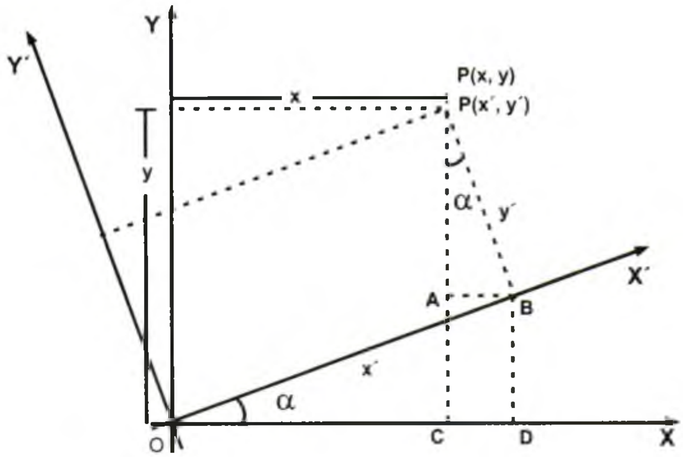
$$I < 0$$

La curva representa una elipse y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Rotación de ejes
Dada la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

transformarla en otra que no contenga el término xy, mediante una rotación de ejes.



Formulas de rotación:

$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$

$y' = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$

Hallar el ángulo de rotación para eliminar el término "xy" dada la ecuación.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sean las ecuaciones de rotación

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$$

al sustituirlas en la ecuación general, se obtiene:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

Esta fórmula da el ángulo de rotación y se utiliza cuando $A \neq C$, en caso de que $A = C$, el ángulo a rotar es de 45°.

Aplicando las identidades en el siguiente orden, se obtiene el valor de sen α y cos α, entonces:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1}} \quad ; \quad \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad ; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

Las ecuaciones para determinar las nuevas coordenadas P(x', y') del punto P(x, y) son:

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \qquad y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

Ejemplo 1

Un sistema de coordenadas se rota 45°. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A(– 1, 2) referido al un nuevo sistema coordenado X'Y'?

a) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Solución:

Las ecuaciones de rotación son:

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \qquad y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

El ángulo a rotar es de 45°, por tanto:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Al sustituir en las fórmulas

$$x' = x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha \quad ; \quad y' = -x \text{ sen } \alpha + y \cos \alpha$$

Se determina el punto en el nuevo sistema coordenado X´Y´.

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2) \quad ; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2)$$

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del punto A(– 1, 2) en el nuevo sistema de coordenadas son $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Reducción de ecuaciones

Ejemplo 2

¿Cuál es la ecuación que se obtiene al eliminar el término xy de la curva $x^2 - xy + y^2 = 3$?

a) $3x'^2 + y'^2 - 6 = 0$ b) $x'^2 + 3y'^2 - 6 = 0$ c) $x'^2 + 3y'^2 - 3 = 0$ d) $3x'^2 + y'^2 - 1 = 0$

Solución:

En la ecuación A = C por tanto el ángulo a rotar es de 45°.

Al sustituir $\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en las fórmulas de rotación se obtiene:

$$x = x'\cos\alpha - y'\text{sen}\alpha \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

$$y = x'\text{sen}\alpha + y'\cos\alpha \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

Al sustituir en la ecuación:

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 = 3$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - x'y' + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + x'y' + \frac{1}{2}y'^2 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 - 3 = 0$$

$$x'^2 + 3y'^2 - 6 = 0$$

El resultado correcto corresponde al inciso "b".

Trayectorias curvilíneas

Ecuaciones parámetricas

Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de una curva plana y las variables "x" y "y" están en función de una tercera variable "t" llamada parámetro, de manera que

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

Estas relaciones son conocidas como ecuaciones paramétricas.

El objeto de resolver el sistema es dar una sola ecuación con las variables "x" y "y" eliminando el parámetro.

Eliminación del parámetro

Dada una curva en su forma paramétrica, su forma rectangular se obtiene eliminando el parámetro. No hay un método general para efectuar la eliminación, depende en cada caso de la forma de las ecuaciones paramétricas.

Si éstas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular se obtiene eliminando el parámetro por medio de las identidades trigonométricas fundamentales.

Si las ecuaciones paramétricas son algebraicas su forma sugerirá alguna operación para poder eliminar el parámetro.

Ejemplo 1

Dadas las ecuaciones $x = 5t$, $y = 3t - 4$, la ecuación que se obtiene al eliminar el parámetro es:

a) $3x + 5y + 20 = 0$ b) $3x - 5y + 20 = 0$ c) $3x + 5y - 20 = 0$ d) $3x - 5y - 20 = 0$

Solución:

Se despeja el parámetro "t" de $x = 5t$, de donde se obtiene $t = \frac{x}{5}$

Se sustituye $t = \frac{x}{5}$ en $y = 3t - 4$

$$y = 3\left(\frac{x}{5}\right) - 4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x}{5} - 4 \quad \rightarrow \quad 5y = 3x - 20 \quad \rightarrow \quad 3x - 5y - 20 = 0$$

El resultado correcto corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Las ecuaciones paramétricas $x = 3\cos t$, $y = 4 \text{ sen } t$ corresponden a una:

a) Elipse b) Parábola c) Hipérbola d) Circunferencia

Solución:

Se despeja cos t y sen t en cada una de las ecuaciones

$$x = 3\cos t \quad \rightarrow \quad \cos t = \frac{x}{3}$$

$$y = 4 \text{ sen } t \quad \rightarrow \quad \text{sen } t = \frac{y}{4}$$

Se sustituyen los despejes en $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Es una elipse por lo tanto la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Coordenadas polares

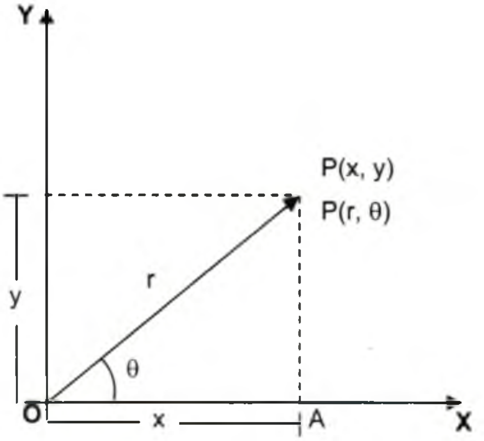
Las coordenadas polares son aquéllas que representan a los puntos del plano en función de su distancia al origen y su ángulo de inclinación medido con respecto a la horizontal.

$$P(r, \theta)$$

Donde r : distancia del punto al origen.

θ : ángulo de inclinación.

Las coordenadas rectangulares (x,y) y las polares (r,θ) de un punto P se relacionan como sigue:



Por Teorema de Pitágoras

$$r^2 = x^2 + y^2$$

En el triángulo OAP

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad ; \quad x = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad ; \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Conversión de coordenadas

Ejemplo 1

Al transformar el punto $A\left(1,\sqrt{3}\right)$ a coordenadas polares se obtiene:

a) $\left(\sqrt{2},30^\circ\right)$ b) $(2,30^\circ)$ c) $\left(\sqrt{2},60^\circ\right)$ d) $(2,60^\circ)$

Solución:

Las coordenadas rectangulares del punto A son:

$$x = 1 \text{ y } y = \sqrt{3}$$

Al sustituir en las fórmulas se obtiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{1}\right] = \tan^{2-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ$$

Las coordenadas del punto A en coordenadas polares son:

$$(2, 60^\circ)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo2

Las coordenadas rectangulares del punto P(6, 150°) son:

a) $(3\sqrt{3},3)$ b) $(3\sqrt{3},-3)$ c) $(-3\sqrt{3},-3)$ d) $(-3\sqrt{3},3)$

Solución:

Las coordenadas polares del punto P son:

$$r = 6 \quad y \quad \theta = 150°$$

Sustituyendo los valores de "r" y "θ" en las fórmulas:

$x = r\cos\theta$ $y = r \operatorname{sen}\theta$

$x = 6\cos 150°$ $y = 6 \operatorname{sen} 150°$

$x = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $y = 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$x = -3\sqrt{3}$ $y = 3$

Las coordenadas del punto P en el sistema de coordenadas rectangulares son: $(-3\sqrt{3},3)$, por tanto la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La ecuación $4x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ en su forma polar es:

a) $4r^2 - 2r\cos\theta - 16r\operatorname{sen}\theta + 13 = 0$ b) $2r^2 - 4r\cos\theta - 10r\operatorname{sen}\theta + 12 = 0$

c) $4r^2 + 2r\cos\theta + 16r\operatorname{sen}\theta - 13 = 0$ d) $2r^2 - 4r\cos\theta - 10r\operatorname{sen}\theta + 12 = 0$

Solución:

Sustituyendo las fórmulas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, en la ecuación rectangular se obtiene:

$$4(r\cos\theta)^2 + 4(r\operatorname{sen}\theta)^2 - 2(r\cos\theta) - 16(r\operatorname{sen}\theta) + 13 = 0$$

$$4r^2\cos^2\theta + 4r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2r\cos\theta - 16r\operatorname{sen}\theta + 13 = 0$$

$$4r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2r\cos\theta - 16r\operatorname{sen}\theta + 13 = 0$$

Pero $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, por tanto la ecuación resultante es:

$$4r^2 - 2r\cos\theta - 16r\operatorname{sen}\theta + 13 = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

Convertir la ecuación $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ a coordenadas rectangulares.

a) $x^2 - 4y - 4 = 0$ b) $x^2 + 4y + 4 = 0$ c) $y^2 - 4x + 4 = 0$ d) $y^2 - 4x - 4 = 0$

Solución:

Eliminando denominadores de la ecuación:

$$r(1-\cos\theta) = 2 \quad \rightarrow \quad r - r\cos\theta = 2$$

Sustituyendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $x = r\cos\theta$, se obtiene:

$$r - r\cos\theta = 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} - x = 2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = (2+x)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y^2 - 4x - 4 = 0$$

La ecuación en su forma rectangular es $y^2 - 4x - 4 = 0$, por tanto la respuesta correcta es el inciso "d".

Ejercicios

1. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A (3, 4) y B (1, 8)?

a) 10 b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{10}$ d) 20

2. El valor positivo que debe tomar *x* para que la distancia entre los puntos A(– 1, 2) y B (x, 10) sea igual a 10 es:

a) 2 b) 10 c) 5 d) 2

3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos P_1(8 , 4) y P_2(6, – 2)?

a) (1, 3) b) (7, 1) c) (14, 2) d) (2, 2)

4. Las coordenadas del punto medio son (3, – 4), si uno de los extremos es (5, 10). El valor de x del otro extremo es:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 3

5. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (3, 4) y B (5, 8)?

a) $\frac{1}{2}$ b) -2 c) $-\frac{1}{2}$ d) 2

6. La pendiente de una recta es 5, si pasa por el punto A(3, 4) y el punto B cuya abscisa es 2, el valor de la ordenada de B es:

a) 3 b) 4 c) – 1 d) 1

7. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A(– 3, 5) y B (7, 6)?

a) $\sqrt{101}$ b) 101 c) 17 d) $\sqrt{17}$

8. El valor negativo que debe tomar “y”, para que la distancia entre los puntos A(6, 10) y B (1, y) sea igual a 13 es:

a) – 4 b) – 3 c) – 2 d) – 4

9. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos P_1(5 , 2) y P_2(7, – 3)?

a) $\left(-\frac{1}{2},6\right)$ b) $\left(6,\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2},6\right)$ d) $\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

10. Las coordenadas del punto medio entre dos puntos son (2, 1), si uno de los extremos es (7, – 3). El valor de “y”, del otro extremo es:

a) 2 b) – 2 c) 5 d) 12

11. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(– 1, 7) y B (5 , 1)?

a) 1 b) – 1 c) 2 d) – 2

12. La pendiente de una recta es $\frac{7}{10}$, si pasa por el punto P(6, 9) y el punto Q cuya abscisa es -4, el valor de la ordenada de Q es:

a) 9 b) 6 c) -4 d) 2

13. El valor negativo que debe tomar "x" para que la distancia entre los puntos P(1, 1) y Q (x, -4) sea igual a $\sqrt{41}$ es:

a) -4 b) -3 c) -5 d) -1

14. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos A (10 , -2) y B(1, -7)?

a) $\left(\frac{9}{2},-\frac{11}{2}\right)$ b) $\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$ c) $\left(-\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right)$ d) $\left(\frac{11}{2},-\frac{9}{2}\right)$

15. Las coordenadas del punto medio son (6, 3),si uno de los extremos es (4, 5). Las coordenadas del otro extremo son:

a) (-8, 1) b) (8, -1) c) (-8, -1) d) (8, 1)

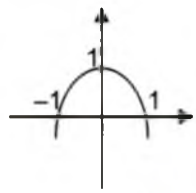
16. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (3, -4) y B (5, 1)?

a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{2}$

17. La pendiente de una recta es $-\frac{2}{3}$, si pasa por el punto M(2,-1) y el punto P cuya abscisa es -10, el valor de la ordenada de P es:

a) 7 b) -7 c) 2 d) -1

18. La ecuación cartesiana que describe la curva es:

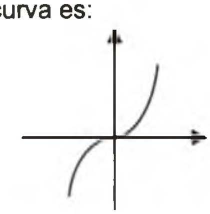


a) $y = 1 - x^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = x^2$ d) $y = 4 - x^2$

19. La ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que distan 5 unidades del origen.

a) $x^2 - 5y = 0$ b) $x + 5y = 0$ c) $x^2 + y^2 = 25$ d) $x^2 - y^2 = 5$

20. La ecuación cartesiana que describe la curva es:



a) $y = 2x + 3$ b) $y = x^3$ c) $y = x^2 + 1$ d) $y = 3$

21. La ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que equidistan de los puntos A(1, 2) y B(3, – 1) es:

a) $2x + 3y + 5 = 0$ b) $2x + y - 3 = 0$ c) $x + y - 3 = 0$ d) $4x - 6y - 5 = 0$

22. La ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 6) y su pendiente es $\frac{1}{2}$ es:

a) $x - 2y + 11 = 0$ b) $x - 2y - 11 = 0$ c) $x + 2y + 11 = 0$ d) $x + 2y - 11 = 0$

23. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(4, 5) y B(3 , – 2)?

, a) $10x + 7y - 5 = 0$ b) $7x - y - 23 = 0$ c) $10x + 7y + 5 = 0$ d) $7x + y - 33 = 0$

24. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en 3 y pendiente 5?

a) $3x - y - 5 = 0$ b) $3x + y + 5 = 0$ c) $5x - y - 3 = 0$ d) $5x - y + 3 = 0$

25. El valor de la pendiente de la recta $3x + 5y - 10 = 0$ es:

a) 3 b) 5 c) $-\frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

26. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje X en 6 y al eje Y en 7?

a) $7x + 6y - 42 = 0$ b) $7x + 6y + 42 = 0$ c) $6x - 7y + 42 = 0$ d) $6x + 7y - 42 = 0$

27. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(2, – 5) y B (3, – 4)?

a) 1 b) – 1 c) 3 d) – 3

28. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la recta $8x - 2y - 7 = 0$?

a) $y = -\frac{1}{4}x + 3$ b) $y = 4x + 3$ c) $y = -4x + 3$ d) $y = \frac{1}{4}x + 3$

29. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos (5 , – 2) y (– 7, 8)?

a) $y = -\frac{5}{6}x - 2$ b) $y = \frac{5}{6}x - 2$ c) $y = \frac{6}{5}x - 2$ d) $y = -\frac{6}{5}x - 2$

30. La ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 7) y que es paralela a la recta $3x - 5y + 15 = 0$ es:

a) $3x - 5y + 29 = 0$ b) $3x + 5y - 31 = 0$ c) $5x - 3y + 31 = 0$ d) $5x + 3y - 29 = 0$

31. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(–3, 11) y B (–1, 7)?

a) – 2 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

32. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $3x - 7y - 14 = 0$?

a) $y = -\frac{7}{3}x + 5$ b) $y = \frac{7}{3}x + 5$ c) $y = \frac{3}{7}x + 5$ d) $y = -\frac{3}{7}x + 5$

33. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la que pasa por los puntos (8, – 3) y (2, 1)?

a) $y = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $y = \frac{3}{2}x - 6$ c) $y = -\frac{2}{3}x - 6$ d) $y = \frac{2}{3}x - 6$

34. La ecuación de la recta que pasa por el punto (3, – 2) y que es perpendicular a la recta $2x - 9y - 18 = 0$ es:

a) $9x - 2y - 23 = 0$ b) $2x - 9y - 20 = 0$ c) $9x + 2y - 23 = 0$ d) $2x - 9y + 20 = 0$

35. La ecuación de la recta que pasa por el punto (– 6, – 1) y su pendiente es $-\frac{3}{4}$ es:

a) $3x + 4y + 22 = 0$ b) $3x - 4y - 22 = 0$ c) $4x - 3y + 22 = 0$ d) $4x + 3y - 22 = 0$

36. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(–4, 7) y Q(– 10 , – 2)?

a) $y = \frac{2}{3}x + 13$ b) $y = -\frac{2}{3}x - 13$ c) $y = \frac{3}{2}x + 13$ d) $y = -\frac{3}{2}x - 13$

37. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en 8 y pendiente – 3?

a) $y = 3x - 8$ b) $y = -8x + 3$ c) $y = -3x + 8$ d) $y = 8x + 3$

38. Las intersecciones con los ejes de la recta $3x + 5y - 9 = 0$ son:

a) $x = -3, y = \frac{9}{5}$ b) $x = 3, y = \frac{9}{5}$ c) $x = -\frac{9}{5}, y = 3$ d) $x = \frac{9}{5}, y = -3$

39. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje X en 9 y al eje Y en – 5?

a) $5x - 9y - 45 = 0$ b) $9x + 5y - 45 = 0$ c) $9x - 5y - 45 = 0$ d) $5x + 9y - 45 = 0$

40. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, – 4) y B (8, – 6)?

a) $y = \frac{2}{7}x + 3$ b) $y = -\frac{2}{7}x + 3$ c) $y = \frac{7}{2}x - 3$ d) $y = -\frac{7}{2}x - 3$

41. ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen de la recta $7x - 5y - 15 = 0$?

a) $m = \frac{7}{5}, b = 3$ b) $m = \frac{7}{5}, b = -3$ c) $m = -\frac{7}{5}, b = 3$ d) $m = -\frac{7}{5}, b = -3$

42. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos (8, – 3) y (9, 4)?

a) $y = \frac{1}{7}x - 3$ b) $y = -7x - 8$ c) $y = 7x - 9$ d) $y = -\frac{1}{7}x + 5$

43. La ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 8) y que es paralela a la recta $3x - 2y + 8 = 0$ es:

a) $y = \frac{3}{2}x + 4$ b) $y = -\frac{3}{2}x + 2$ c) $y = \frac{3}{2}x + 5$ d) $y = -\frac{3}{2}x - 1$

44. ¿Cuál es la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(–6, 1) y B (4, 10)?

a) $\frac{9}{10}$ b) $-\frac{10}{9}$ c) $\frac{10}{9}$ d) $-\frac{9}{10}$

45. La forma simétrica de la recta $7x + 3y - 21 = 0$ es:

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$ b) $\frac{x}{3}-\frac{y}{7}=1$ c) $\frac{x}{7}+\frac{y}{3}=1$ d) $\frac{x}{7}-\frac{y}{3}=1$

46. ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la que pasa por los puntos (2, 4) y (5, – 1)?

a) $y=\frac{3}{5}x$ b) $y=-\frac{5}{3}x$ c) $y=\frac{5}{3}x$ d) $y=-\frac{3}{5}x$

47. La ecuación de la recta que pasa por el punto (5, – 8) y que es paralela a la recta $8x - 9y - 3 = 0$ es:

a) $8x - 9y - 112 = 0$ b) $9x - 8y - 32 = 0$ c) $8x - 9y - 32 = 0$ d) $9x - 8y - 112 = 0$

48. La ecuación de la recta que pasa por el punto (7, 6) y su pendiente es $-\frac{1}{4}$ es:

a) $x + 4y - 31 = 0$ b) $x - 4y - 31 = 0$ c) $x - 4y - 34 = 0$ d) $x - 4y + 34 = 0$

49. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(–3, – 7) y Q(– 8,– 4)?

a) $3x - 5y - 44 = 0$ b) $3x + 5y - 44 = 0$ c) $3x + 5y + 44 = 0$ d) $3x - 5y + 44 = 0$

50. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje Y en – 5 y pendiente – 2?

a) $5x + y - 2 = 0$ b) $5x - y + 2 = 0$ c) $2x - y - 5 = 0$ d) $2x + y + 5 = 0$

51. El valor de la pendiente de la recta $4x - 7y - 21 = 0$ es:

a) $\frac{7}{4}$ b) $-\frac{4}{7}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{7}{4}$

52. ¿Cuál es la ecuación de la recta que interseca al eje X en 6 y al eje Y en – 4?

a) $4x - 6y - 12 = 0$ b) $2x - 3y - 12 = 0$ c) $2x + 3y + 12 = 0$ d) $4x + 6y - 12 = 0$

53. ¿Cuál de las siguientes rectas pasa por el origen?

a) $x + 5y - 2 = 0$ b) $x - 5y = 0$ c) $x - 5y - 5 = 0$ d) $x + y = 4$

54. ¿Cuál es la forma simétrica de la recta $4x - 3y - 12 = 0$?

a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$ b) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ c) $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ d) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

55. ¿Cuál de las siguientes rectas es paralela a la que pasa por los puntos (12, – 4) y (5, – 7)?

a) $y=\frac{3}{7}x-8$ b) $y=\frac{7}{3}x+5$ c) $y=-\frac{3}{7}x-6$ d) $y=-\frac{7}{3}x+4$

56. Las intersecciones con los ejes de la recta $7x - 5y + 1 = 0$ son:

a) $x=-\frac{1}{7}, y=\frac{1}{5}$ b) $x=\frac{1}{7}, y=-\frac{1}{5}$ c) $x = 7, y = 5$ d) $x = -7, y = 5$

57. Las características comunes que tienen las rectas: $3x + 2y = 3$, $x - 5y = 1$.

a) son paralelas b) son perpendiculares c) se cortan en (0, 1) d) se cortan en (1, 0)

58. Las rectas $2x + y - 1 = 0$ y $x - 2y + 3 = 0$ son:

a) paralelas b) perpendiculares c) coincidentes d) ninguna de las anteriores

59. Determinar si los puntos A(2, 1) y B(3, – 4) pertenecen a la recta $2x - 3y - 18 = 0$.

a) ambos pertenecen b) solo pertenece A c) solo pertenece B d) ninguno pertenece

60. La pendiente de la recta $x = 2$ es:

a) $m = 2$ b) $m = 0$ c) m = indeterminada d) $m = -1$

61. La pendiente de la recta $y = 1$ es:

a) $m = 1$ b) m = indeterminada c) $m = 0$ d) $m = 2$

62. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (2, –6) y radio igual a 8?

a) $x^2 + y^2 - 4x + 12y - 24 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 54 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 54 = 0$

63. ¿Cuál es el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 40 = 0$?

a) (– 3, – 6) b) (3, 6) c) (– 3, 6) d) (3, – 6)

64. Las coordenadas del centro de la circunferencia $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$ son:

a) (3, – 2) b) (–3, – 2) c) (3, 2) d) (–3, 2)

65. La ecuación $x^2 + y^2 = 25$, representa:

a) Circunferencia con centro en el origen y radio 25 unidades.
b) Circunferencia con centro en el origen y radio 5 unidades.
c) Parábola con vértice en el origen y foco (5, 0)
d) Parábola con vértice en el origen y foco (0, 5)

66. La ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 7 está representada por:

a) $x^2 + y^2 = 7$ b) $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$ c) $x^2 + y^2 = 49$ d) $x^2 + y^2 = \frac{7}{2}$

67. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (– 4, – 2) y radio igual a 7?

a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 29 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 29 = 0$

68. ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 22 = 0$?

a) Centro (– 5, – 1), radio 4
b) Centro (5, 1), radio 4
c) Centro (5, 1), radio 2
c) Centro (– 5, – 1), radio 2

69. Las coordenadas del centro de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 81$ son:

a) (1, – 2) b) (– 1, – 2) c) (1, 2) d) (– 1, 2)

70. La ecuación $x^2 + y^2 = 9$, representa:

a) Parábola con vértice en el origen y foco (– 3, 0)
b) Parábola con foco en el origen y vértice (0, –3)
c) Circunferencia con centro en el origen y radio 3 unidades.
d) Circunferencia con centro en el origen y radio 9 unidades.

71. La ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 10 está representada por:

a) $x^2 + y^2 = 5$ b) $x^2 + y^2 = 100$ c) $x^2 + y^2 = 10$ d) $x^2 + y^2 = \sqrt{10}$

72. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (3, – 8) y radio igual a 10?

a) $x^2 + y^2 + 6x + 16y + 27 = 0$ b) $x^2 - y^2 - 6x + 16y - 27 = 0$
c) $x^2 - y^2 + 6x + 16y + 27 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 27 = 0$

73. ¿Cuál es el centro de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$?

a) (– 3, – 4) b) (3, 4) c) (3, – 4) d) (– 3, 4)

74. Un punto del plano por el que pasa la circunferencia cuya ecuación es: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

a) (– 4, 2) b) (0, 1) c) (1, 0) d) (3, 4)

75. ¿En qué cuadrante se encuentra la circunferencia $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$?

a) El primer cuadrante b) El segundo cuadrante c) El tercer cuadrante d) El cuarto cuadrante

76. La circunferencia que tiene centro en (2, 3) y es tangente al eje X es:

a) $(x -2)^2 + (y - 3)^2 = 3$ b) $(x -2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ c) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ d) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 3$

77. El radio de la circunferencia con centro en (1, – 2) y que pasa por (3, 1) es:

a) $r = \sqrt{5}$ b) r = 5 c) 13 d) $r = \sqrt{13}$

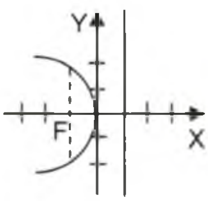
78. La ecuación de la circunferencia con centro en el punto (– 3, 3) y es tangente a los ejes coordenados es:

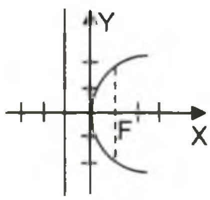
a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ c) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ d) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

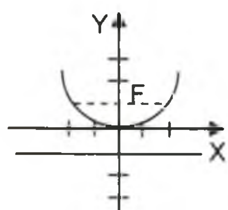
79. ¿Cuál es la ecuación de la parábola cuyo vértice se encuentra en el origen y su foco es el punto (0, –3)?

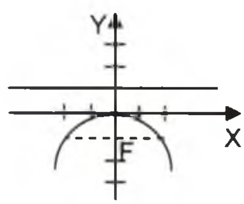
a) $y^2 = -12x$ b) $y^2 = 12x$ c) $x^2 = 12y$ d) $x^2 = -12y$

80. ¿Cuál es la gráfica de la parábola $y^2 + 4x = 0$?

a) 

b) 

c) 

d) 

81. La ecuación de una parábola es $y^2 = 3x$, ¿Cuáles son las coordenadas de su foco?

a) $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ b) $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ c) $\left(\frac{3}{4},0\right)$ d) $\left(-\frac{3}{4},0\right)$

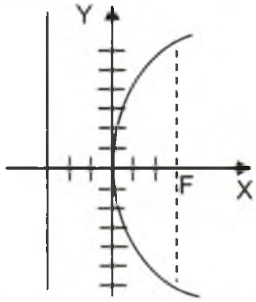
82. Una parábola tiene su vértice en el origen y la ecuación de su directriz es y + 4 = 0, ¿Cuál es su ecuación?

a) $y^2 + 16x = 0$ b) $x^2 + 16y = 0$ c) $x^2 = 16y$ d) $y^2 = 16x$

83. Una parábola tiene su vértice en el origen y su eje coincide con el eje "y", ¿cuál es su ecuación si la parábola pasa por el punto (4, –8)?

a) $y^2 + 2x = 0$ b) $x^2 + 2y = 0$ c) $x^2 - 2y = 0$ d) $y^2 - 2x = 0$

84. La ecuación de la parábola cuya gráfica es:



a) $y^2 = 12x$ b) $y^2 = -12x$ c) $x^2 = 12y$ d) $x^2 = -12y$

85. Las coordenadas del vértice de la parábola $(y - 1)^2 = 6x + 18$, es:

a) (1, –3)   b) (–3, 1)   c) (3, –1)   d) (–1, 3)

86. Las coordenadas del foco de la parábola $(x - 2)^2 = 8y$

a) (2, –2)   b) (– 2, 2)   c) (–2, –2)   d) (2, 2)

87. La ecuación de la parábola con vértice en el punto (1, 2) y foco en el punto (1, 6) es:

a)$(x - 1)^2 = 16(y - 2)$ b) $(x + 1)^2 = 16(y + 2)$ c) $(x - 1)^2 = 16(y + 2)$ d) $(x + 1)^2 = 16(y - 2)$

88. La ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = 8x + 8$

a) $x - 3 = 0$ b) $y - 3 = 0$ c) $x + 3 = 0$ d) $y + 3 = 0$

89. La longitud del lado recto de la parábola $x^2 - 12y + 6x - 9 = 0$, es:

a) 3   b) 6   c) 9   d) 12

90. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola $y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$?

a) (0, –1)   b) (0, 1)   c) (1, 0)   d) (–1, 0)

91. Las coordenadas del foco de la parábola $x^2 - 2x - 6y + 4 = 0$ son:

a) (2, 1)   b) (– 1, 2)   c) (1, 2)   d) (2, –1)

92. La ecuación de la parábola con vértice en el punto (–1, 3) y directriz la recta x – 2 = 0, es:

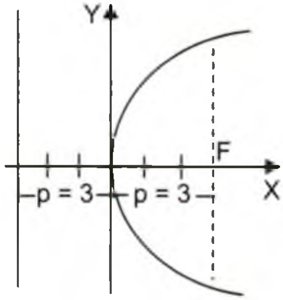
a) $x^2 - 12y - 6x + 21 = 0$ b) $y^2 + 12x - 6y + 21 = 0$

c) $y^2 - 12x + 6y - 21 = 0$ d) $x^2 + 12y - 6x + 21 = 0$

93. Una parábola tiene por ecuación $y^2 - 4x + 8 = 0$, ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?

a) (0,2) b) (0, –2) c) (– 2, 0) d) (2, 0)

94. En la siguiente parábola



¿Cuál es la longitud del lado recto?

a) 6 b) 12 c) 9 d) 3

95. La longitud del eje mayor de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ es:

a) 32 b) 4 c) 16 d) 8

96. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la elipse $x^2+\frac{y^2}{4}=1$?

a) (0, 2) y (0, – 2) b) (2, 0) y (– 2, 0) c) (0, 1) y (0, – 1) d) (1, 0) y (– 1, 0)

97. Una elipse tiene su centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0, 5) y uno de sus focos es el punto (0, 4), ¿cuál es su ecuación?

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

98. ¿Cuáles son las coordenadas de los focos de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$?

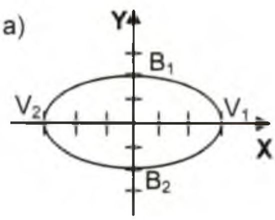
a) $(0, \sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5})$ b) $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$ c) (2, 0) y (– 2, 0) d) (0, 2) y (0, – 2)

99. La excentricidad de la elipse $x^2 + 3y^2 = 1$

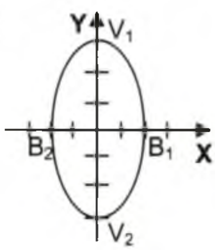
a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

100. ¿Cuál es la gráfica de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$?

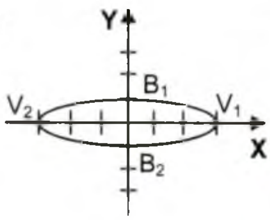
a)



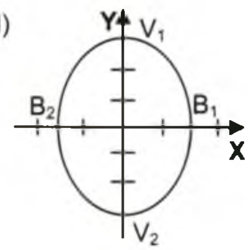
b)



c)



d)



101. La excentricidad de una elipse es $\frac{3}{5}$ y las coordenadas de sus focos son los puntos (0, 3) y (0, –3), ¿Cuál es la longitud de uno de sus lados rectos?

a) $\frac{32}{5}$ b) $\frac{16}{5}$ c) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{5}{32}$

102. Una elipse tiene como ecuación $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$, ¿Cuáles son las coordenadas de su centro?

a) (– 1, – 3) b) (1, – 3) c) (1, 3) d) (– 1, 3)

103. La longitud del lado recto de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ es:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{8}{3}$

104. La ecuación de la elipse con centro en el punto (1, 0), vértice y foco en (4, 0) y (3, 0) respectivamente es:

a) $\frac{(x+1)^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ c) $\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

105. La ecuación de la elipse con vértices los puntos (2, 0) y (– 2, 0) y extremos del eje menor los puntos (0,1) y (0, – 1) es:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ b) $x^2+\frac{y^2}{4}$ c) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ d) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

106. La ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (0, 3) y (0, – 3) y focos los puntos (0, 2) y (0, –2)es:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ b) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

107. La forma ordinaria de la elipse cuya ecuación es $3x^2 + 18y^2 - 36 = 0$, es:

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{18}=1$ b) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{3}=1$ c) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{12}=1$ d) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$

108. La forma general de la elipse $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ es:

a) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ b) $9x^2 + 4y^2 + 2x - 6y - 36 = 0$

c) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$ d) $3x^2 + 2y^2 + 9x - 12y + 9 = 0$

109. La forma ordinaria de la elipse $x^2 + 4y^2 + 6x + 5 = 0$, es:

a) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ b) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ c) $\frac{(x+3)^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ d) $\frac{(x-3)^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

110. Los vértices de la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ son:

a) (0, –2) y (0, 2) b) (–3, 0) y (3, 0) c) (0, –3) y (0, 3) d) (–2, 0) y (2, 0)

111. Una hipérbola tiene su centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0, 4) y uno de sus focos el punto (0, – 5), ¿Cuál es su ecuación?

a) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ c) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

112. Obtener las coordenadas de los focos de la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 2$.

a) $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$ b) (–1, 0) y (1, 0) c) $(0, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$ d) (0, – 1) y (0, 1)

113. ¿Cuál es la longitud del eje transverso de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 20$?

a) 2 b) 4 c) 8 d) 10

114. Una hipérbola tiene su centro en el punto (–3, 2), uno de sus vértices es el punto (1, 2) y la longitud de su eje imaginario es 4, ¿cuál es su ecuación?

a) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$ b) $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ c) $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$ d) $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

115. La ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (3, 0) y (– 3, 0) y focos los puntos $(\sqrt{13}, 0)$ y $(-\sqrt{13}, 0)$ es:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{13}=1$

116. La ecuación ordinaria de la hipérbola $2x^2 - 7y^2 + 14y + 7 = 0$, es:

a) $\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{x^2}{7}=1$ b) $\frac{(y-1)^2}{7}-\frac{x^2}{2}=1$ c) $\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{x^2}{7}=1$ d) $\frac{(y+1)^2}{7}-\frac{x^2}{2}=1$

117. ¿cuál es la coordenada del centro de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 16x + 2y + 11 = 0$?

a) (1, 2) b) (–1, –2) c) (– 2, 1) d) (2, 1)

118. Las coordenadas de los focos de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 54x + 117 = 0$, son:

a) $(-3, -\sqrt{13})$, $(-3, \sqrt{13})$ b) $(3, -\sqrt{13})$, $(3, \sqrt{13})$ c) $(-\sqrt{13}, -3)$, $(\sqrt{13}, 3)$ d) $(-\sqrt{13}, -3)$, $(-\sqrt{13}, 3)$

119. La longitud del lado recto de la hipérbola $25y^2 - 16x^2 = 400$ es:

a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{32}{5}$ d) $\frac{32}{10}$

120. La ecuación de una hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$, las ecuaciones de sus asíntotas son:

a) $3x + 4y - 4 = 0$, $4x - 3y - 4 = 0$

b) $4x - 3y - 4 = 0$, $4x + 3y + 4 = 0$

c) $3x + 4y + 4 = 0$, $3x - 4y - 4 = 0$

d) $3x - 4y + 4 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$

121. Las coordenadas de los focos de la hipérbola $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ son:

a) (3, 0), (–5, 0) b) (–3, 0), (5, 0) c) (0, –3), (0, 5) d) (0, 3), (0, –5)

122. La curva cuya ecuación es $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$, representa una:

a) Elipse b) Parábola c) Hipérbola d) Circunferencia

123. ¿Qué curva representa la ecuación $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$?

a) Hipérbola b) Elipse c) Parábola d) Circunferencia

124. La curva $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 2y - 13 = 0$ representa una:

a) Circunferencia b) Hipérbola c) Elipse d) Parábola

125. Es la ecuación de una elipse

a) $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ b) $xy = 4$ c) $3x^2 - xy + y^2 + x - y = 0$ d) $x^2 + 3xy - y^2 + 2x = 0$

126. La curva $xy = 3$ representa una:

a) Hipérbola b) Parábola c) Elipse d) Circunferencia

127. Es la ecuación de una parábola

a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ b) $x^2 = 4y$ c) $y^2 - x^2 = 1$ d) $3x^2 + 4y^2 = 12$

128. La ecuación $4x^2 + 5y^2 - 2x = 0$, representa una:

a) Parábola b) Hipérbola c) Elipse d) Circunferencia

129. Es la ecuación de una hipérbola:

a) $x^2 - 3y^2 - 27 = 0$ b) $2x^2 + 2y^2 - 8 = 0$ c) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ d) $y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

130. La curva $x^2 + xy - 2y^2 - 3x = 0$

a) Circunferencia b) Hipérbola c) Parábola d) Elipse

131. La curva $x^2 - 3xy + 4y^2 = 1$, representa una:

a) Elipse b) Circunferencia c) Parábola d) Hipérbola

132. La curva $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 9 = 0$ representa una:

a) Elipse b) Hipérbola c) Parábola d) Circunferencia

133. La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, represente una hipérbola es:

a) $B^2 - 4AC = 0$ b) $B^2 - 4AC < 0$ c) $B^2 - 4AC > 0$ d) $B^2 - 4AC \leq 0$

134. La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, represente una elipse es:

a) $B^2 - 4AC < 0$ b) $B^2 - 4AC = 0$ c) $B^2 - 4AC > 0$ d) $B^2 - 4AC \leq 0$

135. La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, represente una parábola es:

a) $B^2 - 4AC \geq 0$ b) $B^2 - 4AC < 0$ c) $B^2 - 4AC > 0$ d) $B^2 - 4AC = 0$

136. Las ecuaciones paramétricas $x = 2\cos\theta$, $y = 2\text{sen}\,\theta$ corresponden a una:

a) Línea recta b) circunferencia c) parábola d) elipse

137. Las ecuaciones paramétricas $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$ corresponde a una:

a) circunferencia b) parábola c) elipse d) hipérbola

138. Al eliminar el parámetro de las ecuaciones $x = t + 2$, $y = \frac{t-1}{2}$, se obtiene:

a) $x + 2y + 3 = 0$ b) $x - 2y - 3 = 0$ c) $2x + y - 1 = 0$ d) $2x - y + 3 = 0$

139. Dadas las ecuaciones paramétricas $x = 3t$, $y = \frac{2-t}{4}$, al eliminar el parámetro se obtiene la ecuación:

a) $x + 12y - 6 = 0$ b) $x - 12y + 6 = 0$ c) $12x + y + 6 = 0$ d) $12x - y - 6 = 0$

140. La ecuación de la recta $x = -3$, en su forma polar es:

a) $r = \frac{-3}{\text{sen}\theta}$ b) $r = \frac{-3}{\cos\theta}$ c) $r = -3\text{sen}\,\theta$ d) $r = -3\cos\theta$

141. La ecuación rectangular de una recta es $3y - 1 = 0$, ¿cuál es su forma polar?

a) $r = 3\text{sen}\theta$ b) $r = \frac{3}{\text{sen}\theta}$ c) $r = \frac{1}{3\text{sen}\theta}$ d) $r = \frac{\text{sen}\theta}{3}$

142. La ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$, en su forma polar es:

a) $r = 3$ b) $r = 9$ c) $r = 6$ d) $r = 18$

143. La ecuación rectangular de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 5x = 0$, en coordenadas polares se representa como:

a) $r = -5\cos\theta$ b) $r = 5\text{sen}\,\theta$ c) $r = 5\cos\theta$ d) $r = -5\text{sen}\,\theta$

144. La ecuación $x^2 - 4y = 0$, en su forma polar es:

a) $r^2\cos^2\theta - 4\text{sen}\,\theta = 0$ b) $r\cos^2\theta - 4\text{sen}\theta = 0$ c) $\cos^2\theta - 4r\text{sen}\,\theta = 0$ d) $r\cos\theta - 4\text{sen}\theta = 0$

145. La ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, en su forma polar es:

a) $2r\cos\theta + 3r\text{sen}\theta = 6$ b) $r^2(9 + 5\cos\theta) - 36 = 0$ c) $2r\cos\theta + 3r\text{sen}\theta = -6$ d) $r^2(9 - 5\cos^2\theta) - 36 = 0$

146. La ecuación $x = 4 - 2y$, en su forma polar es:

a) $r(\text{sen}\theta + 2\cos\theta) - 4 = 0$ b) $r(\cos\theta + 2\text{sen}\theta) - 4 = 0$ c) $2r\text{sen}\theta\cos\theta - 4 = 0$ d) $r(\cos\theta - 2\text{sen}\theta) - 4 = 0$

147. Al transformar la ecuación polar $r = 3\text{sen}\,\theta$ a su forma rectangular, se obtiene:

a) $x^2 + y^2 + 3y = 0$ b) $x^2 - y^2 + 3y = 0$ c) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ d) $y^2 - x^2 - 3x = 0$

148. Al transformar la ecuación polar $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ a su forma rectangular, se obtiene:

a) $x + 1 = 0$ b) $x - 1 = 0$ c) $y + 1 = 0$ d) $y - 1 = 0$

149. Al transformar la ecuación polar $r\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta = 0$ a su forma rectangular, se obtiene:

a) $y^2 - x = 0$ b) $x^2 + y = 0$ c) $y^2 + x = 0$ d) $x^2 - y = 0$

150. La forma rectangular de $r\,\text{sen}^2\theta + 8\cos\theta = 0$ es:

a) $y^2 = 8x$ b) $x^2 = 8y$ c) $y^2 = -8x$ d) $x^2 = -8y$

151. La ecuación polar $r^2\text{sen}^3\theta - \cos\theta = 0$, expresada en su forma rectangular es:

a) $y = \sqrt[3]{x}$ b) $y = x^3$ c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = x^2$

4 Cálculo diferencial

Propósito: al término de la unidad el alumno conocerá los conceptos básicos sobre funciones, resolverá límites, derivadas y sus aplicaciones.

Funciones y límites

Noción de función

► **Función**

Es el conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) en los que el primer elemento es diferente en todos y cada uno de los pares ordenados.

Ejemplos:

1) A = {(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)} representa una función ya que el primer elemento de cada par ordenado es diferente a los otros.

2) B = {(1, 1), (1, – 1), (4, 2), (4, – 2)} no representa una función ya que se repite el primer elemento en ciertos pares ordenados.

► **Regla de correspondencia**

Es la expresión que relaciona la variable dependiente con la variable independiente y se denota por:

$$y = f(x)\text{, se lee (y es igual a f de x)}$$

Donde:

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

f(x): regla de correspondencia.

Ejemplos:

1) $f(x) = 2x + 1$ 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 3) $y = 1 - x^2$ 4) $y = \sqrt{x+1}$

► **Valor de una función**

Se obtiene al sustituir un cierto valor de x en la función f(x)

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - 3$, el valor de f(3) es igual a:

a) 3 b) 0 c) 9 d) 6

Solución:

$$f(3) = (3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

Si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, el valor de f(–2) es:

a) – 3 b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $-\frac{1}{3}$

Solución:

$$f(-2) = \frac{-2+1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

- **Dominio de una función**

Es el conjunto de todos los valores de “x” admisibles para una función.

- **Contra dominio**

Es el conjunto de todos los valores de “y” admisibles para una función.

- **Rango o imagen**

Es el conjunto de todos los valores resultantes de “y” al sustituir cada uno de los elementos del dominio en la función.

Ejemplo:

Si f: D $\rightarrow$ C con D = {1, 3} y C = {2, 4, 6}, si f(x) = x + 1. ¿Qué conjunto representa el rango de la función?

a) R = {2, 4}   b) R = {2}   c) R = {2, 4, 6}   d) R = {4}

Solución:

El dominio de la función es el conjunto D y el contradominio es el conjunto C.

El rango se conforma de los elementos del contradominio que se obtienen al sustituir los elementos del dominio en la función f(x) = x + 1

$$f(1) = 1 + 1 = 2 \quad ; \quad f(3) = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, el rango es el conjunto R = {2, 4}, la respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

a) Función algebraica

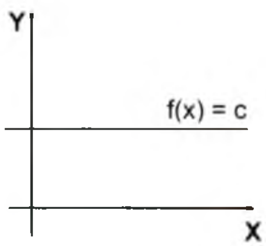
Es aquella función formada por operaciones algebraicas sobre la variable “x”. Estas operaciones son: adición, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación.

Clasificación de las funciones algebraicas

Función constante

Es de la forma f(x) = c, y representa todos los puntos (x, c), su dominio son los reales y su rango es {c}.

Gráfica:



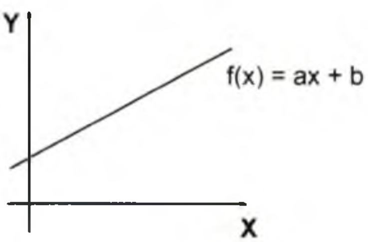
Dominio = $(-\infty, \infty)$

Rango = {c}

Función lineal

Es de la forma f(x) = ax + b, su gráfica es una línea recta inclinada, el exponente de “x” es la unidad.

Gráfica:



Dominio = $(-\infty, \infty)$

Rango = $(-\infty, \infty)$

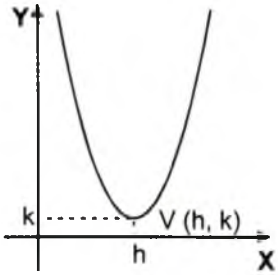
Función cuadrática

Es una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Y su gráfica representa parábolas verticales en el plano, el punto a partir del cual las parábolas abren se denomina vértice y sus coordenadas son V(h, k).

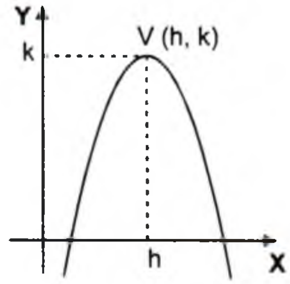
Si $a > 0$



Dominio = R

Rango = $[k, \infty)$

Si $a < 0$



Dominio = R

Rango = $(-\infty, k]$

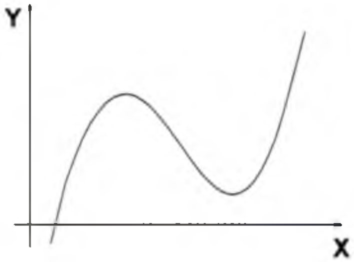
Para obtener los valores de (h, k) se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a}, \qquad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Función cúbica

Es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Gráfica:



Dominio = $(-\infty, \infty) = R$

Rango = $(-\infty, \infty) = R$

Ejemplo 1

Los puntos que pertenecen a la función $f(x) = 3$, son:

a) {(3, 2), (3, 3), (3,4)}

b) {(1, 3), (2, 3), (3, 3)}

c) {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}

d) {(–3, 1), (–2, 3), (–1, 4)}

Solución:

Los puntos que pertenecen a la función $f(x) = 3$, son todos aquellos cuya ordenada es 3 significa que son de la forma (x, 3) para cualquier valor de "x", entonces, el conjunto es:

{(1, 3), (2, 3), (3, 3)}

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Representa una función constante:

a) $f(x) = \pi$ b) $f(x) = x + 2$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución:

Una función constante es aquella regla de correspondencia que a cualquier valor de "x" le asigna el mismo valor de f(x), por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Representa una función lineal.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ d) $f(x) = 3^x$

Solución:

Una función lineal es de la forma $f(x) = ax + b$, donde el exponente de "x" es la unidad y sólo se encuentra como numerador, por tanto la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

El vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 4x + 8$, es:

a) $V(2,-4)$ b) $V(-2,4)$ c) $V(4,-2)$ d) $V(4,\ 2)$

Solución:

El vértice de una parábola se define $V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ y los valores son: $a = 1$, $b = 4$ y $c = 8$

Por tanto:

$$V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{4}{2(1)},\frac{4(1)(8)-(4)^2}{4(1)}\right) = V\left(-\frac{4}{2},\frac{32-16}{4}\right) = V(-2,4)$$

la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

El rango de la función $f(x) = -x^2 + x - 6$ es:

a) $\left[-\frac{23}{4},-\infty\right)$ b) $(-\infty,\infty)$ c) $\left(-\infty,-\frac{23}{4}\right)$ d) $\left(-\infty,-\frac{23}{4}\right]$

Solución:

El coeficiente de x^2 es negativo, la parábola abre hacia abajo y su rango está dado por:

$$(-\infty, k] \quad \text{con } k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Se obtiene el valor de k:

$$k = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-6)-(1)^2}{4(-1)} = \frac{24-1}{-4} = \frac{23}{-4} = -\frac{23}{4}$$

Por tanto, el rango es el intervalo:

$$(-\infty, k] = \left(-\infty,-\frac{23}{4}\right]$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Función racional

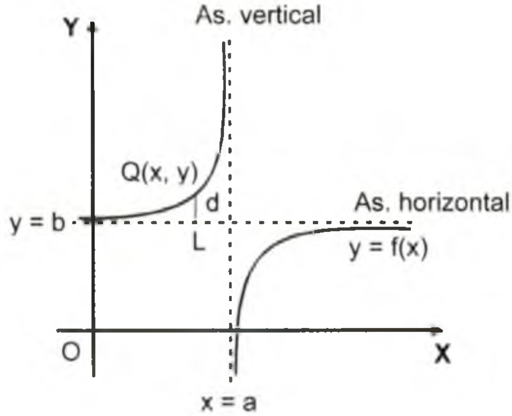
Son de la forma $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$, si $x_1, x_2, \ldots x_n$ son los valores para los cuales $g(x_1) = g(x_2) = \ldots = g(x_n) = 0$, entonces el dominio de f(x) se define como:

$$D_f = \{x \in R \ / \ x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Donde: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les denomina asíntotas verticales.

– Asíntota

Es una recta o curva cuya distancia a la función y = f(x) se aproxima a cero, esto es, la asíntota se acerca a la función pero nunca la toca.



Ejemplo 1

La asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ son:

a) $x = -2$　　b) $x = 1$　　c) $x = -1$　　d) $x = 2$

Solución:

Se iguala el denominador con cero y se despeja a la variable "x" para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales.

$$x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

La función solo tiene una asíntota vertical en x = 1, la respuesta correcta corresponde al inciso "b"

Ejemplo 2

El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$ es:

a) $D_f = \{x \in R \ / \ x \neq -3, -2\}$　　c) $D_f = \{x \in R \ / \ x \neq -3, 2\}$

b) $D_f = \{x \in R \ / \ x \neq -6, -1\}$　　d) $D_f = \{x \in R \ / \ x \neq -1, 6\}$

Solución:

El dominio de la función se obtiene a partir de sus asíntotas verticales, entonces:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0, \ x + 2 = 0$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2$$

Por tanto, el dominio es:

$$D_f = \{x \in R \ / \ x \neq -3, -2\}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Función raíz cuadrada

Es de la forma $f(x) = \sqrt{g(x)}$, y su dominio es $D_f = \{x \in R \,/\, g(x) \geq 0\}$.

Ejemplo 1

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ es:

a) $D_f = \{x \in R \,/\, x < 2\}$ b) $D_f = \{x \in R \,/\, x \geq 2\}$ c) $D_f = \{x \in R \,/\, x > 2\}$ d) $D_f = \{x \in R \,/\, x \leq 2\}$

Solución:

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x - 2 \geq 0$

$$x - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 2$$

Por tanto:

$$D_f = \{x \in R \,/\, x \geq 2\}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 2

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$ es:

a) $[-5, 2]$ b) $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$ c) $(-5, 2)$ d) $(-\infty, -5] \cup [2, \infty)$

Solución:

Se resuelva la desigualdad $x^2 + 3x - 10 \geq 0$, obteniendo las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+5)(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -5\,,\ x = 2$$

La solución es:

$$x \leq -5 \ \text{ ó } \ x \geq 2 \quad \text{es equivalente a} \quad (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 3

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$ es:

a) $D_f = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \geq x \ \text{ ó } \ x \leq \frac{3}{2}\right\}$ c) $D_f = \left\{x \in R \,/\, x \leq \frac{3}{2}\right\}$

b) $D_f = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \leq x\right\}$ d) $D_f = \left\{x \in R \,/\, -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$

Solución:

Se resuelve la desigualdad $9 - 4x^2 \geq 0$, la cual se multiplica por (-1) para convertir en positivo el término cuadrático.

$$4x^2 - 9 \leq 0$$

Se obtienen las raíces de $4x^2 - 9 = 0$,

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Que son $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{3}{2}$, por tanto, el dominio es:

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \text{ó} \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Funciones implícitas y explícitas

– Se llama función explícita a aquélla en la que una variable se escribe en términos de la otra.

Ejemplos:

1) $y = -3x + 5$ 2) $y = \frac{x+1}{x-1}$ 3) $x = y^2 + 3y$

– Una función implícita es aquella relación que se expresa en términos de "x" y "y".

Ejemplos:

1) $x^2 + y^2 = 1$ 2) $xy = 4$ 3) $x^2 + xy - 2y^2 = 0$

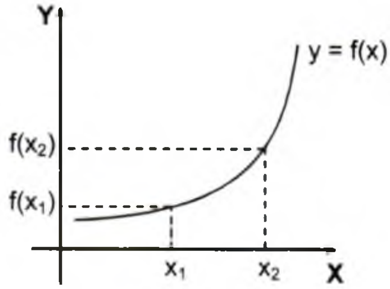
Función creciente

– Una función definida en un intervalo es creciente en ese intervalo, si y sólo si,

para todo $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) > f(x_1)$

esto es, una función es creciente si

al aumentar "x" también "f(x)" aumenta.



Ejemplo

Verifica si la función $f(x) = 2x + 5$ es creciente.

Solución:

Se eligen dos valores para "x", en este caso x = 2 y x = 4, entonces:

Si $x = 2$, $f(2) = 2(2) + 5 = 9$

Si $x = 4$, $f(4) = 2(4) + 5 = 13$

Se observa que al aumentar los valores de "x" también aumentan los valores de "f(x)", por tanto la función $f(x) = 2x + 5$ es creciente.

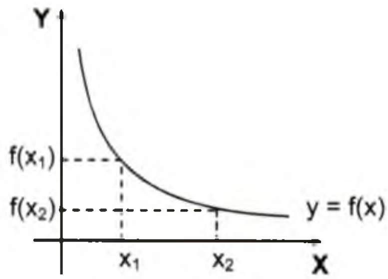
Función decreciente

– Una función definida en un intervalo es decreciente en ese intervalo, si y sólo si,

para todo $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

esto es, una función es decreciente si

al aumentar "x" , "f(x)" disminuye.



Ejemplo:

Verifica si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es decreciente.

Solución:

Se eligen dos valores para "x", en este caso x = 1 y x = 2, entonces:

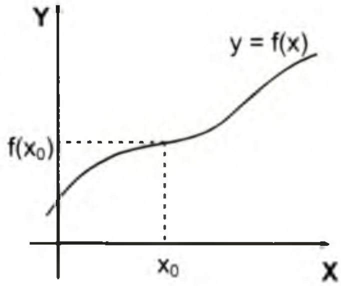
Si $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

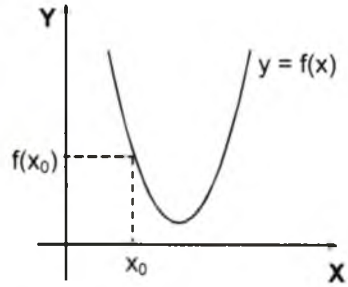
Si $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{2}$

Se observa que mientras los valores de "x" aumentan, los valores de f(x) disminuyen, por tanto, la función es decreciente.

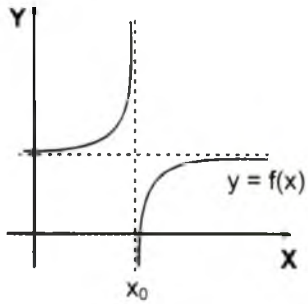
Funciones continuas y discontinuas

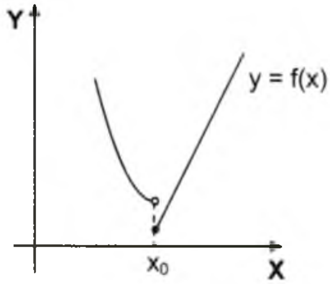
- Una función $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$, si $f(x_0)$ está definida.





- Una función $y = f(x)$ es discontinua en $x = x_0$, si $f(x_0)$ no está definida, esto es, se obtiene una expresión de la forma $\frac{c}{0}$ ó $\frac{0}{0}$.





Ejemplo 1

¿Para qué valor de "x" es discontinua la función $f(x) = \frac{4}{x+3}$?

a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $x = -3$ d) $x = 2$

Solución:

La función es discontinua en un valor de "x" si al sustituirlo en la función se obtienen expresiones como: $\frac{c}{0}$ ó $\frac{0}{0}$.

Si $x = 3$, $f(3) = \frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, en este punto es continua f(x).

Si $x = -2$, $f(-2) = \frac{4}{-2+3} = \frac{4}{1} = 4$, en este punto es continua f(x).

Si $x = -3$, $f(-3) = \frac{4}{-3+3} = \frac{4}{0}$, en este punto es discontinua f(x).

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ es discontinua en:

a) $x = 4$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = 3$

Solución:

Si $x = 4$, $f(4) = \frac{4-2}{4^2-4} = \frac{2}{16-4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, en este punto es continua f(x).

Si $x = 2$, $f(2) = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$, en este punto es discontinua f(x).

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

¿Cuál de las siguientes funciones es continua en x = – 1?

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 4}$ c) $h(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ d) $w(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Solución:

Se sustituye x = – 1 en cada una de las funciones.

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2 - 1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$$, la función es discontinua en x = – 1

$$g(-1) = \frac{1}{(-1)^2 + 5(-1) + 4} = \frac{1}{1-5+4} = \frac{1}{0}$$, la función es discontinua en x = – 1

$$h(-1) = \frac{-1-1}{-1+1} = \frac{-2}{0}$$, la función es discontinua en x = – 1

$$w(-1) = \frac{1}{(-1)^2 - 4} = \frac{1}{1-4} = \frac{1}{-3}$$, la función es continua en x = – 1

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

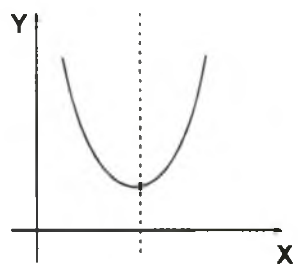
Identificación de una función mediante su gráfica

Para identificar gráficamente una función de una relación, se traza una recta vertical sobre la gráfica.

- Si interseca en un punto a la gráfica, entonces representa una función.

Ejemplo:

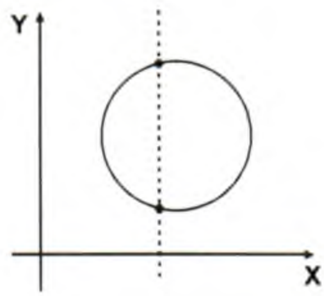
La siguiente gráfica representa una función, ya que al trazar una línea vertical, sólo toca en un punto a la curva.



- Si interseca en más de un punto a la gráfica, entonces representa una relación.

Ejemplo:

La siguiente gráfica no es una función, representa una relación, ya que la línea vertical toca en dos puntos a la curva.



Álgebra de funciones

Sean las funciones f(x) y g(x), entonces:

– Suma de funciones

Se denota $f + g$ y se define por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

– Resta de funciones

Se denota $f - g$ y se define por:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

– Multiplicación de funciones

Se denota $f \cdot g$ y se define por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

– División de funciones

Se denota $\frac{f}{g}$ y se define por:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

– Función composición

Se denota por $f \circ g$ y se define por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = -5x + 7$, entonces $f + g$ es:

a) $x^2 - 7x + 7$ b) $x^2 - 2x + 7$ c) $x^2 + 8x + 7$ d) $x^2 - 8x + 7$

Solución:

$$f + g = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + (-5x + 7) = x^2 + 3x - 5x + 7 = x^2 - 2x + 7$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{x+2}$, entonces $f \cdot g$ es:

a) $x - 2$ b) $x + 2$ c) $x + 4$ d) $x - 4$

Solución:

$$f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{x^2 - 4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, entonces la función composición $f \circ g$ es:

a) $\frac{x-1}{x+1}$ b) $\frac{x-1}{1-x}$ c) $\frac{1+x}{1-x}$ d) $\frac{1+x}{1+x}$

Solución:

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{x(1+x)}{x(1-x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Límites

▶ Concepto intuitivo

Si f(x) se aproxima de forma arbitraria a un número L, tomando a **x** muy cercano a un número **a**, tanto por el lado izquierdo como por el derecho de **a**, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se lee: "el límite cuando x tiende al número **a** de la función f(x) es **L**".

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2 - 4$ y x = 3, si se dan valores a x muy cercanos por la izquierda y por la derecha de x = 3, se obtienen las siguientes tablas:

Por la izquierda

x	f(x)
2.9	4.41
2.99	4.9401
2.999	4.994001
2.9999	4.99940001

Por la derecha

x	f(x)
3.01	5.0601
3.001	5.0006001
3.0001	5.00060001
3.00001	5.000060001

En ambos casos cuando x se aproxima a 3, f(x) se aproxima a 5, por tanto,

$$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 4\right) = 5$$

▶ Teoremas sobre límites y obtención de límites

El procedimiento anterior, para el cálculo del límite resulta poco práctico, los siguientes teoremas sobre límites, simplificarán el proceso, de tal forma, que el límite se obtiene evaluando el valor al que tiende x.

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, entonces:

1) $\lim_{x \to a} c = c$, con c: constante.

2) $\lim_{x \to a} x = a$

3) $\lim_{x \to a} c\,f(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\,L_1$

4) $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$.

5) $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 L_2$.

6) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} \qquad L_2 \neq 0$.

7) $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = [L_1]^n$

en particular $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

Ejemplos:

Obtener los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 3} 6 = 6$

2) $\lim_{x\to 2}(3x) = 3\lim_{x\to 2} x = 3(2) = 6$

3) $\lim_{x\to -3}(2x^2) = 2\lim_{x\to -3} x^2 = 2(-3)^2 = 2(9) = 18$

4) $\lim_{x\to -1}(2x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = 2\lim_{x\to -1} x^3 - 3\lim_{x\to -1} x^2 + 2\lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 4 = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 4$

$= 2(-1) - 3\ (1) - 2 - 4$

$= -2 - 3 - 2 - 4 = -11$

Con los ejemplos anteriores se concluye que sólo se sustituye x por el valor al que tiende.

5) $\lim_{x\to 2}(4x^2 - 3x - 2) = 4(2)^2 - 3(2) - 2 = 4(4) - 3(2) - 2 = 16 - 6 - 2 = 8$

6) $\lim_{x\to -2} \frac{2x-3}{3x+1} = \frac{2(-2)-3}{3(-2)+1} = \frac{-4-3}{-6+1} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$

Ejemplo 7

El valor de $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+1}{4x-1}$ es:

a) $\frac{13}{9}$ b) $\frac{11}{9}$ c) $-\frac{11}{9}$ d) $-\frac{13}{9}$

Solución:

Se sustituye x = – 2 en la función dada:

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+1}{4x-1} = \frac{3(-2)^2+1}{4(-2)-1} = \frac{3(4)+1}{-8-1} = \frac{12+1}{-9} = \frac{13}{-9} = -\frac{13}{9}$$

$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+1}{4x-1} = -\frac{13}{9}$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 8

El valor de $\lim_{x\to 4}(x^2 - 2x)(2x+1)$ está dado por:

a) 0 b) 72 c) 36 d) 16

Solución:

Se sustituye x = 4 en la función dada:

$$\lim_{x\to 4}(x^2 - 2x)(2x+1) = ((4)^2 - 2(4))(2(4)+1) = (16-8)(8+1) = (8)(9) = 72$$

$\lim_{x\to 4}(x^2 - 2x)(2x+1) = 72$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

▸ Formas indeterminadas

Al calcular el límite se puede presentar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, ésta, puede eliminarse por medio de una simplificación factorizando las expresiones dadas.

Ejemplo 1

El valor de $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ es:

a) -4 b) 4 c) 2 d) No existe

Solución:

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\frac{(2)^2-4}{(2)^2-5(2)+6}=\frac{4-4}{4-10+6}=\frac{0}{0}$$

El resultado es $\frac{0}{0}$, entonces se simplifica la fracción, factorizando el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{2+2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 2

El valor de $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3x}{x}$ es:

a) 3 b) -3 c) 4 d) -4

Solución:

Se sustituye x = 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3x}{x}=\frac{3(0)^2-3(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

Factorizando y simplificando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-3)}{x}=\lim_{x\to 0}(3x-3)=3(0)-3=0-3=-3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 3

El valor de $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$ es:

a) -6 b) $\frac{1}{6}$ c) 6 d) $-\frac{1}{6}$

Solución:

Sustituyendo x = 3, se obtiene

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3-3}{(3)^2-9}=\frac{0}{9-9}=\frac{0}{0}$$

Factorizando y simplificando:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Límites cuando $x \to \infty$

Si $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, los resultados de los límites para las formas $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ son:

- Si se obtiene una expresión de la forma $\dfrac{L}{\infty}$ entonces el límite es 0.
- Si se obtiene una expresión de la forma $\dfrac{\infty}{L}$ entonces el límite es infinito.
- Si se obtiene una expresión de la forma $\dfrac{L}{0}$ entonces el límite es infinito.

Con "L" constante diferente de cero.

Ejemplo 1

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3-5x^2-3x+2}{4x^3-2x+6}$ es:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{4}{6}$ d) No existe

Solución:

Se divide numerador y denominador por la x de mayor exponente en este caso x^3, se simplifica y se resuelve el límite equivalente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3-5x^2-3x+2}{4x^3-2x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{6}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{4-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}}$$

$$= \frac{6-0-0+0}{4-0+0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-6x+7}{5x^3+2x-3}$ es:

a) $\dfrac{2}{5}$ b) 2 c) 0 d) no existe

Solución:

Se divide numerador y denominador por x^3 y se sustituye:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{0-0+0}{5+0-0} = \frac{0}{5} = 0$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Para simplificar el proceso se puede utilizar el siguiente teorema:

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}$, entonces:

a) Si $n > m$, es decir si el polinomio del numerador es de mayor grado que el denominador, entonces el límite es infinito.

b) Si $n < m$, es decir si el polinomio del numerador es de menor grado que el denominador, entonces el límite es cero.

c) Si $m = n$, es decir si ambos polinomios son del mismo grado, entonces el límite es $\dfrac{a_0}{b_0}$.

Ejemplo 3

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 3x - 2}{2x^2 - 6}$ es:

a) $\dfrac{5}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{2}{5}$ d) No existe

Solución:

Los polinomios son del mismo grado, por tanto, sólo se toma el cociente que resulta de dividir los coeficientes de los términos de mayor grado, es decir $\dfrac{5}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{2x^2 - 6} = \frac{5}{2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x + 1}$ es:

a) 2 b) 0 c) No existe d) 1

Solución:

El polinomio del numerador es de mayor grado que el polinomio del denominador, por tanto, el resultado del límite es "∞", esto es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3}{x + 1} = \infty \text{ (no existe el límite)}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

El valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 - 3x}{1 + x^2}$ es:

a) No existe b) – 3 c) 2 d) 0

Solución:

El polinomio del denominador es de mayor grado que el polinomio del numerador, por tanto el resultado del límite es 0, esto es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - 3x}{1 + x^2} = 0$$

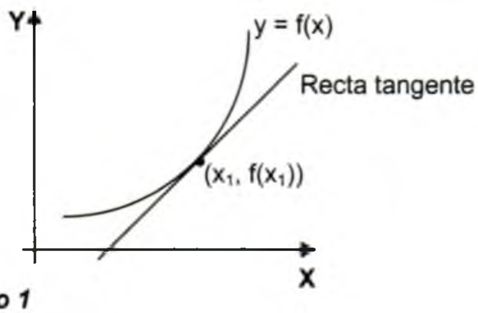
La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

La derivada y sus interpretaciones

a) Interpretaciones física y geométrica

Interpretación geométrica

La derivada de una función y = f(x) evaluada en un punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.



Si y = f(x), entonces la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_1, f(x_1))$ es:

$$m = f'(x_1)$$

Ejemplo 1

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 5x$ en el punto (–1, –4) es:

a) 7 b) 3 c) – 10 d) – 4

Solución:

Se obtiene la derivada de la función,

$$y = x^2 + 5x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

la pendiente de la recta tangente es,

$$m = \frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

se evalúa la derivada en el punto (– 1, – 4),

$$m = 2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La pendiente de la recta tangente a la curva y = cos x, en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, es:

a) 1 b) 2 c) – 2 d) – 1

Solución:

Se obtiene la derivada de la función y = cosx

$$y' = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

se evalúa la derivada en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Interpretación física

- **Velocidad instantánea**

Sea s = f(t) la función que describe la posición de una partícula con respecto al tiempo, se define a la velocidad instantánea de la partícula en el instante "t" como:

$$v = f'(t) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

- **Aceleración instantánea**

Sea s = f(t) la función que describe la posición de una partícula con respecto al tiempo, se define la aceleración instantánea de la partícula en el instante "t" es:

$$a = f''(t) \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ejemplo 1

Una partícula se mueve conforme a la curva $s = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$, las funciones que describen la velocidad y la aceleración instantáneas son:

a) $v = 6t - 18,\ a = 3t^2 - 18t + 24$
b) $v = 3t^2 + 18t,\ a = 6t + 18$
c) $v = 3t^2 - 18t,\ a = 6t^2$
d) $v = 3t^2 - 18t + 24,\ a = 6t - 18$

Solución:

Se obtienen la primera y segunda derivada de la función $s = t^3 - 9t^2 + 24t + 2$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La posición de una partícula está dada por $s = t^3 - 4t^2 + 5t$ donde, "s" está dada en metros y "t" en segundos, la velocidad instantánea a los 3 seg es:

a) 6 m/s b) 8 m/s c) 4 m/s d) 5 m/s

Solución:

Se deriva la función desplazamiento para obtener la función velocidad:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 4t^2 + 5t\right) = 3t^2 - 8t + 5$$

Se evalúa t = 3 seg en la derivada:

$$v = 3(3)^2 - 8(3) + 5 = 3(9) - 24 + 5 = 27 - 24 + 5 = 8 \text{ m/s}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una partícula se mueve de acuerdo a la función $s = 2t^3 - t^2 - 3$ donde, "s" está dada en metros y "t" en segundos, determinar la aceleración instantánea cuando t = 2 seg.

a) 9 m/s^2 b) 20 m/s^2 c) 22 m/s^2 d) 24 m/s^2

Solución:

Se obtiene la segunda derivada de la función $s = 2t^3 - t^2 - 3$

$$\frac{ds}{dt} = 6t^2 - 2t \quad \rightarrow \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 2$$

Se evalúa t = 2 seg en la segunda derivada

$$a = 12(2) - 2 = 24 - 2 = 22 \text{ m/s}^2$$

La respuesta correcta corresponde a inciso "c".

Derivadas de funciones algebraicas

a) Primeras fórmulas y técnicas de derivación

La derivada de una función y = f(x) es el límite de la razón del incremento de la función sobre el incremento de la variable independiente y se define como:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Notación de la derivada

Diversas notaciones para expresar la derivada de una función y = f(x) son:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D_x y$$

Ejemplo 1

La derivada de la función y = 3x + 2 es:

a) y'= 2 b) y'= 3 c) y'= – 2 d) y'= – 3

Solución:

Se aplica la definición de la derivada:

y = 3x + 2 →

$$y' = \lim_{\Delta x \to} \frac{[3(x+\Delta x)+2]-[3x+2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3x+3\Delta x+2]-[3x+2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x+3\Delta x+2-3x-2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 2

La derivada de la función f(x) = 2x + 1 es:

a) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$ b) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2+\Delta x}{\Delta x}$ c) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$ d) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 2}{\Delta x}$

Solución:

Se aplica la definición de la derivada:

f(x) = 2x + 1 →

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x+\Delta x)+1]-[2x+1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2x+2\Delta x+1]-[2x+1]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x+2\Delta x+1-2x-1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Derivadas de funciones algebraicas

– Reglas para determinar la derivada de una función algebraica:

1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3) $\frac{d}{dx}(cx) = c$

4) $\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

7) $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

8) $\frac{d}{dx}(\sqrt{v}) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dx}$

9) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

11) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Donde c: constante; x, u, v y w: variables.

Ejemplo 1

La derivada de la función $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 7$ es:

a) $3x^2 + 5x - 4$ b) $3x^2 + 10x + 7$ c) $3x^2 + 5x + 7$ d) $3x^2 + 10x - 4$

Solución:

Aplicando las fórmulas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 5x^2 - 4x + 7\right) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(5x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(7) = \frac{d}{dx}(x^3) + 5\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(7)$$

$$= 3x^{3-1} + 5(2x^{2-1}) - 4(1) + 0$$

$$= 3x^2 + 5(2x) - 4$$

$$= 3x^2 + 10x - 4$$

La respuesta correcta corresponde el inciso "d".

Ejemplo 2

La derivada de la función $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ es:

a) $\frac{5}{3}x^{\frac{2}{5}}$ b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}$ c) $\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ d) $\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{5}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{5}}\right) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{\frac{3-5}{5}} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

La derivada de la función $y = \frac{3}{x^2}$ es:

a) $\frac{3}{2x}$ b) $\frac{6}{x^3}$ c) $-\frac{3}{2x}$ d) $-\frac{6}{x^3}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^{-2}\right) = 3\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = 3(-2x^{-2-1}) = -6x^{-3} = -6\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{6}{x^3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

La derivada de la función $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \sqrt{x} - 5x + 2$ es:

a) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5$

c) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5$

b) $\frac{3}{6}x^2 + \frac{8}{6}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5$

d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \sqrt{x} - 5x + 2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= \frac{1}{2}(3x^{3-1}) + \frac{4}{3}(2x^{2-1}) + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 5(1) + 0$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2) + \frac{4}{3}(2x^1) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 5

La derivada de la función $y = (3x^5 + 2)^4$ es:

a) $60x^4(3x^5 + 2)^3$ b) $4(15x^4 + 2)^3$ c) $60x(3x^5 + 2)^3$ d) $4x^4(3x^5 + 2)^3$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$, entonces:

$y = (3x^5 + 2)^4$ → $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^5 + 2)^4 = 4(3x^5 + 2)^{4-1}\frac{d}{dx}(3x^5 + 2) = 4(3x^5 + 2)^3(15x^4)$

$= 60x^4(3x^5 + 2)^3$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

La derivada de la función $f(x) = (x^2 + 1)(3x^3 + 2)$ es:

a) $x(15x^3 - 9x + 4)$ b) $x(15x^3 - 9x - 4)$ c) $x(15x^3 + 9x + 4)$ d) $3x(5x^3 + 3x + 1)$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$,

$f(x) = (x^2 + 1)(3x^3 + 2)$ → $f'(x) = (x^2 + 1)\frac{d}{dx}(3x^3 + 2) + (3x^3 + 2)\frac{d}{dx}(x^2 + 1)$

$f'(x) = (x^2 + 1)(9x^2) + (3x^3 + 2)(2x)$

$f'(x) = 9x^4 + 9x^2 + 6x^4 + 4x$

$f'(x) = 15x^4 + 9x^2 + 4x$

$f'(x) = x(15x^3 + 9x + 4)$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 7

La derivada de la función $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ es:

a) $\frac{-17}{(2x-5)^2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{17}{(2x-5)^2}$ d) $\frac{-17}{(3x+1)^2}$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$,

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x-5} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{2x-5}\right) = \frac{(2x-5)\frac{d}{dx}(3x+1) - (3x+1)\frac{d}{dx}(2x-5)}{(2x-5)^2} = \frac{(2x-5)(3) - (3x+1)(2)}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{6x-15-(6x+2)}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{6x-15-6x-2}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{-17}{(2x-5)^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

b) Aplicaciones de la derivación implícita

Para derivar una función implícita se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \text{ con } F_y(x, y) \neq 0$$

Donde:

$F_x(x, y)$: Derivada de la función con respecto a "x".

$F_y(x, y)$: Derivada de la función con respecto a "y".

Ejemplo 1

La derivada con respecto a "x" de $x^2 + y^2 = 4$ es:

a) $-\frac{x}{y}$ b) $-\frac{2x}{y}$ c) $-\frac{x}{2y}$ d) $\frac{x}{y}$

Solución:

La expresión se iguala con cero: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Para obtener $F_x(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "x" y se toma como constante "y", entonces:

$$F_x(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = 2x$$

Para obtener $F_y(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "y" y se toma como constante "x", entonces:

$$F_y(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = 2y$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La derivada con respecto a "x" de $x^3 + 3x^2y - xy^2 + y^3 = 0$, es:

a) $\dfrac{3x^2 + 6xy - y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ b) $-\dfrac{3x^2 + 6xy - y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ c) $\dfrac{3x^2 - 6xy + y^2}{3x^2 - 2xy - 3y^2}$ d) $-\dfrac{3x^2 - 2xy + 3y^2}{3x^2 + 6xy - y^2}$

Solución:

Para obtener $F_x(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "x" y se toma como constante "y", entonces,

$$F_x(x, y) = 3x^2 + 6xy - y^2$$

Para obtener $F_y(x, y)$, se deriva la ecuación con respecto a "y" y se toma como constante "x" , entonces,

$$F_y(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 6xy - y^2}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

La derivada con respecto a "x" de $x^2 + xy - y^2 = 4$, es:

a) $\dfrac{2y - x}{2x + y}$ b) $\dfrac{2x - y}{2y - x}$ c) $\dfrac{-2x + y}{2y - x}$ d) $\dfrac{2x + y}{2y - x}$

Solución:

Para obtener la derivada de una función implícita se deriva término a término los elementos de la igualdad con respecto a la variable que se indica y se despeja y'.

$$x^2 + xy - y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + \left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

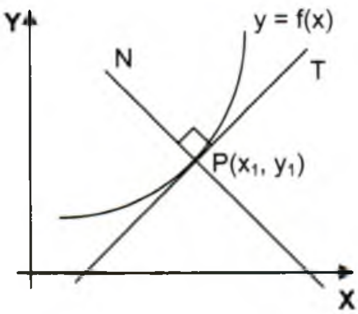
Pero $\dfrac{dy}{dx} = y'$, entonces: $2x + xy' + y - 2yy' = 0$

Se despeja y' $y'(x - 2y) = -2x - y$

$$y' = \frac{-2x - y}{x - 2y} \quad ó \quad y' = \frac{2x + y}{2y - x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ecuaciones de la tangente y la normal a una curva



La ecuación de la recta tangente en el punto (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

La ecuación de la recta normal en el punto (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1)$$

Donde T: Recta tangente y N: Recta normal

Ejemplo:

Las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + y^2 - 17 = 0$ en el punto (1, 4) son:

a) $x + 4y - 17 = 0$, $4x - y = 0$ b) $x - 4y - 17 = 0$, $4x - y - 8 = 0$ c) $x + 4y + 15 = 0$, $4x + y = 0$ d) $x + 4y - 15 = 0$, $4x + y - 8 = 0$

Solución:

Se obtiene la derivada de la función $x^2 + y^2 - 17 = 0$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Se evalúa la derivada en el punto (1, 4)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (1, 4) es:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 1) \quad \rightarrow \quad 4y - 16 = -x + 1$$

$$x + 4y - 16 - 1 = 0$$

$$x + 4y - 17 = 0$$

La ecuación de la recta normal en el punto (1, 4) es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 4 = 4(x - 1) \quad \rightarrow \quad y - 4 = 4x - 4$$

$$4x - y = 0$$

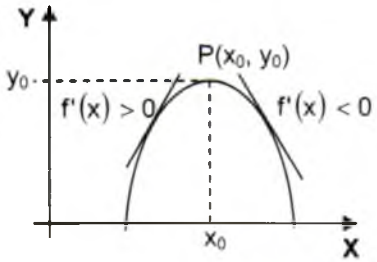
La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Aplicaciones de la primera derivada

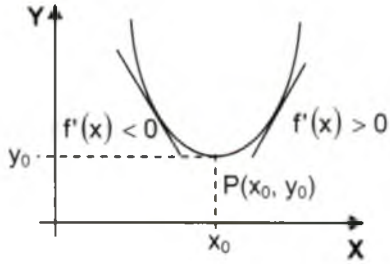
a) Máximos y mínimos relativos de una función

Criterio de la primera derivada

1) La función $y = f(x)$ tiene un punto máximo en (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y antes del punto, la derivada es positiva y después del punto la derivada es negativa.

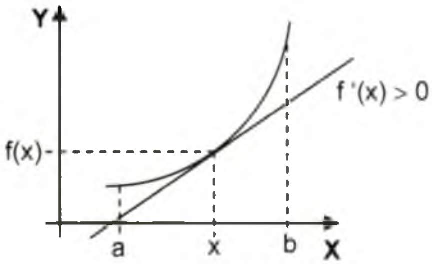


2) La función $y = f(x)$ tiene un punto mínimo en (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y antes del punto, la derivada es negativa y después del punto la derivada es positiva.

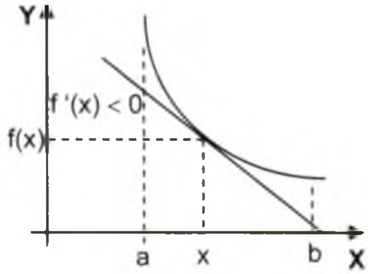


Intervalos donde crece y decrece una función

1) La función $y = f(x)$ es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.



2) La función $y = f(x)$ es decreciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.



Ejemplo 1

El punto mínimo de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ es:

a)$(-2, 17)$ b)$(2, 1)$ c) $(-2, 1)$ d) $(2, 5)$

Solución:

I.- Se obtiene la derivada de la función:

$$f'(x) = 2x - 4$$

II.- Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación:

$$2x - 4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 2$$

III.- Se analiza la derivada para valores de "x" antes y después de $x = 2$

Si $x = 1$, $f'(1) = 2(1) - 4 = 2 - 4 = -2$

Si $x = 3$, $f'(3) = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$

La derivada es negativa antes de 2 y positiva después de 2, entonces la función tiene un mínimo para $x = 2$

IV.- Se obtiene la ordenada, sustituyendo $x = 2$ en la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 9 - 8 = 1$$

se genera el punto $(2, 1)$ el cual es un mínimo.

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La función $f(x) = x^3 - 27x$ es creciente en el intervalo:

a) $(-3, 3)$ b) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ c) $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ d) $[-3, 3]$

Solución:

I.- Se obtiene la derivada de la función f(x):

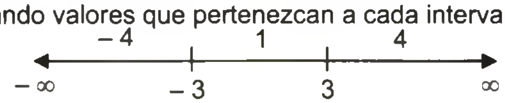
$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

II.- Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 - 27 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 27 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9$$

$$x = 3,\ x = -3$$

III.- Se grafican los puntos críticos en la recta numérica y se analizan los intervalos para determinar en cuál de ellos la función es creciente dando valores que pertenezcan a cada intervalo.



– Para el intervalo $(-\infty, -3)$, se elige $x = -4$, $f'(-4) = 3(-4)^2 - 27 = 48 - 27 = 21$

– Para el intervalo $(-3, 3)$, se elige $x = 1$, $f'(1) = 3(1)^2 - 27 = 3 - 27 = -24$

– Para el intervalo $(3, \infty)$, se elige $x = 4$, $f'(4) = 3(4)^2 - 27 = 48 - 27 = 21$

La solución serán aquellos intervalos en los que la derivada es positiva:

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

b) Derivadas sucesivas

Sea $y = f(x)$, entonces:

Primera derivada $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Segunda derivada $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Tercera derivada $y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

⋮

n – ésima derivada $y^n = f^n(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Ejemplo 1

Si $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es:

a) $3x^2 + 8x - 5$ b) $x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ c) $6x + 8$ d) 6

Solución:

Se obtiene la primera derivada:

Si $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ entonces, $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x - 5$

Para obtener la segunda derivada, se deriva la primera derivada,

Si $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 8x - 5$ entonces, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(3x^2 + 8x - 5\right) = 6x + 8$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

c) Aplicación de la segunda derivada

Criterio de la segunda derivada

- La función $y = f(x)$ tiene un mínimo en el punto (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.
- La función $y = f(x)$ tiene un máximo en el punto (x_0, y_0) si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$.

Ejemplo 1

Los puntos máximos y mínimos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, son:

a) (–2, 19) y (1, – 12)   b) (– 2, – 19) y (1, 8)   c) (2, – 19) y (– 1, 8)   d) (2, 19) y (1, – 8)

Solución:

I.- Se obtiene la derivada de la función y se iguala con cero para obtener los puntos críticos:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2, x = -1$

II.- Se obtiene la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x - 6$$

Se evalúa la segunda derivada en los puntos críticos $x = 2$ y $x = -1$

Si $x = 2$, $f''(2) = 12(2) - 6 = 24 - 6 = 18 > 0$, entonces la función tiene un mínimo en $x = 2$.

Si $x = -1$, $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 < 0$, entonces la función tiene un máximo en $x = -1$.

III.- Se obtienen las ordenadas de los puntos críticos sustituyendo en la función original:

Si $x = 2$, $f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1 = 16 - 12 - 24 + 1 = 17 - 36 = -19$,

se genera el punto mínimo (2, – 19)

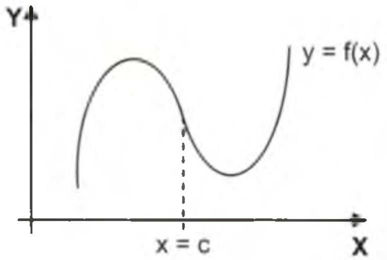
Si $x = -1$, $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = -2 - 3 + 12 + 1 = 13 - 5 = 8$,

se genera el punto máximo (– 1, 8)

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Punto de inflexión y concavidad de una función

– La función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(c, f(c))$ si $f''(c) = 0$ y existe cambio de concavidad.



Concavidad

– Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$.

– Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$.

Ejemplo

El punto de inflexión de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, es:

a) (2, 0) b) (1, 4) c) (3, 0) d) (2, 2)

Solución:

I.- Se obtiene la segunda derivada de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightarrow \quad y'' = 6x - 12$$

II.- Se iguala la segunda derivada a cero y se resuelve la ecuación:

$$6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

III.- Se analiza la segunda derivada para valores de "x" antes y después de x = 2:

Si x = 1
$f''(1) = 6(1) - 12 = 6 - 12 = -6$

Si x = 3
$f''(3) = 6(3) - 12 = 18 - 12 = 6$

La segunda derivada cambió de "–" a "+", la función tiene un punto de inflexión en x = 2.

IV.- Se obtiene la ordenada de x = 2 en la función original:

$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 8 - 24 + 18 = 26 - 24 = 2$

por tanto, el punto de inflexión tiene coordenadas (2, 2).

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Razón de cambio

Si una cantidad "x" está en función del tiempo "t", la razón de cambio de "x" con respecto a "t" está dada por $\frac{dx}{dt}$. Si dos o más cantidades se relacionan con una ecuación, la razón de cambio de cada cantidad se obtiene derivando la ecuación.

Pasos para resolver problemas de razón de cambio

Se traza un dibujo que contemple todas las variables que intervengan en el problema.

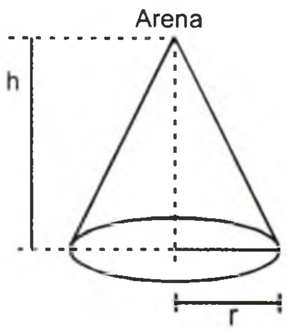
Se elabora un modelo matemático, que relacione las variables.

Se deriva el modelo matemático con respecto al tiempo, se despeja la incógnita a conocer y se sustituyen los datos dados.

Ejemplo 1

Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $30\frac{m^3}{min}$, la altura del cono es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez está aumentando su altura cuando el montón tiene 3 m de altura?

Solución:



El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ pero r = h, entonces $V = \frac{1}{3}\pi h^3$

Derivando

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt} \qquad \text{donde,} \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Sustituyendo $\frac{dV}{dt} = 30\frac{m^3}{min}$ y h = 3m

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi(3)^2}(30) = \frac{30}{9\pi} = \frac{10}{3\pi}$$

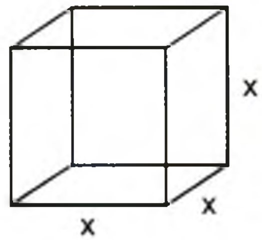
Por lo tanto la altura aumenta a razón de $\frac{10}{3\pi}\frac{m}{min}$.

Ejemplo 1

Un cubo de hielo de $10cm^3$ de volumen, comienza a derretirse a razón de $6\frac{cm^3}{s}$. Hallar la razón de cambio de la superficie del cubo en ese instante.

Solución:

Se construye un cubo de arista x,



cuyo volumen es $V = 10\ cm^3$ y $\frac{dv}{dt} = -6\ \frac{cm^3}{s}$ (El signo indica que el volumen está decreciendo).

Luego, $V = x^3$ y $\frac{dv}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$ donde $3x^2\frac{dx}{dt} = -6$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{6}{3x^2}$$

La razón con que disminuye la arista es: $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$

El área total del cubo está dada por:

$$A = 6x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$$

Pero $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{x^2}$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} = 12x\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{24}{x}$$

Si el volumen es de $10\ cm^3 = x^3$, entonces $x = \sqrt[3]{10}$.

Por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{cm^2}{s}$$

El área disminuye a razón de $\frac{24}{\sqrt[3]{10}}\frac{cm^2}{s}$.

Derivada de funciones exponenciales

La función exponencial general

La función exponencial es aquélla de la forma,

$$f(x) = a^x$$

- **Propiedades de la función exponencial**

Si $a > 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ Si $1 > a > 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

La función $y = e^x$

La función exponencial natural es aquélla de la forma,

$$f(x) = e^x$$

donde $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

- **Propiedades de la función exponencial**

Si $f(x) = e^x$, entonces,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Reglas para determinar la derivada de una función exponencial

$$\frac{d}{dx}e^v = e^v \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}a^v = a^v \ln a \cdot \frac{dv}{dx}$$

e: base del logaritmo natural, a: constante, v: variable.

Ejemplo 1

La derivada de $y = e^{2x}$ es:

a) e^{2x} b) $2x\, e^{2x}$ c) $2\, e^{2x}$ d) $2\, e^x$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^v = e^v \cdot \frac{dv}{dx}$

$$y = e^{2x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}(e^{2x}) = e^{2x}\frac{d}{dx}(2x) = e^{2x}(2) = 2\,e^{2x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La derivada de $y = 2^{3x^2-1}$ es:

a) $2^{3x^2-1}\ln 2$ b) $2^{3x^2-1}(6x)$ c) $2^{6x}\ln 2$ d) $2^{3x^2-1}\ln 2\,(6x)$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^v = a^v \ln a \cdot \frac{dv}{dx}$

$$y = 2^{3x^2-1} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}\left(2^{3x^2-1}\right) = 2^{3x^2-1}\ln 2\,\frac{d}{dx}(3x^2-1) = 2^{3x^2-1}\ln 2\,(6x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Funciones circulares

Teoremas sobre límites de funciones trigonométricas

1) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Derivada de las funciones circulares

1) $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v = \cos v \frac{dv}{dx}$ 3) $\frac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$ 5) $\frac{d}{dx}\sec v = \sec v \tan v \frac{dv}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}\cos v = -\operatorname{sen} v \frac{dv}{dx}$ 4) $\frac{d}{dx}\cot v = -\csc^2 v \frac{dv}{dx}$ 6) $\frac{d}{dx}\csc v = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx}$

Ejemplo 1

La derivada de la función y = sen 3x es:

a) 3 cos 3x b) 3 sen 3x c) cos 3x d) – sen 3x

Solución:

$$y = \operatorname{sen} 3x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) = (\cos 3x)(3) = 3\cos 3x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 2

La derivada de la función $f(x) = \cos x^2$ es:

a) $-\operatorname{sen} x^2$ b) – cos 2x c) $-2x \operatorname{sen} x^2$ d) 2x cos 2x

Solución:

$$f(x) = \cos x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x^2) = -\operatorname{sen} x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = (-\operatorname{sen} x^2)(2x) = -2x \operatorname{sen} x^2$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 3

La derivada de $y = \tan(3x^2 + 2x)$ es:

a) $\sec^2(3x^2 + 2x)$ b) tan (6x + 2) c) $\sec^2(6x + 2)$ d) $(6x + 2) \cdot \sec^2(3x^2 + 2x)$

Solución:

$$y = \tan(3x^2 + 2x) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}\left[\tan(3x^2 + 2x)\right] = \sec^2(3x^2 + 2x)\frac{d}{dx}(3x^2 + 2x)$$

$$= \sec^2(3x^2 + 2x)(6x + 2)$$

$$= (6x + 2) \cdot \sec^2(3x^2 + 2x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 4

La derivada de $y = \text{sen}^3 5x$ es:

a) $3\ \text{sen}^2 5x$ b) $15\ \text{sen}^2 5x \cos 5x$ c) $15\ \text{sen}^2 5x$ d) $3\ \text{sen}\ 5x \cos 5x$

Solución:

La función $y = \text{sen}^3 5x$ es equivalente a $y = (\text{sen}\ 5x)^3$, se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$,

$y = (\text{sen}\ 5x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3(\text{sen}\ 5x)^{3-1}\frac{d}{dx}(\text{sen}\ 5x) = = 3(\text{sen}\ 5x)^2\frac{d}{dx}(\text{sen}\ 5x).$

Para la nueva derivada se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}\text{sen}\ v = \cos v\frac{dv}{dx}$

$$y' = 3(\text{sen}\ 5x)^2\frac{d}{dx}(\text{sen}\ 5x) = 3(\text{sen}\ 5x)^2(\cos 5x)\frac{d}{dx}(5x)$$
$$= 3(\text{sen}\ 5x)^2(\cos 5x)(5)$$
$$= 15\ \text{sen}^2 5x \cos 5x$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 5

La derivada de $y = x^2 \cos x$ es:

a) $2x\cos x$ c) $x(2 \cos x - x\ \text{sen} x)$

b) $x(x \cos x - 2\ \text{sen} x)$ d) $2x\ \text{sen} x$

Solución:

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$y = x^2 \cos x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}(x^2 \cos x) = x^2\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x^2)$

$$= x^2(-\ \text{sen}\ x) + \cos x\ (2x)$$
$$= -x^2\ \text{sen}\ x + 2x \cos x$$
$$= x(2 \cos x - x\ \text{sen} x)$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Diferenciales y cálculos aproximados

Definición

Se define la diferencial de una función como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

$$df(x) = f'(x)dx \quad o \quad dy = \frac{dy}{dx}dx \ ; \quad \text{para toda } dx \neq 0$$

Ejemplo 1

Obtener la diferencial de la función $y = x^2 - 5x + 6$

Solución:

Se obtiene la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2 - 5x + 6)}{dx} = 2x - 5$$

Se multiplica este resultado por dx:

$$\frac{dy}{dx} \cdot dx = (2x - 5)dx$$

Por tanto, la diferencial es: $dy = (2x - 5)dx$.

Ejemplo 2

Hallar la diferencial de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

Solución:

Se deriva la función:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2 - 5}}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d(x^2 - 5)}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Se multiplica la derivada por dx para obtener la diferencial de la función:

$$\frac{df(x)}{dx} \cdot dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \cdot dx$$

Por tanto,

$$df(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} dx$$

Ejemplo 3

Obtener la diferencial de la función $f(\theta) = 2\text{sen}\theta\cos\theta$.

Solución:

Se deriva la función:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{d2\text{sen}\theta\cos\theta}{d\theta} = 2\left[\text{sen}\theta\frac{d\cos\theta}{d\theta} + \cos\theta\frac{d\text{sen}\theta}{d\theta}\right] = 2[\text{sen}\theta(-\text{sen}\theta) + \cos\theta(\cos\theta)] = 2\left[\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right]$$

Pero $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, entonces:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 2\cos 2\theta \quad \rightarrow \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta = 2\cos 2\theta d\theta$$

$$df(\theta) = 2\cos 2\theta d\theta$$

Aproximaciones

Ejemplo 1

Obtener el valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$.

Solución:

Se asocia la función $y=\sqrt[3]{x}$ a la operación y se obtiene su diferencial.

$$dy=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}dx$$

Se busca un valor "x" próximo a 70, cuya raíz cúbica sea exacta, en este caso x = 64, y las seis unidades restantes son tomadas como la diferencial de la variable $dx=6$.

Entonces al pasar "x" a "x + dx", "y" pasa a ser "y + dy", por tanto el valor aproximado de $\sqrt[3]{70}$ es:

$$\sqrt[3]{x}\cong y+dy\cong\sqrt[3]{64}+\frac{1}{3(\sqrt[3]{64})^2}(6)\cong 4+0.125$$

Por tanto:

$$\sqrt[3]{70}\cong 4.125$$

Ejemplo 2

Obtener el valor aproximado de $\cos 40°$.

Solución:

La función asociada es $y=\cos x$ y su diferencial $dy=-\text{sen}x dx$ se toma x = 30° y dx = 10° pero 1°=0.01745 rad, entonces 10° = 0.1745 rad sustituyendo se obtiene:

$$y=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.8660 \quad ; \ dy=-\text{sen}30°(10°) = -0.5(0.1745)=-0.08725$$

Por tanto, al pasar de $x+dx$ a $y+dy$ se obtiene el resultado de $\cos 40°$.

$$y+dy\cong 0.8660+(-0.08725)\cong 0.77875$$

Por tanto,

$$\cos 40°\cong 0.77875$$

Funciones inversas

Reglas para derivar funciones inversas circulares

$$\frac{d}{dx}\text{arcsen } v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc tan } v = \frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc sec } v = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc cos } v = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc cot } v = -\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\text{arc csc } v = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Ejemplos

Hallar las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y = \text{arc sen } x^2$

Solución:

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc sen } v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{arcsen } x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

por tanto, la derivada de la función es $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

2) $y = \text{arc tan}(\sqrt{x}-1)$

Solución:

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc tan } v) = \frac{1}{v^2+1}\cdot\frac{dv}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arc tan}(\sqrt{x}-1) = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2+1}\cdot\frac{d(\sqrt{x}-1)}{dx} = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,[(\sqrt{x}-1)^2+1]}$$

3) $r = \theta^2 \text{arcsec } \theta$

Solución:

$$\frac{dr}{d\theta} = \theta^2\frac{d}{d\theta}\text{arcsec }\theta + \text{arcsec }\theta\frac{d\theta^2}{d\theta} = \theta^2\left[\frac{1}{\theta\sqrt{\theta^2-1}}\frac{d\theta}{d\theta}\right] + \text{arcsec }\theta\,(2\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2-1}} + 2\theta\,\text{arcsec }\theta$$

4) $y = \frac{\text{arc sen } x}{x}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\text{arc sen } x) - (\text{arc sen } x)\frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{dx}\right) - \text{arcsen} x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arcsen } x}{x^2} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arcsen} x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arcsen} x}{x^2}$$

La función logaritmo como inversa de la exponencial

► **Inversa de una función**

Sea la función y = f(x), su función inversa se define de la siguiente manera:

$$f^{-1}[f(x)] = x$$

► **Inversa de la función exponencial**

Sea la función $f(x) = a^x$, entonces,

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \rightarrow \quad a^{f^{-1}(x)} = x$$

aplicando logaritmos en base "a",

$$\log_a a^{f^{-1}(x)} = \log_a x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x)\log_a a = \log_a x$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

La derivada de la función ln v

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 1

La derivada de $y = \ln(x^3 - 2)$ es:

a) $\frac{3x^2}{x^3-2}$ b) $\frac{1}{x^3-2}$ c) $\frac{3x}{x^3-2}$ d) $\frac{x^2}{x^3-2}$

Solución:

$$y = \ln(x^3-2) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}\ln(x^3-2) = \frac{1}{x^3-2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3-2) = \frac{1}{x^3-2}\cdot(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3-2}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

La derivada de $y = \ln(x^2 - 5x)$ es:

a) $\frac{2x}{x^2-5x}$ b) $\frac{2x-5}{x^2-5x}$ c) $\frac{-5}{x^2-5x}$ d) $\frac{2}{2x-5}$

Solución:

$$y = \ln(x^2-5x) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}\ln(x^2-5x) = \frac{1}{x^2-5x}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-5x) = \frac{1}{x^2-5}\cdot(2x-5) = \frac{2x-5}{x^2-5x}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b"

Reglas para determinar la derivada de una función logarítmica

$$\frac{d}{dx}\log_b v = \frac{\log_b e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo:

La derivada de la función $y = \log_3(2x + 5)$ es:

a) $\frac{2}{2x+5}\log_3 e$ b) $\frac{2}{2x+5}$ c) $\frac{1}{2x+5}\log_3 e$ d) $\frac{2}{2x+5}\ln 3$

Solución:

$$y = \log_3(2x+5) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{d}{dx}\log_3(2x+5) = \frac{\log_3 e}{2x+5}\cdot\frac{d}{dx}(2x+5) = \frac{2}{2x+5}\log_3 e$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejercicios

1. Fluye agua por un tanque cónico de 10 m de radio y 25 m de altura. Cuando el nivel del agua está a una altura de h y radio r, expresar el volumen del agua en función de la altura.

a) $V(h) = \frac{1}{3}\pi h^3$ b) $V(h) = \frac{4}{75}\pi h^3$ c) $V(h) = \frac{4}{25}\pi h^3$ d) $V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2$

2. Dada una circunferencia de radio "r", expresar el área de la circunferencia en función de su diámetro "d".

a) $A(d) = \frac{\pi d^2}{4}$ b) $A(d) = \frac{\pi d^2}{2}$ c) $A(d) = \pi d^2$ d) $A(d) = 4\pi d^2$

3. El dominio de la función $y = \sqrt{x-4}$, es el intervalo:

a) $x \in (4, \infty)$ b) $x \in [4, \infty)$ c) $x \in (-\infty, 4)$ d) $x \in (-\infty, 4]$

4. El dominio de la función $y = \sqrt{16-x^2}$, es el intervalo:

a) $x \in [-4, 4]$ b) $x \in (-4, 4)$ c) $x \in (-\infty, 4)$ d) $x \in [4, \infty)$

5. El dominio de la función $y = \frac{x-2}{x+4}$, es:

a) $D_f = \{x \in R / x \neq -4\}$ b) $D_f = \{x \in R / x \neq 4\}$ c) $D_f = \{x \in R / x \neq -2\}$ d) $D_f = \{x \in R / x \neq 2\}$

6. La asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{3x-1}{2-5x}$, es:

a) $x = \frac{2}{5}$ b) $x = \frac{5}{2}$ c) $x = -\frac{2}{5}$ d) $x = -\frac{5}{2}$

7. La asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$, es:

a) $y = -1$ b) $y = 3$ c) $y = -2$ d) $y = 0$

8. Si $f(x) = 2x + 3$, el valor de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

9. Si $f(x) = x^2$, el valor de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, es:

a) $x^2 + h^2$ b) $(x + h)^2$ c) $x + 2h$ d) $2x + h$

10. Si $f(x) = \frac{3x^2-1}{2x+1}$, ¿cuál es el resultado de $f(-2)$?

a) $-\frac{11}{3}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $-\frac{7}{3}$

11. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$, el valor de $f(1)$, es:

a) 6 b) 0 c) 1 d) – 1

12. Si $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 - 2x + 3$, el resultado de $f + g$, es:

a) $x^2 + 2$ b) $x^2 - 2$ c) $x^2 + 4x + 2$ d) $x^2 + 4x - 2$

13. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{1+x}$, el resultado de $f \cdot g$, es:

a) $1 - x^2$ b) $\sqrt{1+x^2}$ c) $\sqrt{1-x^2}$ b) $1+x^2$

14. Si $f(2) = 8$ y $g(2) = 4$, el resultado de $2f(2) - 3g(2)$, es:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8

15. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$, el resultado de $f \circ g$, es:

a) x^2 b) $x^2 - 1$ c) $x^2 + 1$ d) $x^2 - 2$

16. Si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - 2x$, el resultado de $\frac{g}{f}$, es:

a) $x^3 - 2x^2$ b) $x - 2$ c) $x + 2$ d) $x^2 - 2x$

17. El valor de $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x - 1}$, es:

a) 3 b) 0 c) – 2 d) 5

18. El valor de $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x - 7}{2x + 5}$ está dado por:

a) $-\frac{3}{10}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $-\frac{10}{3}$ d) $\frac{3}{10}$

19. El valor $\lim\limits_{x\to -3} \left(2x^2 - 3x - 5\right)$, es:

a) 22 b) – 14 c) 20 d) – 22

20. El valor de $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 16}$ está dado por:

a) 8 b) – 8 c) $\frac{9}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$

21. El valor $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2 - 5x}{x}$, es:

a) – 5 b) 5 c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{5}$

22. El valor $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 6}$, es:

a) – 1 b) – 5 c) 1 d) 5

23. El valor de $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ está dado por:

a) -2 b) 2 c) 1 d) -1

24. El valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x}$, es:

a) -3 b) 3 c) 2 d) -1

25. El valor de $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ está dado por:

a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $-\frac{1}{10}$

26. El valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 5}{4x^3 - 5x + 6}$, es:

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) -2 d) $-\frac{1}{2}$

27. El valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x + 3}$, es:

a) 0 b) ∞ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$

28. El valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x}{x^3 - 2x^2 - 3}$, es:

a) ∞ b) 0 c) 3 d) -5

29. El valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x^3}{x^2}$, es:

a) -5 b) 1 c) -1 d) 5

30. La derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 5$, es:

a) $6x^2$ b) $6x$ c) $6x + 5$ d) $5 + 6x$

31. La derivada de la función $y = \frac{x^2 + 8x - 10}{7}$, es:

a) $\frac{2x + 8}{7}$ b) $\frac{2x^2}{7}$ c) $2x + 8$ d) $\frac{2x - 8}{7}$

32. La derivada de la función $y = 6x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 15$, es:

a) $24x^3 - 9x^2 - 4x - 7$ b) $24x^3 + 9x^2 + 4x - 7$ c) $24x^3 - 9x^2 - 4x + 7$ d) $24x^3 + 9x^2 - 4x - 7$

33. La derivada de la función $y = \frac{1}{2}(x^2 - 3)(x^2 + 4)$, es:

a) $2x^3 + 3x$ b) $2x^3 - x$ c) $2x^3 + x$ d) $2x^3 - 5x^2$

34. La derivada de la función $y = x^4(5x - 4x^2)$, es:

a) $x^4 - 24x^5$ b) $x(25 - 24x)$ c) $x^4(25 + 24x)$ d) $x^4(25 - 24x)$

35. La derivada de la función $y = (x^4 - 2x)(x^3 + 4)$, es:

a) $x^6 - 8x^3 + 8$ b) $7x^6 + 8x^3 - 8$ c) $x^6 + x^3 - 8$ d) $7x^6 - 8x^3 - 8$

36. La derivada de la función $y = \frac{2x+3}{x-5}$, es:

a) $-\frac{13}{(x-5)^2}$ b) $-\frac{13}{(x-5)}$ c) $\frac{13}{(x-5)^2}$ d) $-\frac{x}{(x-5)^2}$

37. La derivada de la función $y = \frac{x^2+4}{x^2+1}$, es:

a) $-\frac{x}{(x^2+1)}$ b) $-\frac{6x}{(x^2+1)}$ c) $\frac{x}{(x^2+1)^2}$ d) $-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$

38. La derivada de la función $y = (x^3 + 2x)^3$, es:

a) $(9x^2+6)(x^3+2x)^2$ b) $(9x^2+6)(x^3+2x)$ c) $(9x^2-6)(x^3-2x)^2$ d) $(9x^2+6)^2(x^3+2x)^2$

39. La derivada de la función $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + x}$, es:

a) $\frac{3x^2-6x+1}{2\sqrt{x^3-3x^2+x}}$ b) $\frac{3x^2+6x+1}{2\sqrt{x^3-3x^2+x}}$ c) $\frac{3x^2-6x+1}{\sqrt{x^3-3x^2+x}}$ d) $\frac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+x}}$

40. La derivada de la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$, es:

a) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$ b) $\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$ c) $\frac{2x+5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$ d) $\frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x)^2}}$

41. La derivada con respecto a "x" de $4x^2 + 9y^2 = 36$

a) $-\frac{4x}{9y^2}$ b) $-\frac{4x^2}{9y}$ c) $-\frac{4x}{9y}$ d) $\frac{4x}{9y}$

42. La derivada con respecto a "x" de $5x - 3xy + y = 2$

a) $\frac{3y-5}{1+3x}$ b) $\frac{3y+5}{1-3x}$ c) $-\frac{3y-5}{1-3x}$ d) $\frac{3y-5}{1-3x}$

43. La derivada con respecto a "x" de $2x^2 - x^2y + y^3 = y^2$

a) $\frac{4x-xy}{3y^2-2y-x^2}$ b) $\frac{4x-2xy}{3y^2-2y-x^2}$ c) $-\frac{4x-2xy}{3y^2-2y-x^2}$ d) $\frac{4x-2xy}{3y^2-2-x^2}$

44. La derivada con respecto a "x" de $x^3 + 4x^2y - 9xy^2 - y^3 = 15$

a) $-\frac{9y^2-8xy-3x^2}{4x^2-18xy-3y^2}$ b) $\frac{9y^2-8xy-3x^2}{4x^2-18xy-3y^2}$ c) $\frac{9y^2+8xy-3x^2}{4x^2-18xy-3y^2}$ d) $\frac{9y^2-18xy-3x^2}{4x^2-8xy-3y^2}$

45. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = 4x^2 - 9$ en el punto (–1, –5), es:

a) 15 b) 4 c) – 5 d) – 8

46. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 + 5x + 2$ en el punto (– 2, 4), es:

a) – 18 b) – 14 c) – 7 d) 2

47. La pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en el punto (0, 2), es:

a) – 1 b) 0 c) 4 d) 6

48. La pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = 4\tan x$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 4)$, es:

a) 8 b) 3 c) – 6 d) – 8

49. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \frac{x + 2}{5 - 2x}$ en el punto (3, – 5), es:

a) 13 b) 9 c) 0 d) – 5

50. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \text{sen}\frac{x}{2}$ en el punto $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$, es:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

51. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = t^3 + 4t^2 - 2t + 10$. ¿Cuál es la función que describe la velocidad instantánea?

a) $3t^2 + 8t - 10$ b) $3t^2 + 8t - 2$ c) $t^2 + 8t - 2$ d) $3t^2 + 8t + 2$

52. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = 2t^3 - 5t^2 - t$. ¿Cuál es la función que describe la velocidad instantánea?

a) $6t^2 - 10t - 1$ b) $6t^2 - t - 1$ c) $t^2 - 10t - 1$ d) $6t^2 + 10t - 1$

53. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = 7 + 3t - t^2$ ¿Cuál es la función que describe la velocidad instantánea?

a) $4 - 2t$ b) $3 - t$ c) $3 - 2t$ d) $3 + 2t$

54. La posición de una partícula esta dada por $s = t^3 - 3t^2 + 2t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué velocidad lleva a los 2s?

a) $10\frac{m}{s}$ b) $9\frac{m}{s}$ b) $9\frac{m}{s}$ d) $2\frac{m}{s}$

55. La posición de una partícula esta dada por $s = 7t^3 - 15\,t^2 - 370t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué velocidad lleva a los 5s?

a) $15\frac{m}{s}$ b) $12\frac{m}{s}$ c) $8.5\frac{m}{s}$ d) $5\frac{m}{s}$

56. La posición de una partícula esta dada por $s = t^2 - 6t$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la velocidad instantánea sea cero?

a) 1s b) 2s c) 3s d) 5s

57. La posición de una partícula esta dada por $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + 9$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la velocidad instantánea sea cero?

a) 6.4s b) 5s c) 4s d) 1s

58. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = t^3 + 5t^2 - 2t$ ¿Cuál es la función que describe la aceleración instantánea?

a) $6t + 10$ b) $6t - 10$ c) $2t + 10$ d) $6t - 2$

59. Una partícula se mueve conforme a la curva $s = 5t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ ¿Cuál es la función que describe la aceleración instantánea?

a) $t - 4$ b) $30t - 4$ c) $30t^2 + 4$ d) $t + 4$

60. La posición de una partícula esta dada por $s = 4 + 12t^2 - 2t^3$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la aceleración instantánea sea cero?

a) 5s b) 4s c) 2s d) 1s

61. La posición de una partícula esta dada por $s = t^3 - 2t^2 - 5t + 10$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la aceleración instantánea sea cero?

a) 4s b) 3s c) 1.66s d) 0.66s

62. La posición de una partícula esta dada por $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + 9$, donde "s" esta dada en metros y "t" en segundos. ¿Qué tiempo transcurre para que la aceleración instantánea sea cero?

a) 10s b) 5s c) 4s d) 2s

63. La ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = 2x^2 + x - 5$ en el punto $(1, -2)$, es:

a) $5x + y - 7 = 0$
$x + 5y - 9 = 0$
b) $5x - y - 7 = 0$
$x + 5y + 9 = 0$
c) $5x - y + 7 = 0$
$x - 5y + 9 = 0$
d) $x - 5y - 7 = 0$
$-x + 5y + 9 = 0$

64. La ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = x^3 - x$ en el punto $(-1, 0)$, es:

a) $2x + y + 2 = 0$
$x - 2y + 1 = 0$
b) $2x - y - 2 = 0$
$x + 2y + 2 = 0$
c) $2x - y + 2 = 0$
$x + 2y + 1 = 0$
d) $x - 2y + 2 = 0$
$x - 2y - 1 = 0$

65. Una función tiene un mínimo en el punto $P(x_1, y_1)$ si la pendiente de su recta tangente:

a) Es negativa después del punto.
b) Es positiva antes del punto.
c) Pasa de ser negativa antes del punto a positiva después del punto.
d) Es mayor que x_1

66. ¿Cuál es el punto mínimo de la función $y = x^2 - 2x - 8$?

a) $(-1, 9)$ b) $(1, -9)$ c) $(1, 9)$ d) $(-1, -9)$

67. El punto máximo de la función $y = -x^2 + 8x - 15$, es:

a) $(-1, -4)$ b) $(1, 4)$ c) $(4, 1)$ d) $(-4, -1)$

68. El punto máximo de la función $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 8$, es:

a) $(-3, 1)$ b) $(1, 3)$ c) $(-4, 1)$ d) $(-3, -1)$

69. ¿Cuál es el punto mínimo de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 46$?

a) $(-2, -2)$ b) $(2, 2)$ c) $(-2, 2)$ d) $(1, -2)$

70. El punto mínimo de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 29$, es:

a) (3, – 4) b) (–1, 2) c) (3, 2) d) (–3, – 2)

71. ¿Cuál es el punto máximo de la función $f(x) = 2x^3 + 18x^2 + 30x - 51$?

a) (5, – 1) b) (– 5, – 2) c) (– 5, 2) d) (– 5, – 1)

72. La función $f(x) = x^2 - 4$ es creciente en el intervalo:

a) $(-\infty, 0)$ b) $(-\infty, \infty)$ c) $(0, \infty)$ d) $[0, -\infty)$

73. La función $f(x) = 3 + 2x - x^2$ es decreciente en el intervalo:

a) $(-\infty, 1)$ b) $(1, \infty)$ c) $[0, \infty)$ d) $(1, -\infty)$

74. La función $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ es creciente en el intervalo:

a) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ b) $[-2, 1)$ c) $(-2, 1)$ d) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

75. Si $y = 4x^4 + 5x^3 - 2x - 12$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, es:

a) $48x^2 + 30x$ b) $48x^2 - 30x$ c) $48x^2 + 15x$ d) $16x^2 + 30x$

76. Si $y = x^3 - x^2 + 3x$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, es:

a) $6x + 2$ b) $x - 2$ c) $6x^2 - 2x$ d) $6x - 2$

77. La segunda derivada de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 7x + 5$, es:

a) $5x^3 - 4x^2 + 3x$ b) $5x^3 + 4x^2 + 3x$ c) $5x^3 - 4x^2 - 3x$ d) $x^3 - 4x^2 + 3x$

78. La tercera derivada de la función $y = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$, es:

a) $\frac{72}{x^5} - \frac{6}{x^4}$ b) $-\frac{72}{x^5} + \frac{6}{x^4}$ c) $-\frac{72}{x^5} - \frac{6}{x^4}$ d) $-\frac{18}{x^5} - \frac{6}{x^4}$

79. Si $y = \sqrt{5 - x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, es:

a) $\frac{1}{4\sqrt{(5-x)^3}}$ b) $-\frac{1}{4\sqrt{(5-x)^3}}$ c) $-\frac{1}{\sqrt{(5-x)^3}}$ d) $-\frac{4}{\sqrt{(5-x)^3}}$

80. El punto de inflexión de la función $f(x) = 2x^3 + 18x^2 + 30x - 20$, es:

a) (–3, – 2) b) (3, – 2) c) (– 3, 2) d) (3, 2)

81. El punto de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 29$, es:

a) (–3, – 2) b) (1, – 18) c) (1, 18) d) (18,–1)

82. La suma de dos números es 20 y su producto es máximo. La función a maximizar, es:

a) $P(x) = x(20 + x)$ b) $P(x) = x(20 - x)$ c) $P(x) = x(x - 20)$ d) $P(x) = (x + 20)(x - 20)$

83. La suma de un número y su recíproco es mínima. La función a minimizar, es:

a) $S(x) = \frac{1}{x} - x$ b) $S(x) = x - \frac{1}{x}$ c) $S(x) = x + \frac{1}{x}$ d) $S(x) = x + \frac{1}{-x}$

84. El punto que pertenece a la recta $y = x - 2$, que esta más cerca del punto (1, 1), es:

a) (1, – 1) b) (0, – 2) c) (2, 0) d) (3, 1)

85. ¿Cuál es el mayor perímetro de un rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio 5 cm?

a) 20 cm b) $10\sqrt{5}$ cm c) 40 cm d) $20\sqrt{5}$ cm

86. Una hoja cuadrada de metal se dilata con el calor. Si uno de sus lados aumenta a razón de 0.03 cm por segundo ¿Con que rapidez aumenta el área de la hoja de metal cuando su lado es de 22 cm?

a) 1.32 cm^2/seg b) – 1.32 cm^2/seg c) 0.66 cm^2/seg d) 0.73 cm^2/seg

87. Una pelota se infla a razón de 0.2 cm^3/seg, ¿a que rapidez aumenta su radio cuando este mide 12 cm?

a) $\frac{1}{240\pi}$ cm/seg b) $\frac{\pi}{2880}$ cm/seg c) $\frac{1}{2880\pi}$ cm/seg d) $\frac{\pi}{240}$ cm/seg

88. Un tanque de agua tiene la forma de cilindro recto y se llena a razón de 0.6 m^3/min. El radio es la tercera parte de su altura, ¿A que rapidez sube la superficie del agua, cuando alcanza una altura de 2.4 m del tanque?

a) $\frac{5\pi}{16}$ m/min b) $\frac{16\pi}{5}$ m/min c) $\frac{16}{5\pi}$ m/min d) $\frac{5}{16\pi}$ m/min

89. La derivada de la función $y = \cos x^2$,es:

a) $-2x\text{sen}x$ b) $x\text{sen}x^2$ c) $-2x\text{sen}x^2$ d) $-2\text{sen}x^2$

90. La derivada de la función $y = \text{sen}(1 - 3x^2)$, es:

a) $-6x\cos(1 - 3x^2)$ b) $x^2\cos(1 - 3x^2)$ c) $-6\cos(1 - 3x^2)$ d) $-6x\cos(1 + 3x^2)$

91. La derivada de la función $y = \tan x$, es:

a) $\sec^2 x$ b) $-\sec^2 x$ c) $\sec x^2$ d) $x\sec^2 x$

92. La derivada de la función $y = 5\text{sen}2x^3$, es:

a) $-30x^2\cos 2x^3$ b) $30x\cos 2x^3$ c) $x^2\cos 2x^3$ d) $30x^2\cos 2x^3$

93. La derivada de la función $y = 4\tan(9 - 4x^2)$, es:

a) $-32x\sec(9 - 4x^2)$ b) $-x\sec^2(9 - 4x^2)$ c) $32x\sec^2(9 - 4x^2)$ d) $-32x\sec^2(9 - 4x^2)$

94. La derivada de la función $y = \csc 3x^4$, es:

a) $12x^3\csc 3x^4\cot 3x^4$ b) $-12x^3\csc 3x^4\cot 3x^4$ c) $-12x^3\csc x^4\cot 3x^4$ d) $x^3\csc 3x^4\cot 3x^4$

95. La derivada de la función $y = \cos(x^3 - 2x)$, es:

a) $(2 + 3x^2)\cos(x^3-2x)$ b) $(2 - 3x^2)\text{sen}(x^3-2x)$ c) $(2 - 3x^2)\cos(x^3-2x)$ d) $(2 - 3x^2)\text{sen}^2(x^3-2x)$

96. La derivada de la función $y = \sec x^2$, es:

a) $2x\sec x^2\tan x$ b) $2x\sec x^2\tan x^2$ c) $2\sec x^2\tan x^2$ d) $-2x\sec x^2\tan x^2$

97. La derivada de la función $y = \sqrt{1+\cos x^2}$, es:

a) $-\frac{x\,\text{sen}x^2}{\sqrt{1+\cos x^2}}$ b) $-\frac{\text{sen}x^2}{\sqrt{1+\cos x^2}}$ c) $\frac{x\,\text{sen}x^2}{\sqrt{1+\cos x^2}}$ d) $\frac{x\,\text{sen}x}{\sqrt{1+\cos x^2}}$

98. La derivada de la función $y = e^{1-2x}$, es:

a) $-e^{1-2x}$ b) $-2e^{1-2x}$ c) $-2e^{1+2x}$ d) $2e^{1-2x}$

99. La derivada de la función $y = 4e^{5x}$, es:

a) $20e^{5x}$ b) $-20e^{5x}$ c) $20e^{-5x}$ d) $2e^{x}$

100. La derivada de la función $y = x^2 + \cos x - e^x$, es:

a) $2x - \text{sen}x - 2e^x$ b) $2x + \text{sen}x - e^x$ c) $2x - \text{sen}x - e^x$ d) $2x - \text{sen}x + e^x$

101. La derivada de la función $y = x^2e^{4x}$, es:

a) $2xe^{4x}(2x-1)$ b) $2xe^{4x}(2x+1)$ c) $xe^{4x}(2x+1)$ d) $2e^{4x}(2x+1)$

102. La derivada de la función $y = e^{\tan 2x}$, es:

a) $2\sec^2 2xe^{\tan x}$ b) $2\sec^2 xe^{\tan 2x}$ c) $\sec^2 2xe^{\tan 2x}$ d) $2\sec^2 2xe^{\tan 2x}$

103. La derivada de la función $y = e^{x^2-3}$, es:

a) e^{x^2-3} b) $2e^{x^2-3}$ c) $2xe^{x^2-3}$ d) $3xe^{x^2-3}$

104. La derivada de la función $y = 2^{5-x}$, es:

a) $2^{5-x}\ln 2$ b) $-2^{5-x}\ln 2$ c) $-2^{5+x}\ln 2$ d) $-2^{x-5}\ln 2$

105. La derivada de la función $y = 3^{\text{sen}x}$, es:

a) $\cos x\, 3^{\text{sen}x}\ln 3$ b) $\text{sen}x\, 3^{\text{sen}x}\ln 3$ c) $\cos x\, 3^{\text{sen}x}$ d) $\cos x\, 3^{\cos x}\ln 3$

106. La derivada de la función $y = \text{arc}\cos x$, es:

a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ d) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

107. La derivada de la función $f(x) = \text{arc}\tan x^2$, es:

a) $\frac{2x}{1+x^4}$ b) $\frac{2x}{1+x^2}$ c) $\frac{2x}{1+4x^4}$ d) $\frac{x^2}{1+x^4}$

108. La derivada de la función $f(x) = \text{arc}\cos(\text{sen}\,x)$, es:

a) -1 b) 1 c) 2 d) -2

109. La diferencial de la función $y = (3x^2 + 5x)^3$, es:

a) $3(6x+5)^2dx$ b) $(6x+5)^2\,dx$ c) $3(3x^2+5x)^2dx$ d) $(18x+15)(3x^2+5x)^2dx$

110. La diferencial de la función $f(x) = \text{sen}\,2x$, es:

a) $2\cos 2xdx$ b) $\cos 2xdx$ c) $4\,\text{sen}\,2x\cos 2xdx$ d) $2\,\text{sen}2xdx$

111. La diferencial de la función $f(x) = e^{3x}$, es:

a) $3e^{3x}dx$ b) $e^{3x}dx$ c) $e^{3x-1}dx$ d) $e^{2x}dx$

112. La derivada de la función $y = \ln(4x-3)$, es:

a) $\frac{4}{x-3}$ b) $\frac{1}{4x-3}$ c) $\frac{4}{4x-3}$ d) $-\frac{4}{4x-3}$

113. La derivada de la función $y = 9\ln(x^2 - 4)$, es:

a) $-\frac{18x}{x^2-4}$ b) $-\frac{10x}{x^2-4}$ c) $\frac{10}{x^2-4}$ d) $\frac{18x}{x^2-4}$

114. La derivada de la función $y = \ln e^x$, es:

a) 1 b) e^x c) $-e^x$ d) -1

5 Cálculo integral

Propósito: al término de la unidad el alumno conocerá los conceptos básicos sobre funciones, resolverá integrales y sus aplicaciones.

Antiderivadas e integral indefinida

Una función F(x) se denomina antiderivada de la función f(x) en un intervalo [a, b] si F'(x) = f(x) para todo valor de $x \in [a, b]$.

Ejemplo 1

¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de f(x) = 2x – 3?

a) $x^2 + 3x + C$ b) $2x - 3 + C$ c) $x^2 - 3x + C$ d) $2x + 3 + C$

Solución:

Cada una de las funciones se deriva para comprobar que es la antiderivada de f(x) = 2x – 3,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + C) = 2x + 3, \text{ no es la antiderivada,}$$

$$\frac{d}{dx}(2x - 3 + C) = 2, \text{ no es la antiderivada,}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + C) = 2x - 3, \text{ es la antiderivada,}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

La antiderivación

Es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada, el símbolo $\int$ (integral), denota la operación de antiderivada o integral indefinida y se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde: F'(x) = f(x) y C: constante de integración.

Integral inmediata

1) $\int dx = x + C$

2) $\int a\,dx = a\int dx$

3) $\int (u + v - w)dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx$

4) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5) $\int \text{sen}x\,dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$

Ejemplo 1

La integral $\int x^2 dx$ es:

a) $\frac{2x}{3} + C$ b) $x^3 + C$ c) $\frac{x^3}{3} + C$ d) $\frac{x^2}{3} + C$

Solución:

Aplicando la integral $\int x^n dx$, se obtiene,

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Ejemplo 2

La integral $\int (2x+5)dx$ es:

a) $x^2 + 5 + C$ b) $2x^2 + 5x + C$ c) $2x + 5 + C$ d) $x^2 + 5x + C$

Solución:

Aplicando las fórmulas…

$$\int (2x+5)dx = \int 2xdx + \int 5dx = 2\int xdx + 5\int dx = 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + 5x + C = \frac{2x^2}{2} + 5x + C = x^2 + 5x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 3

La integral $\int x(3x+1)^2 dx$ es:

a) $\frac{9x^4}{4} + 2x^3 + \frac{x^2}{2} + C$ b) $\frac{x^2(3x+1)^3}{6} + C$ c) $\frac{9x^4}{4} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + C$ d) $\frac{x^2(3x+1)^3}{3} + C$

Solución:

Se desarrolla la multiplicación para después integrar

$$\int x(3x+1)^2 dx = \int x(9x^2+6x+1)dx = \int (9x^3+6x^2+x)dx = \int 9x^3dx + \int 6x^2dx + \int xdx$$

$$= 9\int x^3dx + 6\int x^2dx + \int xdx$$

$$= 9\left(\frac{x^4}{4}\right) + 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{9x^4}{4} + 2x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 4

La integral $\int (4\text{sen}x + 5\cos x)dx$ es:

a) $4\cos x + 5\text{sen}x + C$ c) $4\text{sen}x + 5\cos x + C$

b) $4\text{sen}x - 5\cos x + C$ d) $-4\cos x + 5\text{sen}x + C$

Solución:

$$\int (4\text{sen}x + 5\cos x)dx = \int 4\text{sen}xdx + \int 5\cos xdx = 4\int \text{sen}xdx + 5\int \cos xdx = 4(-\cos x) + 5(\text{sen}x) + C$$

$$= -4\cos x + 5\text{sen}x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Integral definida

Suma

La suma,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

se representa utilizando el símbolo $\sum$ de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Ejemplo 1

El resultado de $\sum_{i=1}^{4} i^3$ es:

a) 80 b) 100 c) 90 d) 110

Solución:

Se sustituye i por los valores de 1 a 4, se eleva cada uno de ellos al cubo y se suman los resultados.

$$\sum_{i=1}^{4} i^3 = (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 + (4)^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$\sum_{i=1}^{4} i^3$ =100, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Propiedades de las sumatorias

1) $\sum_{i=a}^{n} k = (n - a + 1)k$

2) $\sum_{i=a}^{n} [f(i) + g(i)] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$

3) $\sum_{i=a}^{n} c\,f(i) = c\sum_{i=a}^{n} f(i)$

4) $\sum_{i=1}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$

Ejemplo 2

Al resolver $\sum_{i=2}^{5} 4$ se obtiene:

a) 20 b) 12 c) 16 d) 25

Solución:

Aplicando las propiedades de las sumatorias, se obtiene:

$$\sum_{i=2}^{5} 4 = (5 - 2 + 1)4 = 16$$

$\sum_{i=2}^{5} 4$ = 16, por tanto, el resultado corresponde al inciso c.

Ejemplo 3

Usando la fórmula $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ el resultado de $\sum_{i=1}^{10} i^2$ es:

a) 385 b) 380 c) 360 d) 375

Solución:

Se sustituye n = 10 en $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ de lo cual se obtiene

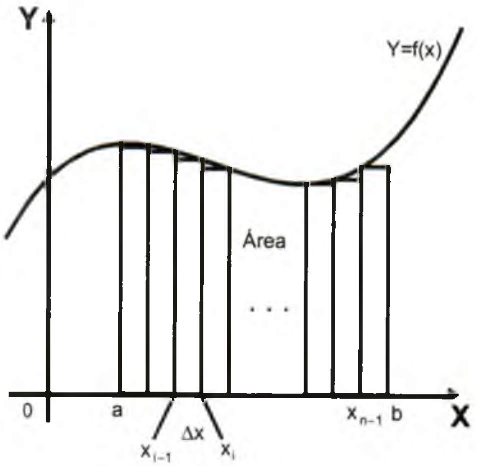
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{10(10+1)(2(10)+1))}{6} = \frac{10(11)(21)}{6} = \frac{2310}{6} = 385$$

$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$, por tanto, el resultado es el inciso "a".

Integral definida como el límite de una suma (Suma de Riemann)

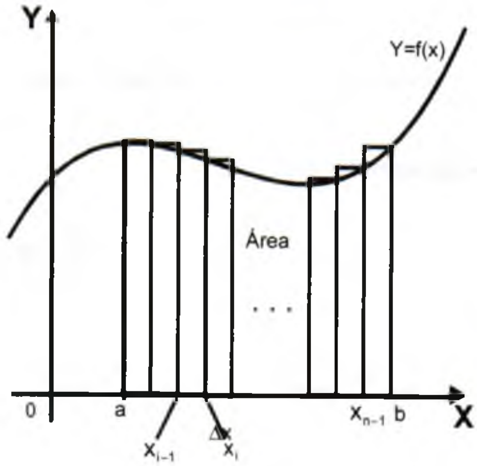
Sea una función definida en el intervalo $[a,b]$, el área "A" bajo la gráfica f(x) en el intervalo dado, se puede obtener al realizar estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra:

Rectángulos inscritos
Sumas inferiores



$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+(i-1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos
Sumas superiores



$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+i\Delta x)$$

donde, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Sumatorias básicas

1) $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

Ejemplo:

El área limitada por la curva $f(x) = x^2$ y el eje X en el intervalo $[1, 3]$ utilizando sumas superiores es:

a) 26 b) 3 c) $\frac{26}{3}$ d) $\frac{27}{2}$

Solución:

Se sustituye en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$

donde, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

$a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2i}{n}$

$$f(a+i\Delta x) = f\left(1+\frac{2i}{n}\right) = \left(1+\frac{2i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{4i^2}{n^2} + \frac{4i}{n} + 1 \qquad A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

por tanto,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}+\frac{4i}{n}+1\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^2}{n^3}+\frac{8i}{n^2}+\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{8i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}+\frac{2}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{26}{3}+\frac{8}{n}+\frac{4}{3n^2}\right) = \frac{26}{3}\ u^2$$

El área es $A = \frac{26}{3}\ u^2$, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Integral definida

Sea y = f(x) una función continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida de f(x) de "a" a "b" es:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 1

El valor de la integral definida $\int_0^3 x^3 dx$ es:

a) $-\frac{81}{4}$ b) 3 c) – 3 d) $\frac{81}{4}$

Solución:

$$\int_0^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \left[\frac{(3)^4}{4}\right] - \left[\frac{(0)^4}{4}\right] = \frac{81}{4} - \frac{0}{4} = \frac{81}{4}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El valor de la integral definida $\int_0^4 (x-1)^2 dx$ es:

a) $-\frac{26}{3}$ b) $\frac{28}{3}$ c) $\frac{26}{3}$ d) $-\frac{28}{3}$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$ donde v = x – 1 y dv = dx, entonces:

$$\int_0^4 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^4 = \frac{(4-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3} = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El valor de la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{senx}dx$, es:

a) 1 b) 2 c) – 1 d) – 2

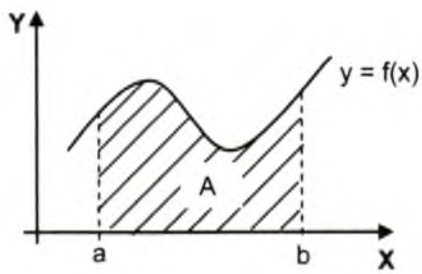
Solución:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{senx}dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = (-0) - (-1) = 0 + 1 = 1$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Aplicaciones de la integral definida

- **Área bajo la curva**



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 1

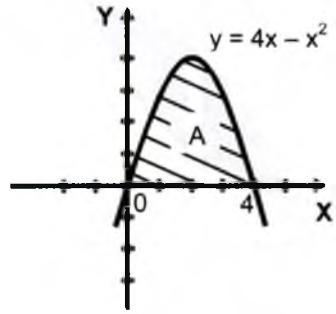
El área formada por la curva $y = 4x - x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$ es:

a) $\frac{64}{3}u^2$ b) $\frac{32}{3}u^2$ c) $\frac{16}{3}u^2$ d) $\frac{8}{3}u^2$

Solución:

El área está dada por:

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)dx$$



al resolver la integral definida se obtiene,

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3}\right] - \left[2(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}u^2.$$

El área es $\frac{32}{3}u^2$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

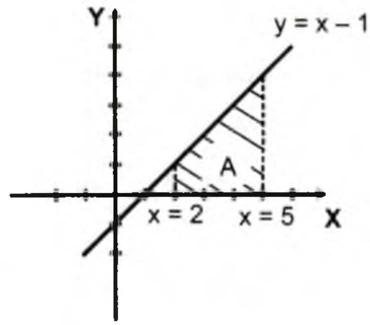
El área formada por la recta $y = x - 1$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 5$ es:

a) $\frac{35}{2}u^2$ b) $\frac{25}{2}u^2$ c) $\frac{15}{2}u^2$ d) $10u^2$

Solución:

El área está dada por:

$$A = \int_2^5 (x - 1)dx$$



al resolver la integral definida, se obtiene,

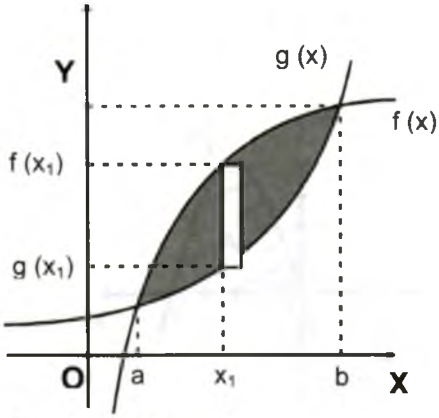
$$\int_2^5 (x - 1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_2^5 = \left[\frac{(5)^2}{2} - 5\right] - \left[\frac{(2)^2}{2} - 2\right]$$

$$= \frac{25}{2} - 5 - 2 + 2 = \frac{15}{2}u^2.$$

El área es $\frac{15}{2}u^2$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

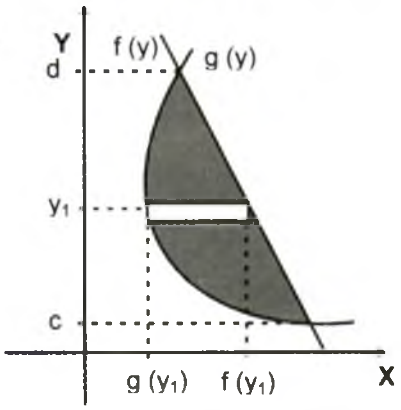
Área entre curvas planas

Rectángulos de base dx
El área comprendida entre las curvas f(x) y g(x), tomando rectángulos de base dx, está definida como:



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Rectángulos de base dy
El área comprendida entre las curvas f (y) y g (y), tomando rectángulos de base dy, se define como:



$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

Es conveniente graficar las funciones para determinar la fórmula que se debe utilizar.

Ejemplo 1

Obtén el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $4x + y - 6 = 0$

Solución:

a) $A = \frac{15}{24}u^2$ b) $A = \frac{135}{24}u^2$ c) $A = \frac{125}{24}u^2$ d) $A = \frac{7}{24}u^2$

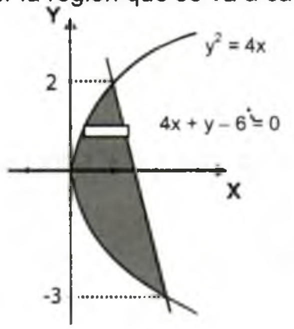
Se determinan los límites de integración, para ello se resuelve el sistema de ecuaciones entre las curvas dadas. De cada ecuación se despeja "x" y se igualan las expresiones.

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6 - y}{4}$$

Se resuelve la ecuación obtenida.

$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y + 3)(y - 2) = 0$$
$$y = -3;\ y = 2$$

Se grafican las curvas para saber la región que se va a calcular y además se elige el tipo de rectángulos.



Se observa que

$$f(y) = \frac{6-y}{4}$$

y

$$g(y) = \frac{y^2}{4}$$

La gráfica nos indica que se deben de elegir rectángulos de base dy.

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2}[f(y) - g(y)]dy = \int_{-3}^{2}\left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_{-3}^{2}\left(6 - y - y^2\right)dy = \frac{1}{4}\left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{6}\right)$$

$$= \frac{125}{24}u^2$$

Finalmente, tenemos que, el área comprendida por las curvas es $\frac{125}{24}u^2$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso c.

Ejemplo 2

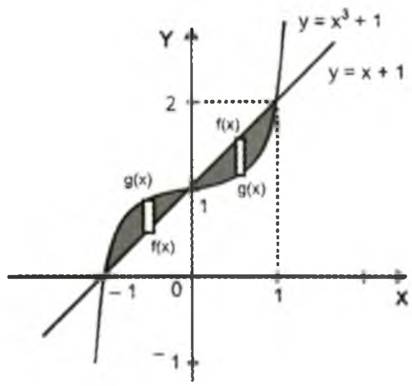
Determina el área entre las curvas $y = x^3 + 1$ y $x - y + 1 = 0$

a) $A = \frac{4}{4}u^2$ b) $A = \frac{1}{2}u^2$ c) $A = \frac{1}{3}u^2$ d) $A = 2u^2$

Solución:

Para determinar los límites de integración se resuelve un sistema de ecuaciones entre las curvas dadas, en este ejemplo, los puntos de intersección son: $P_1(-1, 0)$, $P_1(0, 1)$ y $P_1(1, 0)$,

Se obtiene la gráfica para conocer las superficies que se van a calcular y tener los límites de integración.



Para determinar el área, se identifica el tipo de rectángulos, en este ejemplo se eligen rectángulos de base "dx", es decir, rectángulos verticales.

Al aplicar la fórmula se obtiene:

Área = $\int_{-1}^{0}[f(x)-g(x)]dx + \int_{0}^{1}[g(x)-f(x)]dx$ siendo $g(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x + 1$

$$= \int_{-1}^{0}[(x^3+1)-(x+1)]dx + \int_{0}^{1}[(x+1)-(x^3+1)]dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^3-x)dx + \int_{0}^{1}(x-x^3)dx$$

Pero $\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx = -\int_{0}^{1}(x^3-x)dx = \int_{0}^{1}(x-x^3)dx$, entonces,

Área = $\int_{0}^{1}(x-x^3)dx + \int_{0}^{1}(x-x^3)dx = 2\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left[\frac{(1)^2}{2}-\frac{(1)^4}{4}\right] = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u^2$$

Finalmente, el área comprendida entre las curvas es $\frac{1}{2}u^2$

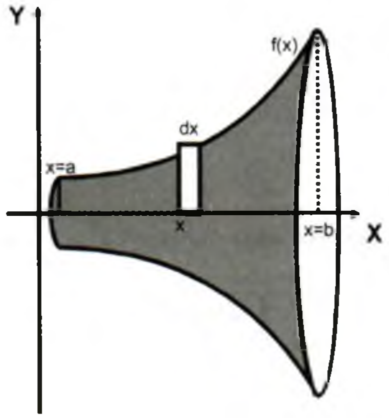
Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso b.

Volumen

Método de discos

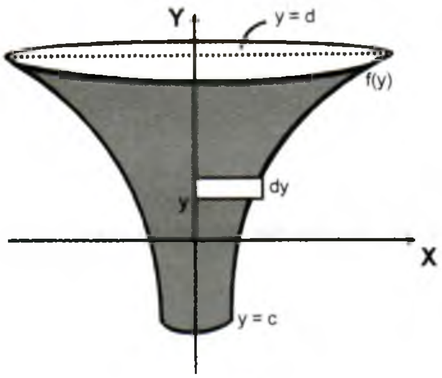
Este método se utiliza cuando el eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

El eje X como eje de rotación



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

El eje Y como eje de rotación



$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el volumen que se genera al hacer girar la región dada por $y = \sqrt{x}$, y la recta $x = 4$ en torno al eje "X"?

a) $4\pi\ u^3$ b) $8\pi\ u^3$ c) $6\pi\ u^3$ d) $10\pi\ u^3$

Solución:

Al sustituir $y = \sqrt{x}$, $a = 0$, $b = 4$ en $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ se obtiene,

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \left.\frac{\pi x^2}{2}\right|_0^4 = \frac{\pi(4)^2}{2} - \frac{\pi(0)^2}{2} = \frac{16\pi}{2} - \frac{0}{2} = 8\pi\ u^3$$

$V = 8\pi\ u^3$, por tanto, la respuesta correcto corresponde al inciso "b".

► **Longitud de arco**

Si f '(x) es continua en el intervalo [a, b], la longitud de la curva f(x) en $a \le x \le b$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Si la curva es x = h(y), entonces la longitud de la curva está dada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[h'(y)]^2}\, dy$$

Ejemplo 1

La integral que se utiliza para encontrar la longitud del arco de la curva $y = x^2$, $2 \le x \le 4$ es:

a) $\int_2^4 \sqrt{1+x^2}\,dx$ b) $\int_2^4 \sqrt{1+2x^2}\,dx$ c) $\int_2^4 \sqrt{1+4x}\,dx$ d) $\int_2^4 \sqrt{1+4x^2}\,dx$

Derivando la función:

$$y' = 2x$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

La integral definida que se utiliza para encontrar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $x = y^{\frac{3}{2}}$ entre los puntos (0, 0) y (64, 16) es:

a) $\frac{1}{2}\int_0^{16} \sqrt{4+9y}\,dy$ b) $\frac{1}{2}\int_0^{16} \sqrt{4+9y^2}\,dy$ c) $\int_0^{16} \sqrt{4+9y}\,dy$ d) $\int_0^{16} \sqrt{4+9y^2}\,dy$

Solución:

Derivando con respecto a "y" se obtiene,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

sustituyendo en la fórmula,

$$L = \int_0^{16} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\,dy = \int_0^{16} \sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{16} \sqrt{4+9y}\,dy$$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso a.

Métodos de integración

Integración por cambio de variable

1) $\int v^n dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + C$ 3) $\int a^v dv = \dfrac{a^v}{\ln a} + C$ 5) $\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + C$

2) $\int \dfrac{dv}{v} = \ln |v| + C$ 4) $\int e^v dv = e^v + C$ 6) $\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C$

Ejemplo 1

La integral $\int 2(2x+1)^3 dx$ es:

a) $(2x+1)^4 + C$ b) $\dfrac{(2x+1)^4}{4} + C$ c) $\dfrac{(2x+1)^3}{3} + C$ d) $\dfrac{(2x+1)^2}{2} + C$

Solución:

Se utiliza la fórmula $\int v^n dv$ donde,

$$v = 2x + 1 \quad y \quad dv = 2dx$$

se realiza el cambio de variable,

$$\int 2(2x+1)^3 dx = \int (2x+1)^3 2dx = \int v^3 dv = \frac{v^4}{4} + C = \frac{(2x+1)^4}{4} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La integral $\int (3x^2+5x)^4 (6x+5) dx$ es:

a) $\dfrac{(3x^2+5x)^5 (6x+5)^2}{5} + C$ b) $4(3x^2+5x)^3 + C$ c) $\dfrac{(6x+5)^2}{2} + C$ d) $\dfrac{(3x^2+5x)^5}{5} + C$

Solución:

Se utiliza la fórmula $\int v^n dv$, donde,

$$v = 3x^2 + 5x \quad y \quad dv = (6x+5)dx$$

se realiza el cambio de variable:

$$\int (3x^2+5x)^4 (6x+5) dx = \int v^4 dv = \frac{v^5}{5} + C = \frac{(3x^2+5x)^5}{5} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

La integral $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$ es:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$ b) $2\operatorname{sen} x + C$ c) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$ d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{3} + C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$ donde,

$$v = \operatorname{sen} x \quad y \quad dv = \cos x\, dx$$

se realiza el cambio de variable:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \int v^2 dv = \frac{v^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

La integral $\int 3 \cdot 2^{3x} dx$ es:

a) $2^{3x} + C$ b) $2^{3x+1} + C$ c) $\frac{2^3}{\ln 2} + C$ d) $\frac{2^{3x}}{\ln 2} + C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int a^v dv$, donde,

$$v = 3x \quad y \quad dv = 3dx$$

se realiza el cambio de variable,

$$\int 3 \cdot 2^{3x} dx = \int 2^{3x} \cdot 3dx = \int 2^v dv = \frac{2^v}{\ln 2} + C = \frac{2^{3x}}{\ln 2} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 5

La integral $\int 2 \cdot e^{2x} dx$ es:

a) $e^{2x} + C$ b) $e^x + C$ c) $2e^{2x} + C$ d) $2e^{2x+1} + C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int e^v dv$, donde,

$$v = 2x \quad y \quad dv = 2dx$$

se realiza el cambio de variable,

$$\int 2 \cdot e^{2x} dx = \int e^{2x} \cdot 2dx = \int e^v dv = e^v + C = e^{2x} + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 6

La integral $\int 5\text{sen}(5x-3)dx$ es:

a) – sen (5x – 3) + C b) – cos (5x – 3) + C c) cos (5x – 3) + C d) sen (5x – 3) + C

Solución:

Se aplica la fórmula $\int \text{sen}v\, dv$, donde,

$$v = 5x - 3 \quad y \quad dv = 5dx$$

se realiza el cambio de variable,

$$\int 5\text{sen}(5x-3)dx = \int \text{sen}(5x-3) \cdot 5dx = \int \text{sen}v\, dv = -\cos v + C = -\cos(5x-3) + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

En todos los casos anteriores al obtener la diferencial, ésta, se tenía en la integral, sin embargo, en algunas integrales se tiene que completar la diferencial para poder aplicar la fórmula.

Ejemplo 7

La integral $\int(3x+1)^2dx$ es:

a) $\dfrac{(3x+1)^3}{3}+C$ b) $2(3x+1)+C$ c) $\dfrac{(3x+1)^3}{9}+C$ d) $\dfrac{(3x+1)}{3}+C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$ donde,

$$v = 3x + 1 \qquad y \qquad dv = 3dx$$

la diferencial es 3dx, entonces se completa la integral,

$$\int(3x+1)^2dx = \int(3x+1)^2\cdot\frac{1}{3}(3dx) = \frac{1}{3}\int(3x+1)^2\cdot 3dx$$

se realiza el cambio de variable,

$$\frac{1}{3}\int(3x+1)^2\cdot 3dx = \frac{1}{3}\int v^2dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{v^3}{3}+C = \frac{v^3}{9}+C = \frac{(3x+1)^3}{9}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 8

La integral $\int\left(x^2+3\right)^5 xdx$ es:

a) $\dfrac{\left(x^2+3\right)^6}{6}+C$ b) $\dfrac{x\left(x^2+3\right)^6}{12}+C$ c) $\dfrac{x\left(x^2+3\right)^6}{6}+C$ d) $\dfrac{\left(x^2+3\right)^6}{12}+C$

Solución:

Se aplica la fórmula $\int v^n dv$, donde,

$$v = x^2 + 3 \qquad y \qquad dv = 2xdx$$

se completa la integral,

$$\int\left(x^2+3\right)^5 xdx = \int\left(x^2+3\right)^5\cdot\frac{1}{2}(2xdx) = \frac{1}{2}\int\left(x^2+3\right)^5(2xdx)$$

se realiza el cambio de variable,

$$\frac{1}{2}\int\left(x^2+3\right)^5(2xdx) = \frac{1}{2}\int v^5dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^6}{6}+C = \frac{v^6}{12}+C = \frac{\left(x^2+3\right)^6}{12}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 9

La integral $\int e^{5x}dx$ es:

a) $e^{5x}+C$ b) $\dfrac{1}{5}e^{5x}+C$ c) $\dfrac{1}{5}e^{x}+C$ d) $e^{x}+C$

Solución:

Aplicando la fórmula $\int e^v dv$, donde v = 5x y dv = 5dx, se completa la integral y se realiza el cambio de variable

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5dx = \frac{1}{5}\int e^v dv = \frac{1}{5}e^v+C = \frac{1}{5}e^{5x}+C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Integración por partes

Es uno de los métodos más usados para la resolución de una integral y se define por:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Donde la segunda integral es más sencilla de integrar, se aplica cuando se tiene:

- Una función algebraica por una función trascendente y no se pueda realizar por cambio de variable.
- Funciones que no existen fórmulas directas, como lo son las logarítmicas o inversas trigonométricas.

Ejemplo 1

La integral $\int xe^x dx$ es:

a) $xe^x + C$ b) $\frac{x^2}{2} + e^x + C$ c) $xe^x - e^x + C$ d) $\frac{x^2e^x}{2} + C$

Solución:

Se eligen "u" y "dv" de la siguiente manera y se obtienen "du" y "v" respectivamente

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^x dx = e^x$$

De acuerdo a la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La integral $\int x\text{sen}x dx$ es:

a) $-x\cos x + \text{sen }x + C$ b) $x\cos x + \text{sen }x + C$ c) $-x\text{ sen }x + \cos x + C$ d) $x\text{ sen }x - \cos x + C$

Solución:

Se eligen "u" y "dv" para obtener "du" y "v" respectivamente:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \text{sen}x\, dx \quad \rightarrow \quad v = \int \text{sen}x\, dx = -\cos x$$

De acuerdo a la fórmula:

$$\int x\text{sen}x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \text{sen }x + C$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

La integral $\int \ln x\, dx$ es:

a) $x\ln x + C$ b) $x(\ln x - 1) + C$ c) $x^2(\ln x + 1) + C$ d) $x\ln x - 1 + C$

Solución:

Se eligen u y dv: $u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$

$$dv = dx \quad \rightarrow \quad v = \int dx = x$$

Por tanto, $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Integración de potencias trigonométricas

- **Integrales de la forma** $\int \text{sen}^m v\, dv$, $\int \cos^n v\, dv$, **con n y m impar**

Identidades

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \quad ; \quad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

En aquellas integrales cuya función seno o coseno sea una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares sobrando siempre una lineal, la cual funcionará como diferencial; el resto se transforma utilizando las identidades.

Ejemplos:

1) Hallar el resultado de $\int \text{sen}^3 x\, dx$

Solución:

Se separa la potencia de la siguiente manera:

$$I = \int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x\, dx$$

Se sustituye $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, de esta forma:

$$v = \cos x \qquad dv = -\text{sen}\, x\, dx$$

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x\, \text{sen}\, x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\text{sen} x\, dx = \int \text{sen} x dx - \int \cos^2 x\, \text{sen} x dx$$

$$= -\cos x + \int v^2 dv$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}v^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

Por tanto, $I = \int \text{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.

2) Hallar el resultado de $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x}$

Solución:

$$I = \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = \text{sen}\, x$ y $dv = \cos x\, dx$,

$$I = \int \frac{(1 - v^2)dv}{v^4} = \int \frac{dv}{v^4} - \int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-4} dv - \int v^{-2} dv = \frac{v^{-3}}{-3} - \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3v^3} + \frac{1}{v} + C$$

Pero $v = \text{sen}\, x$, entonces,

$$I = \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \frac{1}{\text{sen} x} - \frac{1}{3\text{sen}^3 x} + C = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

por lo tanto,

$$I = \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

▶ **Integrales de la forma** $\int \tan^n v\, dv$, $\int ctg^n v\, dv$ **con n par o impar**

Identidades

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1; \quad ctg^2 x = \csc^2 x - 1$$

En este tipo de integrales se separa en potencias pares, y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva.

Ejemplos:

1) Hallar el resultado de $I = \int \tan^3 x\, dx$

Solución:

Se realiza la separación de la potencia:

$$I = \int tg^3 x\, dx = \int tg\, x\, tg^2 x\, dx$$

Se sustituye $tg^2 x = \sec^2 x - 1$

$$I = \int tg\, x(\sec^2 x - 1)dx = \int tg\, x \cdot \sec^2 x\, dx - \int tg\, x\, dx$$

Haciendo $v = tg\, x$, $dv = \sec^2 x\, dx$, para la primera integral

y la segunda integral es inmediata, entonces,

$$I = \int \tan^3 x\, dx = \int tg\, x \cdot \sec^2 x\, dx - \int tg\, x\, dx = \int v\, dv - \int tg\, x\, dx = \frac{v^2}{2} - (-\ln \cos x) + C$$

$$= \frac{1}{2} tg^2 x + \ln \cos x + C$$

▶ **Integrales de la forma** $\int \sec^n v\, dv$, $\int \csc^m dv$ **con n y m par**

Identidades

$$\sec^2 x = 1 + tg^2 x \quad ; \csc^2 x = 1 + ctg^2 x$$

En este tipo de integrales se separa en potencias pares, y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva.

Ejemplos:

1) Hallar el resultado de $\int \sec^4 x\, dx$

Solución:

$$I = \int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

Se realiza el cambio utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$,

$$I = \int (1 + tg^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Haciendo $v = tg\, x$ y $dv = \sec^2 x\, dx$ se obtiene:

$$I = \int (1 + v^2)dv = \int dv + \int v^2 dv = v + \frac{v^3}{3} + C$$

Pero $v = tg\, x$ entonces,

$$I = \int \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3} tg^3 x + tg\, x + C$$

▶ **Integrales de la forma $\int tg^m v \sec^n v\,dv$, $\int ctg^m v \csc^n v\,dv$ con n par y m par o impar**

Identidades

$$\sec^2 x - tg^2 x = 1;\ \csc^2 x - ctg^2 x = 1$$

Ejemplos:

1) Demostrar que $\int tg^2 x \sec^4 x\,dx = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x + C$

Solución:

En la integral la secante tiene potencia par, entonces se realiza la separación de una secante cuadrada y se sustituye por la identidad trigonométrica correspondiente.

$$I = \int tg^2 x \sec^4 x\,dx = \int tg^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx = \int tg^2 x(1+tg^2 x)\sec^2 x\,dx$$

Haciendo $v = tg\,x$ y $dv = \sec^2 x\,dx$, se obtiene

$$I = \int v^2(1+v^2)dv = \int(v^2+v^4)dv = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + C = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x + C$$

2) Obtener el resultado de $\int tg^3\frac{x}{4}\sec^3\frac{x}{4}dx$

Solución:

En la integral las potencias tanto de la tangente como de la secante son impares, por lo que la separación es para ambas funciones.

$$I = \int tg^3\frac{x}{4}\sec^3\frac{x}{4}dx = \int tg^2\frac{x}{4}\sec^2\frac{x}{4}tg\frac{x}{4}\sec\frac{x}{4}dx$$

Luego $tg^2\frac{x}{4} = \sec^2\frac{x}{4} - 1$, por tanto,

$$I = \int tg^2\frac{x}{4}\sec^2\frac{x}{4}tg\frac{x}{4}\sec\frac{x}{4}dx = \int\left(\sec^2\frac{x}{4} - 1\right)\sec^2\frac{x}{4}tg\frac{x}{4}\sec\frac{x}{4}dx$$

Haciendo $v = \sec\frac{x}{4}$ y $dv = \frac{1}{3}\sec\frac{x}{3}tg\frac{x}{3}dx$, se obtiene:

$$I = 4\int(v^2-1)v^2 dv = 4\int v^4 dv - 4\int v^2 dv = \frac{4}{5}v^5 - \frac{4}{3}v^3 + C$$

$$= \frac{4}{5}\sec^5\frac{x}{4} - \frac{4}{3}\sec^3\frac{x}{4} + C$$

► **Integrales de la forma $\int \text{sen}^m v\, dv$ y $\int \cos^n v\, dv$, con m y n par**

Identidades

$$\text{sen}v \cos v = \frac{1}{2}\text{sen } 2v \;;\; \text{sen}^2 v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2v \;;\; \cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

Ejemplos:

1) Obtener el resultado de $I = \int \text{sen}^2 x\, dx$

Solución:

Cuando las potencias de las funciones sen x y cos x son pares, se utilizan las fórmulas del doble de un ángulo, $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ sustituyendo e integrando se obtiene:

$$I = \int \text{sen}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}2x}{4} + C$$

2) Hallar el resultado de $I = \int \text{sen}^4 2x\, dx$

Solución:

$$I = \int \text{sen}^4 2x\, dx = \int (\text{sen}^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right)dx$$

Ahora se transforma la potencia par de cos 4x, utilizando la identidad:

$$\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

entonces,

$$I = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\ 8x\right)\right)dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right)dx$$

Integrando cada uno de los términos se obtiene

$$I = \int \text{sen}^4 2x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{\text{sen } 4x}{8} + \frac{\text{sen } 8x}{64} + C$$

► **Integrales de la forma**

a) $\int \text{sen } mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$

b) $\int \text{sen } mx\ \text{sen } nx\, dx = -\frac{\text{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C$

c) $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\text{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C$ **cuando $m \neq n$**

Ejemplo:

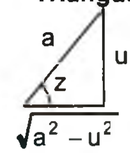
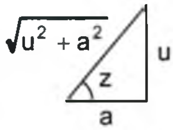
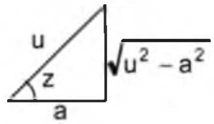
Hallar $I = \int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$

Solución:

$$I = \int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx = -\frac{\cos(2+4)x}{2(2+4)} - \frac{\cos(2-4)x}{2(2-4)} + C = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos(-2x)}{-4} + C = -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Integración por sustitución trigonométrica

Fórmulas de transformación

Caso	Cambio	Diferencial	Transformación	Triángulo
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a \operatorname{sen} z$	$du = a\cos z\, dz$	$\sqrt{a^2-u^2} = a\cos z$	
$\sqrt{u^2+a^2}$	$u = a\tan z$	$du = a\sec^2 z\, dz$	$\sqrt{u^2+a^2} = a\sec z$	
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a\sec z$	$du = a\tan z \sec z\, dz$	$\sqrt{u^2-a^2} = a\,\operatorname{tg} z$	

Ejemplos:

1) Obtener el resultado de $I = \int \frac{dy}{(y^2+7)^{\frac{3}{2}}}$

Solución:

Para resolver la integral, se utiliza el segundo caso y se hacen los cambios propuestos, entonces,

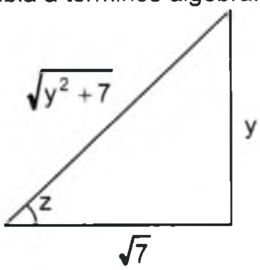
$$u^2 = y^2 \;\rightarrow\; u = y, \quad \text{luego} \quad a^2 = 7 \;\rightarrow\; a = \sqrt{7}$$

Cambiando los elementos, se sustituyen en la integral:

$$y = \sqrt{7}\tan z \qquad dy = \sqrt{7}\sec^2 z\, dz \qquad \sqrt{y^2+7} = \sqrt{7}\sec z$$

$$I = \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2+7}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{7}\sec^2 z\, dz}{(\sqrt{7}\sec z)^3} = \int \frac{dz}{7\sec z} = \frac{1}{7}\int \cos z\, dz = \frac{1}{7}\operatorname{sen} z + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces,



$$\operatorname{sen} z = \frac{y}{\sqrt{y^2+7}}$$

Por lo tanto,

$$I = \int \frac{dy}{(y^2+7)^{3/2}} = \frac{y}{7\sqrt{y^2+7}} + C$$

2) Obtener el resultado de $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$

Solución:

$u^2 = x^2 \rightarrow u = x \quad ; \quad a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

Para resolver la integral se aplica el tercer caso, por lo que los cambios se sustituyen en la integral:

$$x = 2\sec\theta \qquad dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

Entonces,

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{(2\sec\theta)^3(2\sec\theta\tan\theta)}{2\tan\theta}d\theta = \int 8\sec^4\theta d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\sec^2\theta d\theta$$

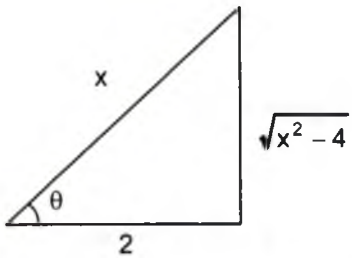
$$= 8\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta d\theta$$

$$= 8\int(\sec^2\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta)d\theta$$

$$= 8\left(\int\sec^2\theta d\theta + \int\tan^2\theta\sec^2\theta d\theta\right)$$

$$= 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



En el triángulo

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Por tanto,

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = 8\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + C$$

$$= 4\left(\sqrt{x^2-4}\right) + \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2+8)\sqrt{x^2-4}}{3} + C$$

Integración por descomposición de fracciones parciales

Integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde P(x) y Q(x) son polinomios tales que el grado de P(x) es menor que el grado de Q(x).

- **Caso I**

El denominador tiene sólo factores de primer grado que no se repiten.

A cada factor de la forma:

$$ax + b$$

Le corresponde una fracción de la forma

$$\frac{A}{ax+b}$$

Donde A es una constante por determinar.

Ejemplo

1) Obtener el resultado de $I = \int \frac{(4x-2)dx}{x^3 - x^2 - 2x}$

Solución:

Se factoriza el denominador,

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

se hace la equivalencia como sigue,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

se resuelve la fracción,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

luego, para que se cumpla la igualdad,

$$4x - 2 = A(x^2 - x - 2) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 2x)$$

se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$4x - 2 = x^2(A + B + C) + x(-A + B - 2C) - 2A$$

resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4, \\ -2A=-2 \end{cases}$$

la solución del sistema es: A = 1, B = 1, C = – 2, entonces,

$$I = \int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = \int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x-2} - 2\int\frac{dx}{x+1} = \ln|x| + \ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C$$

$$= \ln|x| + \ln|x-2| - \ln(x+1)^2 + C$$

se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión, por tanto,

$$I = \int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = \ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2} + C$$

► **Caso II**

Los factores del denominador son todos de primer grado y algunos se repiten

Si se tiene un factor de la forma $(ax + b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots\ldots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde A, B, C y Z son constantes.

Ejemplo:

1) Hallar el resultado de $I = \int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Solución:

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$3x^2 + 5x = x^2(A + C) + x(2A + B) + A - B - C$$

entonces se genera el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5 \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es: $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$ por tanto,

$$I = \int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|(x+1)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

Integrales binomiales

Integrales de la forma $\int \frac{\sqrt[m]{x}+\sqrt[n]{x}}{\sqrt[p]{x}}dx$

La integral se transforma en una más simple mediante un cambio de variable.

Este cambio está dado por:

$\mathbf{x = u^q}$ con **q** igual al m.c.m. de los índices de las raíces

Ejemplo 1

Dada $\int \frac{5dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$, ¿cuál es el cambio de variable que involucra ambos radicales?

a) $u = \sqrt{x}$ b) $u = x^6$ c) $u = x$ d) $u = \sqrt[5]{x}$ e) $u = \sqrt[6]{x}$

Solución:

El cambio de variable es $\mathbf{x = u^q}$, **con q = m.c.m.** de los índices del radical.

Luego el m.c.m. de los índices 2 y 3, el cual es 6, entonces el cambio será: $x = u^6$ o $u = \sqrt[6]{x}$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso e.

Ejemplo 2

Dada $\int \frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}dx$, ¿cuál es el cambio de variable que involucra a los radicales?

a) $x = u^6$ b) $u = x^5$ c) $x = u^2$ d) $x = u^{11}$ e) $x = u^3$

Solución:

El cambio de variable es $\mathbf{x = u^q}$, **con q = m.c.m.** de los índices del radical.

Luego el m.c.m. de los índices 2, 3 y 6 el cual es 6, entonces el cambio será: $x = u^6$ o $u = \sqrt[6]{x}$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el inciso a.

Ejemplo 3

Resolver la integral $\int \frac{\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$

a) $\frac{1}{5}x\sqrt[4]{x}+\frac{12}{3}x\sqrt[12]{x}+C$ b) $\frac{4}{5}x\sqrt[12]{x}+\frac{12}{13}x\sqrt[4]{x}+C$

c) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\frac{12}{13}x\sqrt[12]{x}+C$ d) $\frac{5}{4}x\sqrt[4]{x}+\frac{13}{12}x\sqrt[12]{x}+C$

e) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x}+\frac{12}{13}x\sqrt[12]{x}+C$

Solución:

Se obtiene el m.c.m. de los índices 2, 3 y 4, el cual es 12, entonces el cambio de variable es:

$$x = u^{12}$$

Luego si $x = u^{12}$, con $u = x^{\frac{1}{12}}$, entonces $dx = 12u^{11}du$

Los resultados se sustituyen en la integral original.

$$\int \frac{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx = \int \frac{(u^{12})^{\frac{1}{2}} + (u^{12})^{\frac{1}{3}}}{(u^{12})^{\frac{1}{4}}}dx = \int \frac{u^{\frac{12}{2}} + u^{\frac{12}{3}}}{u^{\frac{12}{4}}}(12u^{11})du = \int \frac{(u^6 + u^4)12u^{11}}{u^3}du$$

$$= \int (u^6 + u^4)12u^8 du$$

$$= 12\int (u^{14} + u^{12})du$$

$$= 12\left(\frac{u^{15}}{15} + \frac{u^{13}}{13}\right) + C$$

$$= \frac{4}{5}u^{15} + \frac{12}{13}u^{13} + C$$

Regresando a la variable "x"

$$= \frac{4}{5}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{15} + \frac{12}{13}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{13} + C$$

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + \frac{12}{13}x\sqrt[12]{x} + C$$

Finalmente, la respuesta correcta es el inciso c.

Ejemplo 4

Obtén la siguiente integral $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3}}{\sqrt[6]{x}}dx$

a) $\frac{3}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C$

b) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C$

c) $\frac{5}{7}x\sqrt{x} + \frac{4}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C$

d) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{3}{7}x\sqrt[3]{x} + C$

Solución:

El cambio de variable es $x = u^6$ ó $u = \sqrt[6]{x}$, entonces $dx = 6u^5du$

Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3}}{\sqrt[6]{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} dx = \int \frac{(u^6)^{\frac{1}{3}} + (u^6)^{\frac{3}{2}}}{(u^6)^{\frac{1}{6}}} (6u^5)du = \int \frac{(u^2 + u^9)(6u^5)}{u} du = 6\int u^4(u^2 + u^9)du$$

$$= 6\int (u^6 + u^{13})du$$

$$= 6\left(\frac{u^7}{7} + \frac{u^{14}}{14}\right) + C$$

$$= 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7} + \frac{(\sqrt[6]{x})^{14}}{14}\right) + C$$

$$= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C$$

Por consiguiente, la respuesta correcta es el inciso b.

Ejercicios

1. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$?

a) $x^3 + 2x^2 + x + C$ b) $x^3 + 2x^2 - x + C$ c) $x^3 + x^2 - x + C$ d) $2x^3 + 2x^2 - x + C$

2. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 2x - 1$?

a) $x^2 - 2x + C$ b) $x^2 + x + C$ c) $2x^2 - x + C$ d) $x^2 - x + C$

3. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $f(x) = 12x^2 - 2x + 6$?

a) $4x^3 - x^2 + 6x + C$ b) $4x^3 + x^2 + 6x + C$ c) $x^3 - x^2 + 6x + C$ d) $4x^3 - x^2 + x + C$

4. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $y = 1 - \cos x$?

a) $2x - \operatorname{sen} x + C$ b) $x + \operatorname{sen} x + C$ c) $x - \operatorname{sen} x + C$ d) $x^2 - \operatorname{sen} x + C$

5. ¿Cuál de las siguientes funciones es la antiderivada de $y = \dfrac{1}{x-4}$?

a) $\ln(x-4)^2 + C$ b) $\ln(x+4) + C$ c) $2\ln(x-4) + C$ d) $\ln(x-4) + C$

6. La sumatoria $\sum_{i=1}^{4} i^4$ se expresa como:

a) $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4$ b) $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4$ c) $(1 + 2 + 3 + 4)^4$ d) $1^4 + 4^4$

7. El desarrollo de la sumatoria $\sum_{i=1}^{3} \frac{i}{2}$, es:

a) $\frac{1}{2}(1-2-3)$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{2}$ c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 3$

8. Usando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, determinar el resultado de $\sum_{i=1}^{6} i$.

a) 15 b) 21 c) 28 d) 36

9. Determinar el valor de $\sum_{i=1}^{12} i^2$ usando la fórmula $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) 78 b) 385 c) 506 d) 650

10. Determinar el valor de $\sum_{i=1}^{5} i^3$ usando la fórmula $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

a) 36 b) 100 c) 225 d) 441

11. La respuesta de $\int 9dx$, es:

a) $9x + C$ b) $\frac{1}{9}x + C$ c) $x + C$ d) $-9x + C$

12. El resultado de $\int(x^2-5x+7)dx$,es:

a) $3x^3-5x^2+7x+C$ b) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x+C$ c) $\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+7x+C$ d) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-7x+C$

13. El resultado de $\int(4x^3+x^2-8x+12)dx$,es:

a) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+4x^2+12x+C$ b) $x^4+\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x+C$

c) $x^4-\frac{1}{3}x^3+4x^2+12x+C$ d) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-4x^2+2x+C$

14. El resultado de $\int\left(\frac{x^3-3x^2+12x}{x}\right)dx$,es:

a) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-12x+C$ b) $\frac{1}{3}x^3-2x^2+12x+C$

c) $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+12x+C$ d) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+12x+C$

15. El resultado de $\int(2x-5)(6-x)dx$,es:

a) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-30x+C$ b) $-\frac{2}{3}x^3-\frac{17}{2}x^2-30x+C$

c) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2+30x+C$ d) $-x^3+\frac{17}{2}x^2-x+C$

16. El resultado de $\int\frac{2\,\text{senx}}{5}dx$,es:

a) $\frac{2}{5}\cos x+C$ b) $-\frac{2}{5}\cos x+C$ c) $-\cos x+C$ d) $-\frac{2}{5}\text{senx}+C$

17. El resultado de $\int\frac{4}{\csc x}dx$,es:

a) $-\frac{1}{4}\text{senx}+C$ b) $-\frac{1}{4}\cos x+C$ c) $-\cos x+C$ d) $-4\cos x+C$

18. El resultado de $\int(3x^2-5\cos x)dx$,es:

a) $x^3-5\text{senx}+C$ b) $x^3+5\text{senx}+C$ c) $5x^3-\text{senx}+C$ d) $x^3-\text{senx}+C$

19. El resultado de $\int(7\cos x-\text{senx})dx$,es:

a) $7\text{senx}-\cos x+C$ b) $7\text{senx}+\cos x+C$ c) $\text{senx}+\cos x+C$ d) $\text{senx}+7\cos x+C$

20. El resultado de $\int \frac{2}{\sec x} dx$,es:

a) $-2\text{sen}x + C$ b) $2\text{sen}x + C$ c) $\text{sen}x + C$ d) $4\text{sen}x + C$

21. El resultado de $\int (x-4)^2\, dx$,es:

a) $(x-4)^3 + C$ b) $\frac{(x+4)^3}{3} + C$ c) $\frac{2(x-4)^3}{3} + C$ d) $\frac{(x-4)^3}{3} + C$

22. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_0^1 x^2 dx$?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 3

23. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_{-1}^{2} (x^2 - 1) dx$?

a) 10 b) 6 c) 4 d) 0

24. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_1^2 (1 - x^3) dx$?

a) $\frac{15}{4}$ b) $-\frac{11}{16}$ c) $-\frac{11}{4}$ d) $-\frac{7}{4}$

25. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_{-1}^{3} (x^3 - 1) dx$?

a) -5 b) 16 c) 26 d) 0

26. Determinar el valor de $\int_1^3 \frac{dx}{x+2}$.

a) $\ln\left|\frac{5}{3}\right|$ b) 2 c) $\ln\left|\frac{3}{5}\right|$ d) -2

27. El valor de $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$, es:

a) $2(1-\sqrt{2})$ b) $2(\sqrt{2}-1)$ c) $\sqrt{2}-1$ d) $1-\sqrt{2}$

28. El valor de $\int_2^4 \frac{dx}{x}$, es:

a) ln 1 b) ln 6 c) ln 2 d) ln 4

29. Determinar el valor de $\int_0^2 x^2(x-1)dx$.

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{16}{3}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

30. El valor de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{senx} \cos x dx$, es:

a) 1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

31. El valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + \cos x)dx$, es:

a) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ b) $\frac{\pi^2}{2} + 2$ c) $\frac{\pi^2}{4} + 1$ d) $\pi^2 + \frac{1}{4}$

32. De acuerdo a las propiedades de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es igual a:

a) $-\int_a^b f(x)dx$ b) $-\int_b^a f(x)dx$ c) $\int_b^a \frac{dx}{f(x)}$ d) $\int_b^a f(x)dx$

33. De acuerdo a las propiedades de la integral definida $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ es igual a:

a) $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ b) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ c) $\int_a^b f(x)dx - \int_b^a g(x)dx$ d) $\int_b^a f(x)dx - \int_b^a g(x)dx$

34. f(x) y g(x) son continuas en [a, b].Si $\int_a^b f(x)dx = 8$ y $\int_a^b g(x)dx = -4$, determinar el valor de $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx$.

a) 4 b) – 4 c) 12 d) – 12

35. Hallar una función cuya derivada sea $4 + 3x - x^2$ y que pase por el punto (6, 10).

a) $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + 4$

c) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + 4$

d) $y = x^2 - x^3 + 3$

36. Determine la función cuyo valor es 3 cuando x = – 1 y cuya pendiente de la recta tangente es $3x^2 - 2x$.

a) $y = x^2 - x^3 + 5$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$ c) $y = 3x^3 - x^2 + 5$ d) $y = x^3 - x^2 + 5$

37. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas x = 0, x = 3.

a) $18u^2$ b) $9u^2$ c) $-9u^2$ d) $-18u^2$

38. El área formada por la curva $y = 4 - x^2$, el eje X y las rectas x = – 1, x = 2.

a) $-9u^2$ b) $16u^2$ c) $9u^2$ d) $29u^2$

39. Hallar el área limitada por la curva $y = x - x^3$, el eje X y las rectas x = 0, x = 1.

a) $\frac{1}{4}u^2$ b) $\frac{2}{3}u^2$ c) $-\frac{1}{2}u^2$ d) $\frac{1}{3}u^2$

40. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2 - 4$, entre x = 2 y x = 5.

a) 27 u^2 b) 20 u^2 c) 15 u^2 d) 12 u^2

41. Determinar el área de la región bajo la curva $y = x^3 + x^2$ en el intervalo [0, 2].

a) $\frac{10}{3}$ u^2 b) $\frac{20}{3}$ u^2 c) $\frac{17}{3}$ u^2 d) $\frac{22}{3}$ u^2

42. Determinar el área limitada por la curva $f(x) = 2x + 3$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

a) 9 u^2 b) 12 u^2 c) 15 u^2 d) 18 u^2

43. Calcular el área limitada por la curva $y = x$, el eje X en el intervalo [1, 3].

a) $\frac{5}{2}$ u^2 b) 2 u^2 c) 4 u^2 d) 8 u^2

44. Calcular el área limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = x$.

a) $\frac{1}{6}$ u^2 b) $\frac{5}{6}$ u^2 c) $\frac{2}{5}$ u^2 d) $\frac{1}{2}$ u^2

45. Calcular el área limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

a) $\frac{2}{3}$ u^2 b) $\frac{4}{3}$ u^2 c) $\frac{8}{3}$ u^2 d) $\frac{16}{3}$ u^2

46. El volumen del sólido generado al girar el área formada por la recta $y = x$, el eje X y $x = 4$ sobre el eje X es:

a) $\frac{128\pi}{3}$ b) $\frac{64\pi}{3}$ c) $\frac{32\pi}{3}$ d) $\frac{16\pi}{3}$

47. El volumen del sólido generado al girar el área formada por $y = x^2$, $y = 1$, sobre el eje X es:

a) $\frac{8}{5}\pi$ b) $\frac{6}{5}\pi$ c) $\frac{4}{5}\pi$ d) $\frac{2}{5}\pi$

48. El volumen del sólido generado al girar la región limitada por $y = 2x + 2$, $y = 0$, $x = 3$ sobre la recta $x = 3$ es:

a) $\frac{16}{3}\pi$ b) $\frac{32}{3}\pi$ c) $\frac{64}{3}\pi$ d) $\frac{128}{3}\pi$

49. Obtener el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$ sobre la recta $x = 2$.

a) $\frac{32}{5}\pi$ b) $\frac{16}{5}\pi$ c) $\frac{8}{5}\pi$ d) $\frac{4}{5}\pi$

50. El resultado de $\int 2x(x^2 - 9)^3\,dx$ es:

a) $\frac{(x^2-9)^4}{5} + C$ b) $(x^2-9)^4 + C$ c) $\frac{(x^2-9)^4}{4} + C$ d) $\frac{(x^2-9)^3}{4} + C$

51. El resultado de $\int \frac{10x}{(5x^2-2)^4}\,dx$ es:

a) $-\frac{1}{3(5x^2-2)^3} + C$ b) $\frac{1}{3(5x^2-2)^3} + C$ c) $-\frac{1}{3(5x^2-2)^4} + C$ d) $-\frac{3}{(5x^2-2)^3} + C$

52. El resultado de $\int x(3x^2+2)^5\,dx$ es:

a) $\frac{(3x^2+2)^6}{6} + C$ b) $-\frac{(3x^2+2)^6}{36} + C$ c) $\frac{(3x^2+2)^6}{36} + C$ d) $\frac{(3x^2-2)^6}{3} + C$

53. El resultado de $\int \cos 3x\, dx$,es:

a) $\frac{1}{3}\,\text{sen}3x + C$ b) $\text{sen}3x + C$ c) $-\frac{1}{3}\,\text{sen}3x + C$ d) $3\,\text{sen}3x + C$

54. El resultado de $\int x^2 \cos x^3\, dx$,es:

a) $\frac{1}{3}\,\text{sen}x + C$ b) $\text{sen}x^3 + C$ c) $\frac{1}{3}\,\text{sen}x^3 + C$ d) $-\frac{1}{3}\,\text{sen}x^3 + C$

55. El resultado de $\int 3x\, \text{sen}x^2\, dx$,es:

a) $-\frac{3}{2}\cos 2x^2 + C$ b) $-\frac{3}{2}\cos x + C$ c) $\frac{3}{2}\cos x^2 + C$ d) $-\frac{3}{2}\cos x^2 + C$

56. El resultado de $\int e^{5x}\, dx$,es:

a) $\frac{2}{5}e^{5x} + C$ b) $\frac{1}{5}e^{5x} + C$ c) $-\frac{1}{5}e^{5x} + C$ d) $\frac{1}{5}e^{x} + C$

57. El resultado de $\int 6xe^{x^2}\, dx$,es:

a) $3e^{-x^2} + C$ b) $e^{x^2} + C$ c) $-3e^{x^2} + C$ d) $3e^{x^2} + C$

58. El resultado de $\int 3\cos x\, e^{\text{sen}x}\, dx$,es:

a) $3e^{\cos x} + C$ b) $-3e^{\text{sen}x} + C$ c) $3e^{\text{sen}x} + C$ d) $3\text{sen}xe^{x} + C$

59. El resultado de $\int 5xe^{x} dx$,es:

a) $5(x-1) + C$ b) $5e^{x}(x-1) + C$ c) $-5e^{x}(x-1) + C$ d) $e^{x}(x-1) + C$

60. El resultado de $\int 2x\,\text{sen}x\, dx$,es:

a) $\text{sen}x - x\cos x + C$ b) $\text{sen}x - 2x\cos x + C$ c) $2\text{sen}x + 2x\cos x + C$ d) $2\text{sen}x - 2x\cos x + C$

61. La integral de $\int \frac{\ln x}{2} dx$, es:

a) $\frac{x}{3}(\ln x - 1) + C$ b) $\frac{3x}{2}(\ln x - 1) + C$ c) $\frac{x}{2}(\ln x + 1) + C$ d) $\frac{x}{2}(\ln x - 1) + C$

62. El resultado de $\int \cos^3 x\,\text{sen}^2 x dx$,es:

a) $\frac{1}{5}\text{sen}^3 x + \frac{1}{3}\text{sen}^5 x + C$ b) $\text{sen}^3 x - \text{sen}^5 x + C$

c) $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$ d) $\frac{1}{3}\text{sen}^2 x + \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$

63. Determine la integral $\int \tan^3 2x dx$.

a) $\frac{1}{4}\sec^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$
b) $\frac{1}{4}\sec 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$
c) $\sec^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos x| + C$
d) $\frac{1}{4}\sec^2 2x + \ln|\cos 2x| + C$

64. El resultado de $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$,es:

a) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\text{sen}^2 x + C$
b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\text{senx} + C$
c) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\text{senx} + C$
d) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\text{senx} + C$

65. La integral de $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, es:

a) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$
b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$
c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$
d) $x\sqrt{1+x^2} + C$

66. Calcular la integral de $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

a) $-\frac{9x}{\sqrt{x^2+9}} + C$
b) $9x\sqrt{x^2+9} + C$
c) $-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$
d) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} + C$

67. El resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,es:

a) $-\text{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + C$
b) $\text{arc sen}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
c) $\text{arcsen}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) + C$
d) $\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C$

68. El resultado de $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$,es:

a) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C$
b) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + C$
c) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$
d) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$

69. Calcular la integral de $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-6x+9}$.

a) $\ln|x-3| - \frac{2}{x-1} + C$
b) $\ln|x-3| - \frac{2}{x-3} + C$
c) $2\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C$
d) $\ln|x-3| + \frac{2}{x-1} + C$

70. El resultado de $\int \frac{(x+6)dx}{x(x+2)}$, es:

a) $3\ln\left|\frac{x^3}{x+2}\right| + C$
b) $\ln\left|x^3(x+2)^2\right| + C$
c) $\ln\left|\frac{x^3}{(x+2)^2}\right| + C$
d) $\ln\left|\frac{x}{(x+2)^3}\right| + C$

Razonamiento matemático

Propósito: al término de la unidad el alumno al final de la unidad el alumno resolverá sucesiones numéricas.

Series espaciales

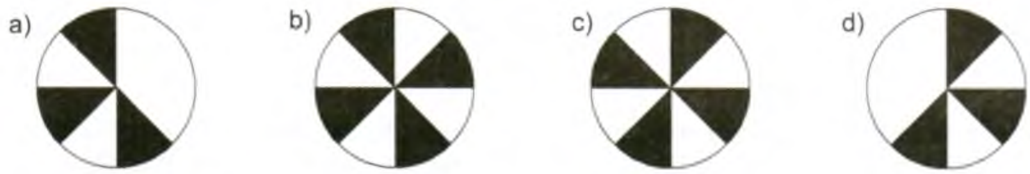
Son un conjunto de signos o imágenes que están ordenados de acuerdo a un principio.

Ejemplo 1

Observe las siguientes figuras:



De las siguientes figuras, ¿cuál continúa la serie?

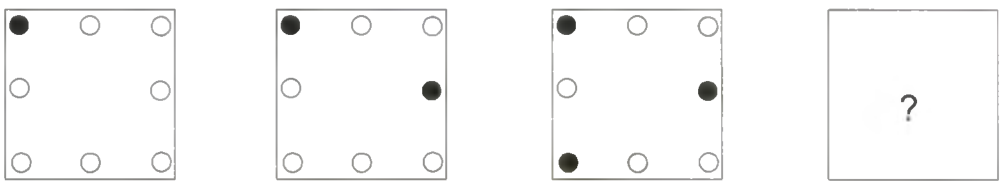


Solución:

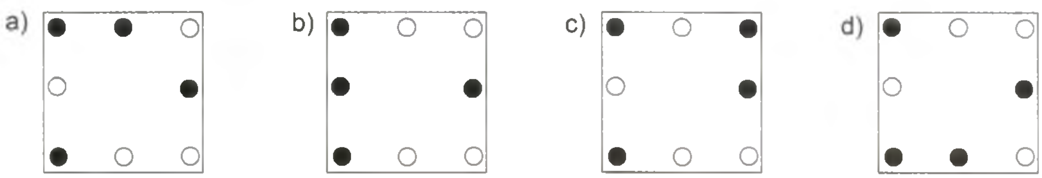
Se determina el principio que rige la serie, el cuál indica que el número de elementos sombreados en cada circunferencia aumenta de uno en uno, por tanto, en la cuarta circunferencia se tendrán cuatro elementos sombreados. Las opciones correspondientes son los incisos "b" y "c"; sin embargo, al tomar la posición de los elementos sombreados se obtiene la respuesta correcta que corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Observe las siguientes figuras:



De los siguientes elementos, ¿cuál continúa la serie?



Solución:

En la serie aumenta el número de elementos sombreados, además existen dos círculos que los separan por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

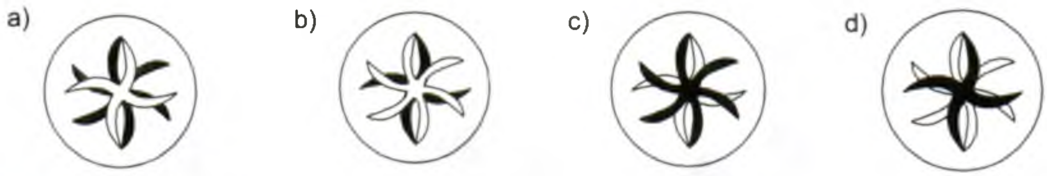
Observe las siguientes figuras:



1ra serie

2da serie

¿Cuál de las siguientes figuras completa la segunda serie?

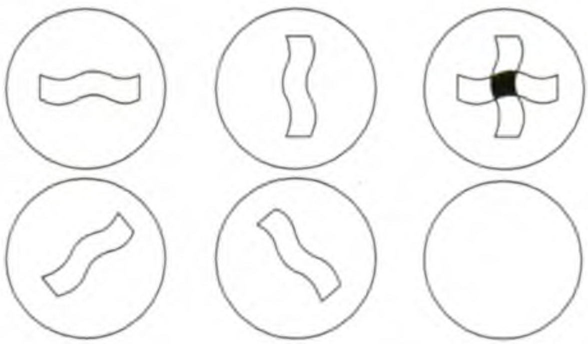


Solución:

En la primera serie la tercera circunferencia resulta de sobreponer las figuras anteriores. En la parte frontal la figura de la primera circunferencia y detrás de ella la figura de la segunda circunferencia sombreada, la segunda serie sigue el mismo principio, por tanto se obtiene la respuesta correcta la cual corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

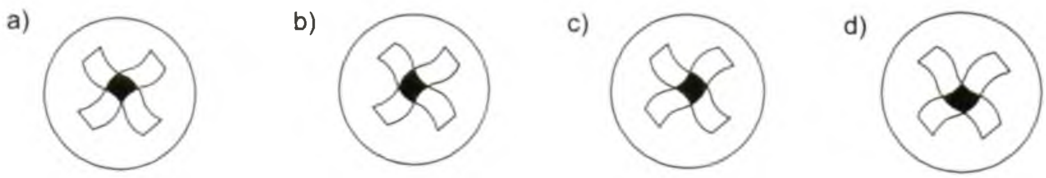
Observe las siguientes figuras:



1ra serie

2da serie

¿Cuál de las siguientes figuras completa la segunda serie?



Solución:

En la primera serie se unen los elementos y se sombrea la zona donde se intersecan, la segunda serie sigue el mismo patrón, por tanto se obtiene la respuesta correcta que corresponde al inciso "b".

Series numéricas

Es un conjunto de números que cumplen con un modelo matemático, el cuál es generado por una o la combinación de varias operaciones aritméticas.

Ejemplo 1

El número que continúa la serie 3, 7, 11, 15, __, es:

a) 18 b) 19 c) 20 d) 21

Solución:

Una forma de encontrar la operación que permite obtener los elementos de la serie, es verificar la relación entre los elementos dados, que en este caso es una suma.

$$3 + 4 = 7 \quad ; \quad 7 + 4 = 11 \quad ; \quad 11 + 4 = 15$$

Esto indica que la diferencia entre los elementos debe ser de 4, por tanto, el siguiente elemento es:

$$15 + 4 = 19$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El número que continúa la serie 1, 4, 9, 16, 25, __, es:

a) 33 b) 34 c) 35 d) 36

Solución:

La serie se obtiene al elevar al cuadrado un número comenzando por la unidad:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2,$$

De acuerdo al modelo, el siguiente elemento es: 6^2 cuyo resultado es 36.

Otra forma de resolver la misma serie es:

Elementos de la serie

$$1 + 3 = 4 \qquad 4 + 5 = 9 \qquad 9 + 7 = 16 \qquad 16 + 9 = 25$$

Números impares

Se observa que para obtener el siguiente número de la serie se van sumando números impares comenzando por el número 3, por tanto, el número buscado es el resultado de la suma:

$$25 + 11 = 36$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

El número que continúa la serie 5, 10, 11, 22, 23,..., es:

a) 46 b) 24 c) 36 d) 47

Solución:

En este caso se tiene una combinación de un producto y una suma, los elementos de la serie se determinan por:

$$5 \times 2 = 10, \quad 10 + 1 = 11, \quad 11 \times 2 = 22, \quad 22 + 1 = 23$$

El siguiente elemento de la serie es:

$$23 \times 2 = 46$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 4

La fracción que continúa la serie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, __, es:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{9}$

Solución:

La operación mediante la cual se obtienen los elementos de la serie es la división por 2:

$$1, \qquad 1 \div 2 = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$$

El elemento que continúa la serie es $\frac{1}{8}$ y la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 5

El elemento que continúa la serie 7, 10, 16, 28, ___, es:

a) 50 b) 51 c) 52 d) 53

Solución:

Los elementos de la serie se forman de la siguiente manera:

Elementos de la serie

$7 + 3 = 10$ $10 + 6 = 16$ $16 + 12 = 28$

El posterior es el doble del anterior

Se observa que los números que se suman a los términos de la serie son el doble del anterior, por tanto, el número que continúa la serie es:

$$28 + 24 = 52$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 6

El número que continúa la serie 3, 16, 81, 406. ___, es:

a) 2016 b) 2021 c) 2026 d) 2031

Solución:

El modelo mediante la cuál se generan los elementos de la serie es:

$$3$$
$$3(5) + 1 = 15 + 1 = 16$$
$$16(5) + 1 = 80 + 1 = 81$$
$$81(5) + 1 = 405 + 1 = 406$$

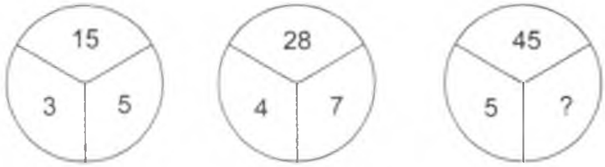
Por tanto, el número que continúa la serie es:

$$406(5) + 1 = 2030 + 1 = 2031$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 7

Indicar el número que falte en el tercer círculo.

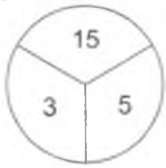


a) 6　　b) 9　　c) 12　　d) 15

Solución:

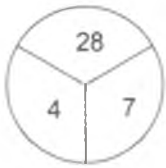
Se obtiene la relación entre los elementos de cada círculo, esta relación nos permitirá encontrar el número faltante en el tercer círculo.

Primer círculo



Al multiplicar 3 por 5 se obtiene 15

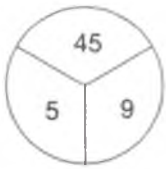
Segundo círculo



Al multiplicar 4 por 7 se obtiene 28

Por tanto, el número que falta en el tercer círculo es 9.

Tercer círculo

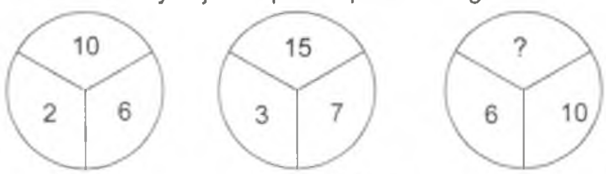


Al multiplicar 5 por 9 se obtiene 45

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 8

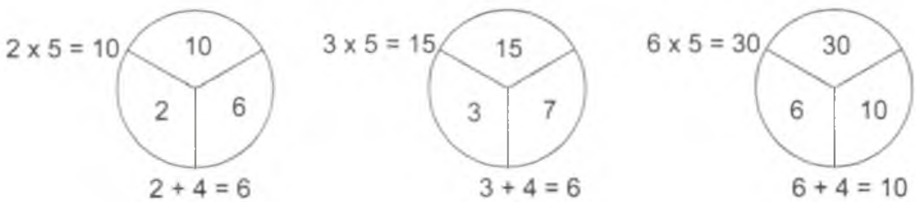
Relacione los números de cada círculo y elija la opción que contenga el número faltante en el tercer círculo.



a) 26　　b) 28　　c) 30　　d) 32

Solución:

La relación que guardan los elementos de los círculos es:



El número que falta en el tercer círculo es 30 y la respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejercicios

1. A Fabián le deben cierta cantidad de dinero. Si le pagan $\frac{2}{3}$ del total el lunes, y el martes le abonan $\frac{1}{5}$ del total, ¿qué parte del total le han abonado?

   a) $\frac{13}{15}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{3}{10}$

2. Para ir de una ciudad a otra, un automovilista realiza el viaje en tres días. El primer día recorre la cuarta parte de la distancia total; el segundo día recorre una tercera parte de la distancia total. ¿Qué parte de la distancia que existe entre las ciudades le falta por recorrer el tercer día?

   a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{7}$

3. Ricardo vende bolsas de dulces de $\frac{3}{4}$ Kg. Si el Kg de dulces lo vende a \$ 12 pesos, ¿cuál es el precio de la bolsa de dulces?

   a) \$ 6 b) \$ 7 c) \$ 8 d) \$ 9

4. El Sr. Martínez deja una herencia de dinero para su familia, la cual será repartida de la siguiente manera: los $\frac{2}{3}$ del total le corresponde a su esposa, y el resto le corresponde a sus 4 hijos en partes iguales. ¿Qué parte del total le corresponde a cada hijo?

   a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{6}$

5. Un artículo tiene un precio de \$1500.00 y al momento de adquirirlo se efectúa un descuento del 42%. ¿Cuánto se paga al adquirirlo?

   a) \$87 b) \$870.00 c) \$0.87 d) \$8700.00

6. En un grupo de 60 alumnos, el 70% del grupo son mujeres. ¿Cuál es el número de varones?

   a) 18 varones b) 30 varones c) 42 varones d) 70 varones

7. Una camisa tiene un costo de \$340.00 incluido un descuento del 30%. ¿Cuál es el precio real de la camisa?

   a) \$400 b) \$485.71 c) \$238.00 d) \$102.00

8. Miguel vendió un auto en \$ 32200, ganando así el 15 % de lo que le había costado. ¿En cuánto Miguel compró el auto?

   a) \$27370 b) \$30000 c) \$23800 d) \$28000

9. El valor de "A" varia en proporción directa con el de "B"; cuando A = 25, B = 100. ¿Cuál será el valor de "A" si B = 280?

   a) 1120 b) 70 c) 8.92 d) 60

10. El valor de "X" varia en proporción inversa con el de "Y"; Cuando X = 60, Y = 30. ¿Cuál será el valor de "Y" si X = 90?

    a) 180 b) 45 c) 20 d) 120

11. Por 14 días de trabajo, han pagado a un obrero \$ 1500. ¿Cuánto le pagarán por 35 días de trabajo?

    a) \$3700 b) \$2000 c) \$1500 d) \$3750

12. Lourdes bebe por día $\frac{5}{6}$ de litro de agua. ¿Qué cantidad de agua bebe en un mes de 30 días?
    a) 25 lts b) 30 lts c) 60 lts d) 52 lts

13. 8 trabajadores ganan $ 60. ¿Cuánto ganarán 15 trabajadores?
    a) $113 b) $112.5 c) $120.5 d) $60

14. Durante 65 días de trabajo, Fabián ha ganado $ 25000. ¿Cuánto habría ganado si hubiera trabajado 15 días más?
    a) $30769.23 b) $3069.23 c) $3769.23 d) $5769.23

15. Si 5 estudiantes pueden terminar un trabajo en 63 días. ¿Cuántos estudiantes más se necesita para concluirlo en 45 días?
    a) 7 b) 5 c) 10 d) 2

16. Una docena de pelotas tienen un costo de $250. ¿Cuánto costarán 42 pelotas?
    a) $785 b) $875 c) $900 d) $504

17. Un automóvil viaja a 60 $\frac{Km}{hr}$ y un avión viaja a 840 $\frac{Km}{hr}$. Si ambos tienen rapidez constante, ¿cuántas veces es más rápido el avión que el automóvil?
    a) 12 veces b) 13 veces c) 14 veces d) 15 veces

18. Una persona recorre 0.5 m en un segundo y un automóvil recorre 50 Km en una hora. Si ambos tienen rapidez constante, ¿cuántas veces es más rápido el automóvil que la persona?
    a) 27.8 veces b) 13.8 veces c) 6.9 veces d) 100 veces

19. Un estanque es llenado por dos llaves. La primera lo llena en 6 hrs y, la segunda lo llena en 4 hrs. ¿Cuántas veces es más rápida la segunda llave que la primera?
    a) 1 veces b) 1.5 veces c) 2 veces d) 2.5 veces

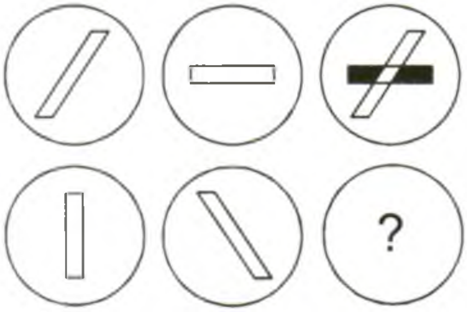
20. En una pista olímpica, dos corredores dan 4 vueltas y cronometran los siguientes tiempos: el primer corredor 200 segundos, y el segundo corredor $3\frac{1}{3}$ minutos. Suponiendo que la velocidad de cada corredor es constante, ¿cuál de ellos es más rápido?
    a) primer corredor b) segundo corredor c) su velocidad es la misma d) ninguna de las anteriores

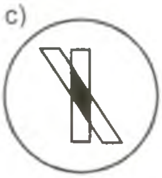
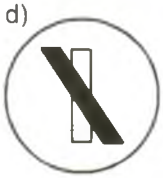
21. Herman realiza un problema en 3 hrs. y Ricardo lo realiza en 2 hrs. ¿Cuánto tiempo se tardarán en realizarlo ambos?
    a) 5hr b) 2.5hr c) 1.2hr d) 6hr

22. Una alberca se llena con agua fría en 8hrs, y si se llena con agua caliente se tarda 4hrs. ¿En qué tiempo se llenará dicha alberca si se emplean ambas llaves?
    a) 6hrs, 10 min b) 5hrs c) 3hrs, 20min d) 2hrs, 40min

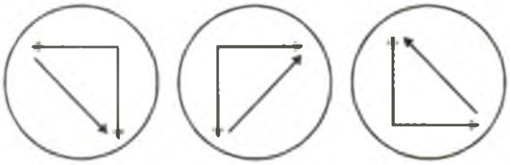
23. Ricardo realiza una tarea en 6hrs; Fabián en 3hrs y Miguel en 2hrs. ¿En cuántas hrs realizarán la misma tarea los tres juntos?
    a) 10hrs b) 5.5hrs c) 2hrs d) 1hr

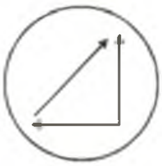
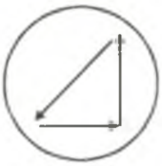
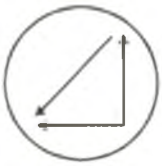
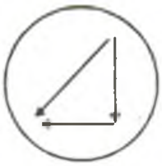
24. Seleccionar la opción que contenga la figura que completa la segunda serie:



a)  b)  c)  d) 

25. Seleccionar la opción que continúe con la serie:



a)  b)  c)  d) 

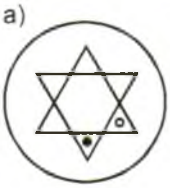
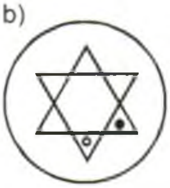
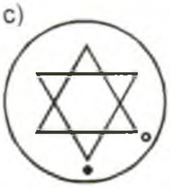
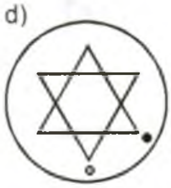
26. Seleccionar la opción que continúe con la serie:



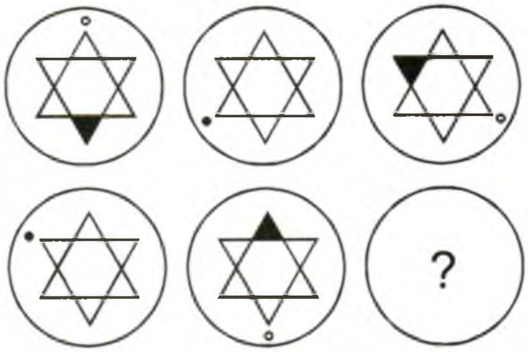
a)  b)  c)  d) 

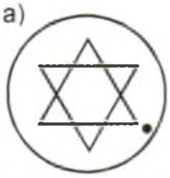
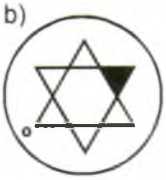
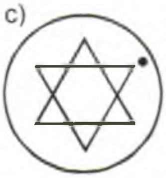
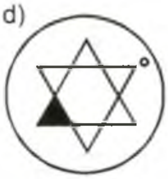
27. Seleccionar la opción que continué con la serie:



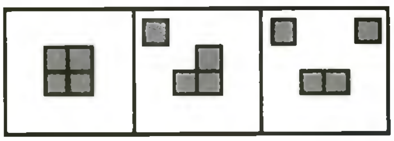
a)  b)  c)  d) 

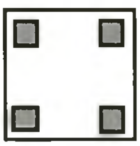
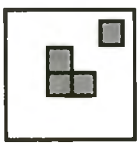
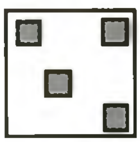
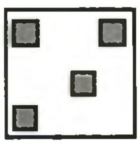
28. Seleccionar la opción que contenga la figura que completa la segunda serie:



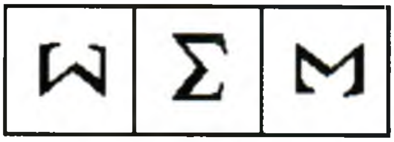
a)  b)  c)  d) 

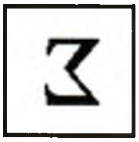
29. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.



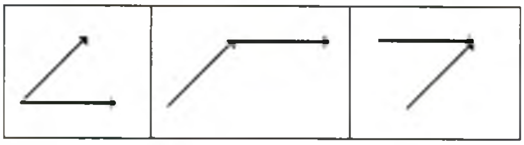
a)  b)  c)  d) 

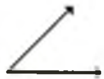
30. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.



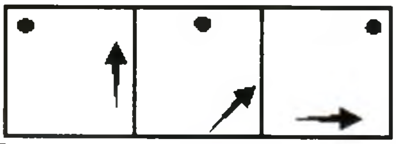
a) 
b) 
c) 
d) 

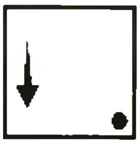
31. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.



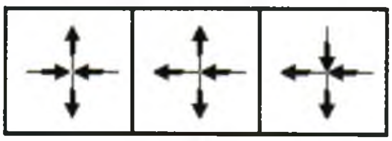
a) 
c) 
b) 
d 

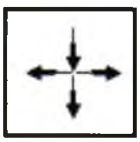
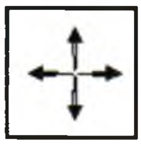
32. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.



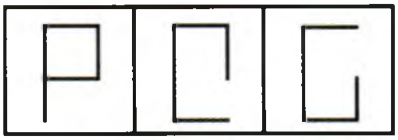
a) 
b) 
c) 
d) 

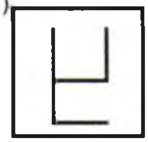
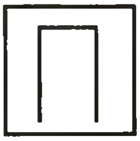
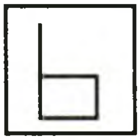
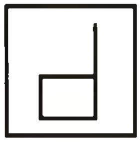
33. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.



a) 
b) 
c) 
d) 

34. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.



a) 
b) 
c) 
d) 

35. Señalar el número que continua en la serie: $\frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{3}{-1}, \frac{4}{-3}$

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{-5}$ c) $\frac{5}{1}$ d) $\frac{5}{-1}$

36. El número que continúa en la serie: 11, 18, 27, 38,... es

a) 41 b) 51 c) 61 d) 52

37. El número que continúa en la serie: 5, 7, 10, 16, 34,...es

a) 132 b) 142 c) 108 d) 152

38. Señalar el número que continua en la serie: 4, 14, 44, 134, 404,... es

a) 1124 b) 1412 c) 1214 d) 1421

39. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

5, 16, 49, 148, ______

a) 444 b) 445 c) 446 d) 447

40. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

6, 8, 11, 13, ______

a) 15 b) 16 c) 18 d) 14

41. Selecciona la opción que contenga al siguiente término de la sucesión:

$\sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[7]{11}$, ______

a) $\sqrt[5]{14}$ b) $\sqrt[6]{15}$ c) $\sqrt[6]{14}$ d) $\sqrt[5]{15}$

42. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

$2^2, 5^2, 14^2$, ______

a) 40^2 b) 41^2 c) 42^2 d) 43^2

43. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

3, 7, 15, 31, ______

a) 55 b) 59 c) 63 d) 69

44. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

3, 8, 18, 38, ______

a) 76 b) 80 c) 78 d) 74

45. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

2, 7, 32, 157, ______

a) 782 b) 657 c) 282 d) 182

46. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

$-4, -1, 1, 3, 6, 7,$ ______, ______

a) 11,11 b) 10,12 c) 11,10 d) 12,10

47. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

1, 2, 5, 14, _____

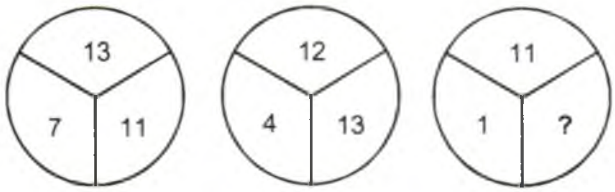
a) 41 b) 42 c) 40 d) 39

48. Selecciona la opción que contenga el término que sigue en la sucesión presentada.

$-216, 36, -6,$ ______

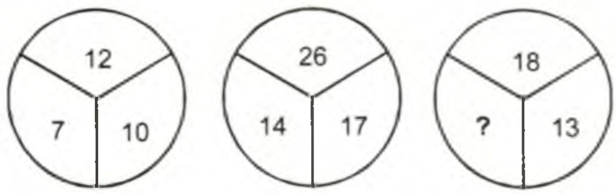
a) 0 b) 1 c) -1 d) $\frac{1}{6}$

49. Indicar que número falta en el tercer círculo.



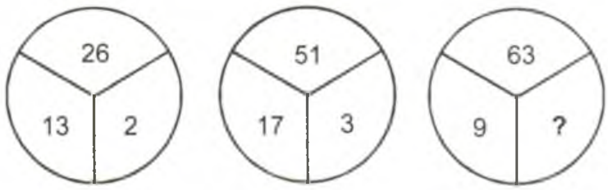
a) 17 b) 13 c) 15 d) 19

50. Indicar que número falta en el tercer círculo.



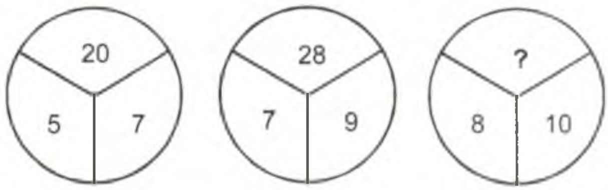
a) 10 b) 5 c) 15 d) 20

51. Relaciona los círculos y determina el número que falta en el tercer círculo.



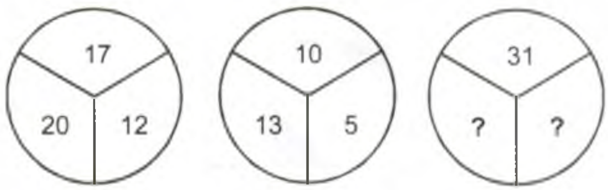
a) 10 b) 7 c) 4 d) 5

52. Relaciona los números de cada círculo y determina el número que falta en el tercer círculo.



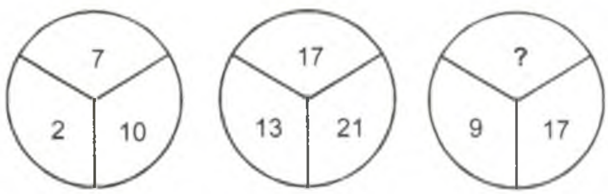
a) 30 b) 31 c) 32 d) 33

53. Relaciona los números de cada círculo y determina los números que faltan en el tercer círculo.



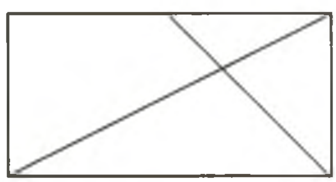
a) 34 y 26 b) 33 y 26 c) 34 y 24 d) 33 y 24

54. Relaciona los números de cada círculo y determina el número que falta en el tercer círculo.



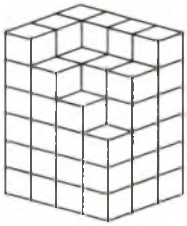
a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

55. ¿Cuántos triángulos se observan en la siguiente figura?



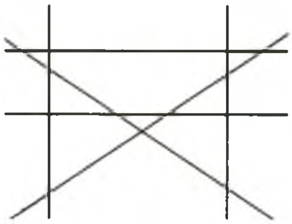
a) 3 b) 4 c) 6 d) 5

56. ¿Cuántos cubos hacen falta para completar la figura?



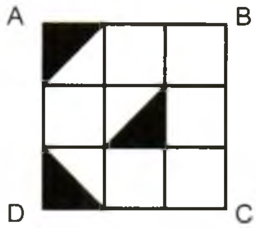
a) 9 b) 7 c) 10 d) 6

57. ¿Cuántos puntos de intersección existen en la figura?



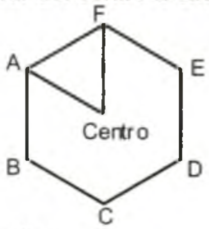
a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

58. Si el área sombreada es 6 u^2, ¿cuál es el área del cuadrado ABCD?



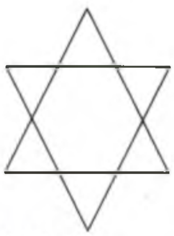
a) 24 u^2 b) 30 u^2 c) 36 u^2 d) 40 u^2

59. ¿Cuántos triángulos se pueden trazar a partir del centro a cada uno de los vértices de la siguiente figura?



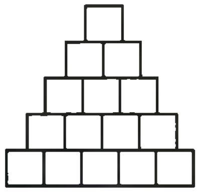
a) 1 b) 6 c) 5 d) 4

60. ¿Cuántos triángulos observas en la siguiente estrella?



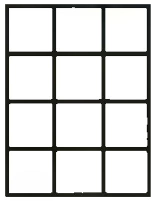
a) 5 b) 6 c) 8 d) 12

61. ¿Cuántos cubos forman la pirámide si la base de la misma tiene 20 unidades?



a) 420 b) 210 c) 105 d) 51

62. ¿Cuántos cuadros existen en la figura?



a) 19 b) 20 c) 21 d) 22

Respuestas de los ejercicios de Matemáticas

Unidad 1

1. a	2. b	3. c	4. d	5. c	6. b	7. b	8. a	9. a	10. d
11. b	12. a	13. c	14. c	15. d	16. b	17. a	18. d	19. b	20. c
21. c	22. a	23. b	24. c	25. d	26. b	27. a	28. b	29. a	30. a
31. d	32. b	33. b	34. c	35. a	36. b	37. a	38. d	39. a	40. a
41. c	42. b	43. d	44. c	45. d	46. a	47. d	48. a	49. c	50. d
51. b	52. c	53. a	54. d	55. c	56. b	57. a	58. a	59. b	60. c
61. d	62. d	63. c	64. b	65. a	66. a	67. b	68. c	69. d	70. d
71. c	72. b	73. c	74. d	75. b	76. c	77. a	78. b	79. b	80. c
81. a	82. b	83. c	84. d	85. d	86. c	87. b	88. a	89. a	90. c
91. b	92. a	93. c	94. b	95. d	96. a	97. c	98. c	99. d	100. b
101. d	102. b	103. c	104. b	105. c	106. a	107. c	108. b	109. c	110. d
111. b	112. c	113. d	114. d	115. c	116. c	117. d	118. c	119. d	120. c
121. d	122. b	123. a	124. d	125. b	126. c	127. d	128. c	129. b	130. c
131. a	132. d	133. a	134. c	135. b	136. d	137. d	138. c	139. a	140. d
141. b	142. b	143. d	144. c	145. d	146. c	147. a	148. d	149. c	150. a
151. d	152. c	153. d	154. b	155. a	156. d	157. c	158. b	159. c	160. d
161. a	162. b	163. a	164. c	165. b	166. c	167. c	168. b	169. b	170. d
171. c	172. a	173. b	174. d	175. d	176. a	177. d	178. d	179. c	180. b
181. d	182. b	183. d	184. d	185. c	186. b	187. b	188. a	189. c	190. b
191. d	192. a	193. a	194. d	195. a	196. a	197. b	198. c	199. d	200. c
201. d	202. c	203. b	204. d	205. a	206. d	207. d	208. d	209. b	210. c
211. b	212. a	213. c							

Unidad 2

1. d	2. d	3. b	4. b	5. c	6. a	7. b	8. c	9. c	10. b
11. a	12. d	13. c	14. b	15. c	16. d	17. d	18. b	19. a	20. c
21. c	22. b	23. a	24. d	25. a	26. d	27. c	28. b	29. d	30. b
31. d	32. b	33. d	34. a	35. b	36. b	37. d	38. a	39. b	40. a
41. c	42. b	43. d	44. c	45. d	46. b	47. c	48. a	49. d	50. a
51. c	52. b	53. b	54. d	55. b	56. b	57. c	58. a	59. b	60. c
61. a	62. c	63. a	64. a	65. b	66. c	67. d	68. b	69. a	70. d
71. a	72. c	73. d	74. d	75. b	76. c	77. b	78. d	79. a	80. d
81. c	82. b	83. a	84. d	85. b	86. d	87. b	88. d	89. a	90. b
91. d	92. b	93. b	94. b	95. d	96. b	97. d	98. d	99. c	100. a
101. b									

Unidad 3

1. b	2. c	3. b	4. a	5. d	6. c	7. a	8. c	9. d	10. c
11. b	12. d	13. b	14. d	15. d	16. d	17. a	18. a	19. c	20. b
21. d	22. a	23. b	24. d	25. c	26. a	27. a	28. b	29. a	30. a
31. c	32. a	33. b	34. c	35. a	36. c	37. c	38. b	39. a	40. b
41. b	42. c	43. c	44. b	45. a	46. a	47. a	48. a	49. c	50. d
51. c	52. b	53. b	54. a	55. a	56. a	57. d	58. b	59. c	60. c
61. c	62. a	63. c	64. b	65. b	66. c	67. d	68. c	69. c	70. c
71. b	72. d	73. b	74. a	75. b	76. b	77. d	78. c	79. d	80. a
81. c	82. c	83. b	84. a	85. b	86. d	87. a	88. c	89. d	90. a
91. c	92. b	93. d	94. b	95. d	96. a	97. b	98. b	99. a	100. b
101. a	102. c	103. d	104. d	105. c	106. b	107. d	108. a	109. b	110. d
111. a	112. a	113. b	114. c	115. a	116. c	117. d	118. b	119. a	120. d
121. b	122. c	123. b	124. d	125. c	126. a	127. b	128. c	129. a	130. b
131. a	132. c	133. c	134. a	135. d	136. b	137. d	138. b	139. a	140. b
141. c	142. a	143. c	144. b	145. d	146. b	147. c	148. b	149. d	150. c
151. a									

Unidad 4

1. b	2. a	3. b	4. a	5. a	6. a	7. a	8. b	9. d	10. a
11. b	12. a	13. c	14. c	15. a	16. b	17. b	18. c	19. a	20. c
21. a	22. c	23. a	24. a	25. c	26. a	27. b	28. b	29. b	30. b
31. a	32. d	33. c	34. d	35. b	36. a	37. d	38. a	39. a	40. b
41. c	42. d	43. c	44. b	45. d	46. c	47. b	48. a	49. b	50. c
51. b	52. a	53. c	54. d	55. d	56. c	57. b	58. a	59. b	60. c
61. d	62. c	63. b	64. c	65. c	66. b	67. c	68. a	69. b	70. c
71. d	72. c	73. b	74. a	75. a	76. d	77. a	78. c	79. b	80. a
81. c	82. b	83. c	84. c	85. b	86. a	87. c	88. d	89. c	90. a
91. a	92. d	93. d	94. b	95. b	96. b	97. a	98. b	99. a	100. c
101. b	102. d	103. c	104. b	105. a	106. b	107. a	108. a	109. d	110. a
111. a	112. c	113. d	114. a						

Unidad 5

1. b	2. d	3. a	4. c	5. d	6. a	7. c	8. b	9. d	10. c
11. a	12. b	13. b	14. d	15. a	16. b	17. d	18. a	19. b	20. b
21. d	22. a	23. d	24. c	25. b	26. a	27. b	28. c	29. a	30. b
31. c	32. b	33. a	34. a	35. b	36. d	37. b	38. c	39. a	40. a
41. b	42. d	43. c	44. a	45. c	46. b	47. a	48. d	49. b	50. c
51. a	52. c	53. a	54. c	55. d	56. b	57. d	58. c	59. b	60. d
61. d	62. c	63. a	64. d	65. b	66. c	67. a	68. d	69. b	70. c

Unidad 6

1. a	2. c	3. d	4. c	5. b	6. a	7. b	8. d	9. b	10. c
11. d	12. a	13. b	14. a	15. d	16. b	17. c	18. a	19. b	20. c
21. c	22. d	23. d	24. a	25. c	26. c	27. b	28. c	29. c	30. b
31. a	32. d	33. b	34. c	35. b	36. b	37. b	38. c	39. b	40. b
41. c	42. b	43. c	44. c	45. a	46. a	47. a	48. b	49. c	50. a
51. b	52. c	53. a	54. b	55. c	56. a	57. c	58. c	59. b	60. c
61. b	62. b								

Unidad 1 Medición
1. Introducción
2. Sistema de unidades
3. Tipos de errores

Unidad 2 Vectores
1. Magnitudes escalares y vectoriales

Unidad 3 Cinemática
1. Definiciones y características de los fenómenos físicos
2. Movimiento rectilíneo uniforme
3. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
4. Caída libre
5. Tiro vertical
6. Moviendo de proyectiles (Tiro parabólico)
7. Moviendo circular
8. Movimiento circular uniforme
9. Movimiento circular uniformemente acelerado

Unidad 4 Dinámica
1. Factores que cambian la estructura o el estado de movimiento de un cuerpo
2. Concepto de fuerza
3. El carácter vectorial de la fuerza
4 Superposición de fuerza
5. Primera Ley de Newton (Ley de la inercia)
6. Segunda Ley de Newton (Ley de la masa inercial)
7. Tercera Ley de Newton (Ley de la acción y la reacción)
8. Equilibrio rotacional y traslacional, fuerza y torca
9. Concepto de trabajo mecánico
10. Energía
11. Concepto de potencia
12. Conservación de la energía mecánica
13. Colisiones entre partículas en una dimensión (Choques)
14. Procesos disipativos (Fricción)

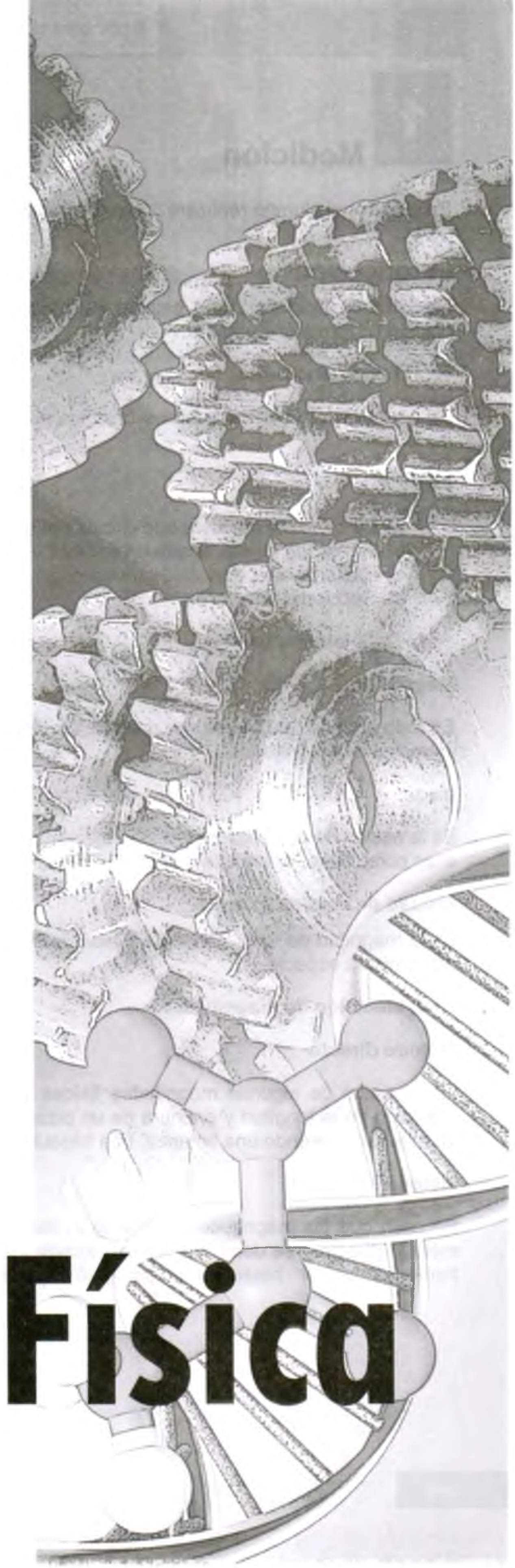
Unidad 5 Propiedades de la materia
1. Estructura de la materia
2. Estiramiento de un resorte. (Ley de Hooke)

Unidad 6 Hidráulica
1. Hidrostática (Fluidos en reposos)
2. Hidrodinámica. (Fluidos en movimiento)

Unidad 7 Propiedades térmicas de la materia
1. Calor y temperatura
2. Teoría cinética de los gases

Unidad 8 Electromagnetismo
1. Efectos cuantitativos entre cuerpos cargados eléctricamente
2. Ley de Coulomb y campo eléctrico
3. Ley de Ohm y potencia eléctrica
4. Circuitos
5. Campo magnético
6. Inducción electromagnética
7. Relación entre el campo magnético y eléctrico
8. Inducción de campos
9. La luz como onda electromagnética
10. Espectro electromagnético
11. Ley de Ampere
12. Ley de Faraday

Unidad 9 Óptica
1. Reflexión y refracción de la luz
2. Espejos planos y esféricos
3. Lentes convergentes y lentes divergentes
4. La luz. (Punto de vista contemporáneo)



1 Medición

Propósito: el alumno realizará conversiones de unidades de los diferentes sistemas.

Introducción

La física es la ciencia que estudia los cambios que experimenta la materia en general con respecto a su posición o forma únicamente.

a) Fenómeno físico

Es aquél en el cual los cuerpos únicamente modifican su forma o posición, sin que se altere su estructura molecular.

Ejemplos:

a) La corriente eléctrica que circula por un conductor.
b) Arrojar un objeto, desde un edificio.
c) Elevar la temperatura de un cuerpo.
d) Seccionar una varilla.

b) Definiciones básicas

Magnitud

Es todo aquello que puede ser medido. La longitud, el tiempo, la masa, la superficie, la fuerza, la rapidez, son ejemplos de magnitudes.

Medir

Es la acción de comparar dos o más magnitudes físicas de la misma especie, tomando arbitrariamente a una de ellas como base, referencia o patrón.

Unidad de medida (patrón)

Es la magnitud de valor conocido y bien definido que se emplea como referencia para medir otras magnitudes de la misma especie.

c) Medición de magnitudes

Método directo

La medición de algunas magnitudes físicas se puede realizar por método directo, un ejemplo de ello es la medición de la longitud y anchura de un pizarrón empleando una regla graduada o la medición de la masa de un objeto empleando una balanza, una báscula mecánica o electrónica.

Método indirecto

En caso que las magnitudes físicas sean demasiado grandes o pequeñas, no siempre es posible emplear el método directo y se debe emplear el método indirecto. Un ejemplo de ello es la medición de la longitud de un tramo de carretera hecha por un topógrafo, la cual se realiza empleando un instrumento llamado tránsito o nivel.

Sistema de unidades

a) Unidades fundamentales

Son aquéllas formadas por unidades de longitud masa, tiempo, etc.

Ejemplos:

Unidades de Longitud	Unidades de Masa	Unidades de Tiempo	Unidades de Temperatura
m, ft, años luz	kg, g, Slugs	h, minutos, segundos	°C, K, °F

b) Unidades derivadas

Son aquéllas unidades que resultan de combinar dos o más unidades fundamentales mediante operaciones matemáticas.

Ejemplos:

Unidades derivadas	Ejemplos
Velocidad	$\frac{m}{s}, \frac{km}{h}, \frac{cm}{s}$
Fuerza	N, Dinas, Libras
Presión	$\frac{N}{m^2}, \frac{Dinas}{cm^2}$
Superficie	m^2, cm^2, km^2
Trabajo	Joules, Dinas $\cdot$ cm
Volumen	m^3, cm^3, ft^3

c) Sistema de unidades

Estos sistemas se forman por determinados tipos de unidades que se emplean según sea el caso.

Ejemplos:

	Sistema M.K.S. ó internacional	Sistema c.g.s. ó sexagesimal	Sistema Inglés.
Unidad de longitud	Metro (m)	Centímetro (cm)	Pies (ft)
Unidad de masa	Kilogramo (kg)	Gramos (g)	Slugs
Unidad de tiempo	Segundo (s)	Segundo (s)	Segundo (s)

d) Prefijos

Son aquellos que se anteponen a una unidad y sirven para representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, todo prefijo representa un múltiplo o submúltiplo de "10".

Prefijo	Símbolo	Potencia
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	K	10^3
Hecto	H	10^2
Deca	D	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	η	10^{-9}

d) Equivalencias

Relaciones que existen entre las unidades fundamentales de los diferentes sistemas de unidades.

Ejemplos:

1 m = 100cm	1 km = 1000m	1 kg = 1000gr	1 Ton = 1000kg	1 h = 60 min	1 kp = 10N
1 m = 3.281ft	1 h = 3600s	1 mill = 1609m	1 in = 2.54cm	1Slug=14.59kg	1 mill= 1.609km

in = Pulgadas mill = Millas km = Kilómetro h = Hora min = Minuto

e) Conversiones

Equivalencias que existen entre las unidades de medida.

Para poder realizar conversiones es necesario auxiliarse de las equivalencias como lo ilustran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Al convertir 640 g a kg, se obtiene:

a) 640000kg b) 6.4kg c) 0.64kg d) 0.064kg

Solución:

Equivalencia 1kg = 1000 g

$$\left(\frac{640\,g}{1}\right)\left(\frac{1kg}{1000\,g}\right)=\frac{640\,g\cdot kg}{1000\,g}=0.64\,kg$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El equivalente a $15\dfrac{m}{s}$ en $\dfrac{km}{h}$ es:

a) $4.16\dfrac{km}{h}$ b) $54\dfrac{km}{h}$ c) $150\dfrac{km}{h}$ d) $416\dfrac{km}{h}$

Equivalencia 1 km = 10000 m y 1 h = 3600 s

$$\left(\frac{15\,m}{1s}\right)\left(\frac{1\,km}{1000\,m}\right)\left(\frac{3600\,s}{1h}\right)=\frac{54000\,m\cdot km\cdot s}{1000\,s\cdot m\cdot h}=54\frac{km}{h}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

El equivalente a $72\dfrac{km}{h}$ en $\dfrac{m}{s}$ es:

a) $259.2\dfrac{m}{s}$ b) $155\dfrac{m}{s}$ c) $40\dfrac{m}{s}$ d) $20\dfrac{m}{s}$

Equivalencia 1 km = 10000 m y 1 h = 3600 s

$$\left(\frac{72\,km}{1h}\right)\left(\frac{1\,h}{3600s}\right)\left(\frac{1000m}{1km}\right)=\frac{72000\;km\cdot h\cdot m}{3600\;h\cdot s\cdot km}=20\frac{m}{s}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

El prefijo 10^{-9} representa a un:

a) nano b) Giga c) micro d) mili

En la tabla de prefijos se observa que 10^{-9} representa a un nano, por tanto; la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 5

El equivalente en metros de $5\,\mu m$ es:

a) 5×10^{-3} m b) 5×10^{-6} m c) 5×10^{-9} m d) 5×10^{3} m

Solución:
El equivalente en potencia de "10" del "μ" es 10^{-6}, por tanto:

$$5\,\mu m = 5\times10^{-6}\,m$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

f) Análisis dimensional

El análisis dimensional es la herramienta que nos permite simplificar el estudio de un fenómeno físico en donde se encuentren involucradas magnitudes físicas en forma de variables independientes y así poder averiguar el comportamiento o solución de un problema, a continuación se ejemplifica el uso del análisis dimensional.

Ejemplo 1

¿Cuál es la dimensión de la velocidad para L = longitud, y T = tiempo?

a) MLT^{-1} b) LT^{-2} c) LT^{-1} d) MLT

Solución:

El modelo matemático que representa la velocidad es $v = \frac{d}{t}$, donde "d" es la longitud de la distancia recorrida en el lapso "t" de tiempo. Expresado de otra forma entonces $v = \frac{L}{T}$ y por leyes de los exponentes $v = LT^{-1}$.

Por consiguiente la respuesta correcta es el inciso "c".

Ejemplo 2

Es la dimensión del trabajo mecánico, si L = longitud, M = masa y T = tiempo:

a) ML^2T^{-3} b) ML^2T^{-2} c) M^2LT^{-2} d) M^2LT^{-3}

Solución:

La fórmula matemática que representa el trabajo mecánico es $T = F\cdot d$, donde "F" es la fuerza aplicada a un cuerpo por una distancia recorrida "d".

También el trabajo se puede expresar en términos de la masa, aceleración, y la distancia, como a continuación se muestra:

$$T = F\cdot d = m\cdot a\cdot d$$

Pero la aceleración se puede expresar en términos de velocidad y tiempo:

$$T = F\cdot d = m\cdot a\cdot d = (m)\left(\frac{v}{t}\right)(d)$$

La velocidad se puede expresar en términos de distancia y tiempo

$$T = F \cdot d = m \cdot a \cdot d = (m)\left(\frac{v}{t}\right)(d) = (m)\left(\frac{\frac{d}{t}}{t}\right)(d) = (m)\left(\frac{d}{t^2}\right)(d)$$

Si la longitud de la distancia se representa con "L", la masa con "M" y el tiempo con "T", además de efectuar las operaciones y aplicar las leyes de los exponentes tenemos que el trabajo es:

$$T = (M)\left(\frac{L}{T^2}\right)(L) = M\frac{L^2}{T^2} = ML^2T^{-2}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es el inciso "b".

Tipos de errores

a) Error de medición

Es la diferencia que existe al medir una magnitud y compararla con el valor verdadero o exacto de dicha magnitud.

b) Clases de errores

Error sistemático

Es el error que se presenta de forma constante al realizar la medición de una magnitud, las causas de este tipo de error son:

a) El defecto en el instrumento de medición. Éste se presenta cuando el instrumento de medición está maltratado o alterado y en consecuencia la medición es errónea.

b) El error de paralaje. Se presenta por una postura incorrecta del observador y por consecuencia realiza una lectura inadecuada de la medición.

c) Mala calibración del aparato o instrumento usado. Éste se presenta por fallas en la fabricación del mismo.

d) Error de escala. Es el producto de elegir un instrumento de medición inadecuado, lo que genera una incertidumbre en la medición.

Error circunstancial (aleatorio o estocástico)

Este tipo de error no se repite regularmente ya que es variable y se produce por la variación en humedad, presión y temperatura del ambiente sobre los instrumentos y aparatos de medición.

Ejercicios

1. La evaporación del agua es un ejemplo de:
   a) Fenómeno biológico b) Fenómeno físico c) Fenómeno químico d) Fenómeno molecular
2. ¿Cuál de los siguientes ejemplos se trata de una medición directa?
   a) La medición de la longitud de una puerta
   b) La superficie de un terreno
   c) El volumen de un cubo
   d) El trabajo desarrollado por el efecto de una fuerza
3. ¿Cuál es la unidad en el sistema internacional de unidades que se emplea para medir el tiempo?
   a) minutos b) horas c) segundos d) días
4. ¿Cuál es la unidad de masa empleada en el sistema cgs?
   a) centigramos b) kilogramo c) decigramo d) gramo
5. ¿Cuál es la equivalencia de 1Hm en decímetros?
   a) 1×10^1 b) 1×10^2 c) 1×10^3 d) 1×10^4
6. ¿Cuántos centímetros hay en un kilómetro?
   a) 10^5 b) 10^4 c) 10^3 d) 10^2
7. ¿Cuántos m^2 existen en una hectárea?
   a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4 d) 10^5
8. ¿A cuántos kilómetros equivalen 3 700cm?
   a) 3.7×10^2 b) 3.7×10^5 c) 3.7×10^{-5} d) 3.7×10^{-2}
9. ¿A cuántos kilogramos equivalen 87 900 gramos?
   a) 87.9kg b) 979.00kg c) 87900000kg d) 8.7900kg
10. Al convertir $72\frac{km}{h}$ a $\frac{m}{s}$ se obtiene:
    a) $15\frac{m}{s}$ b) $20\frac{m}{s}$ c) $27\frac{m}{s}$ d) $72\frac{m}{s}$
11. ¿Cuál es la equivalencia de $15\frac{m}{s}$ a $\frac{km}{h}$?
    a) $15\frac{km}{h}$ b) $45\frac{km}{h}$ c) $54\frac{km}{h}$ d) $95\frac{km}{h}$
12. La dimensión de la aceleración para L = longitud, M = masa y T = tiempo, es:
    a) LT^{-2} b) L^3 c) MLT^{-2} d) LT^{-1}
13. ¿Cuál es la dimensión de la fuerza para L = longitud, M = masa y T = tiempo?
    a) MLT^{-1} b) MLT^{-2} c) MLT^2 d) MLT
14. Es la diferencia que existe entre el valor real y el valor medido de una magnitud:
    a) Exactitud b) Unidad de medida c) Presión d) Error

2 Vectores

Propósito: el alumno realizará operaciones con vectores.

Magnitudes escalares y vectoriales

a) Magnitudes escalares

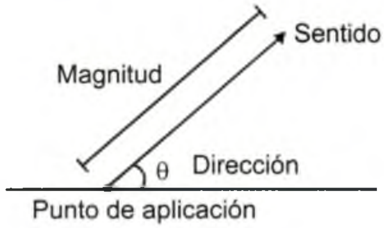
Estas magnitudes se definen con una cantidad numérica acompañada de una unidad.

Ejemplos:

12 h　　56 días　　45 m^3　　60 m^2　　900 kg

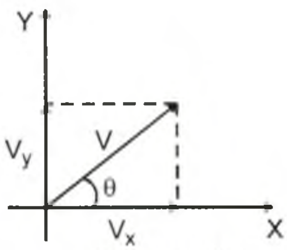
b) Magnitudes vectoriales

Son cantidades físicas que poseen una magnitud, una dirección y un sentido. El punto de inicio de un vector es conocido como punto de aplicación.



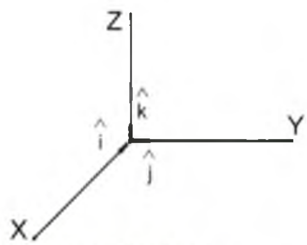
Las cantidades vectoriales o vectores, representan: fuerzas, aceleraciones, velocidades, entre otras cosas. A los vectores que se encuentran en un mismo plano se les llama "**coplanares**".

Los vectores se pueden representar de las siguientes formas:



Forma polar

$$\vec{V} = V \angle \theta$$



Forma cartesiana

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$$

Donde:

V = Magnitud del vector $\vec{V}$

θ = Dirección

V_x = Componente horizontal de $\vec{V}$

V_y = Componente vertical de $\vec{V}$

V_z = Componente sobre el eje "z"

Los vectores "$\hat{i}$" "$\hat{j}$" y "$\hat{k}$" son conocidos como vectores unitarios (Magnitud igual a la unidad), "$\hat{i}$" en la dirección del eje "x", "$\hat{j}$" en la dirección del eje "y", $\hat{k}$ en la dirección del eje "z", dichos vectores son perpendiculares u ortogonales entre sí.

Todo vector $\vec{V} = (V_x, V_y) = V_x \hat{i} + V_y \hat{j}$ representado en la forma polar $\vec{V} = V \angle \theta$ se puede descomponer en sus componentes empleando las siguientes fórmulas:

$$V_x = V \cos \theta$$

$$V_y = V \operatorname{sen} \theta$$

Conocidas las componentes horizontales y verticales de un vector, su magnitud y dirección se obtiene empleando las fórmulas:

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2} \quad \text{y} \quad \theta=\arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

Ejemplo 1

Al descomponer el vector $\vec{V}=120\,\text{km},\ \angle 60°$ en sus componentes se obtiene:

a) $V_x = 60\text{km},\ V_y = 60\sqrt{3}\ \text{km}$

b) $V_x = 60\text{km},\ V_y = 60\text{km}$

c) $V_x = 60\sqrt{3}\ \text{km},\ V_y = 60\text{km}$

d) $V_x = 60\sqrt{3}\ \text{km},\ V_y = 60\sqrt{3}\ \text{km}$

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$V = 120\text{km}$ $\theta = 60°$ $V_x = ?$ $V_y = ?$	$V_x = V\cos\theta$ $V_y = V\,\text{sen}\,\theta$	$V_x = (120\text{km})(\cos 60°)$ $= (120\text{km})\left(\frac{1}{2}\right)$ $= 60\text{km}$ $V_y = (120\text{km})(\text{sen}\ 60°)$ $= (120\text{km})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= 60\sqrt{3}\ \text{km}$	$V_x = 60\ \text{km}$ $V_y = 60\sqrt{3}\ \text{km}$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 2

La magnitud del vector $\vec{A}=-8\,\hat{i}+6\,\hat{j}$ es de:

a) -2 b) 100 c) 10 d) 2

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\vec{A}=-8\,\hat{i}+6\,\hat{j}$ $A_x = -8$ $A_y = 6$ $A = ?$	$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$	$A=\sqrt{(-8)^2+(6)^2}$ $A=\sqrt{64+36}$ $A=\sqrt{100}$ $A=10$	$A=10$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

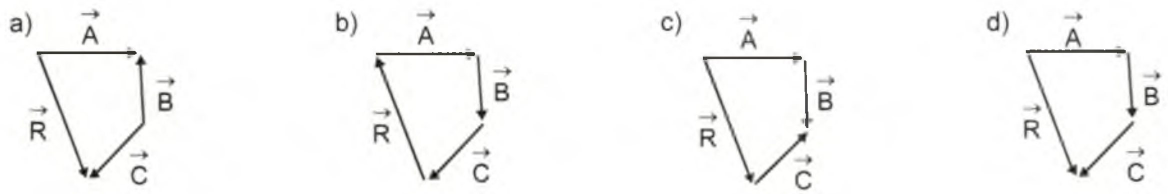
c) Operaciones con vectores

Suma de vectores por el método del polígono

Dados dos o más vectores, para sumarlos por este método, se colocan de manera que el punto de aplicación de cada uno coincida con el punto final del anterior, posteriormente se traza un vector que una el punto de aplicación del primer vector con el punto final del último vector; este vector se conoce como "**vector resultante**".

Ejemplo 1

¿Cuál es el inciso que representa la operación $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$?

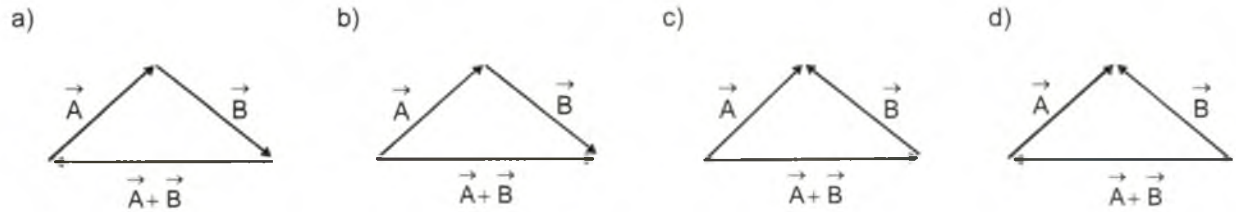


Solución:

El inciso en el que los vectores se encuentran acomodados de manera correcta es el inciso "d", por tanto, corresponde a la respuesta correcta. Cuando se suman dos vectores por el método del polígono, también se conoce como el método del triángulo.

Ejemplo 2

¿Qué figura representa la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

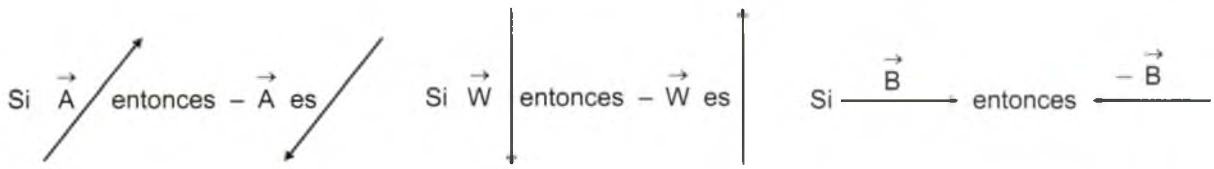


Solución:

El inciso en el que los vectores se encuentran acomodados de manera correcta es el inciso "b", por tanto, corresponde a la respuesta correcta.

Dado el vector $\vec{V}$ existe el vector $-\vec{V}$ cuya magnitud es la misma que $\vec{V}$ pero de sentido opuesto, de manera que $\vec{V}+(-\vec{V})=\vec{0}$.

Ejemplos:



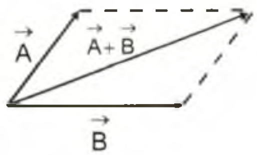
Suma de vectores por el método del paralelogramo

En este método los vectores son concurrentes o tienen el mismo punto de aplicación, para obtener la resultante o el vector equivalente, se trazan segmentos paralelos a los vectores dados, formando así un paralelogramo, el vector resultante es el trazado desde el punto de aplicación de ambos vectores al vértice opuesto del paralelogramo.

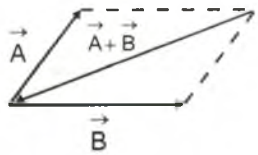
Ejemplo:

¿Cuál de los siguientes incisos ilustra de manera correcta la resultante $\vec{A}+\vec{B}$ de los vectores dados?

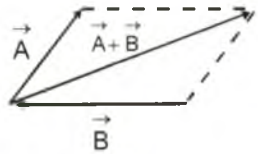
a)



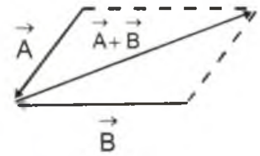
b)



c)



d)



Solución:

El inciso que cumple con lo explicado en el párrafo anterior es el "a", por tanto, corresponde a la respuesta correcta.

Suma de vectores por el método analítico

En este método es necesario descomponer los vectores en sus componentes

Sean los vectores:

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j} \quad ; \quad \vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j} \quad ; \quad \vec{C}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}$$

Entonces,

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \qquad R_x=A_x+B_x+C_x \qquad R_y=A_y+B_y+C_y \qquad \vec{R}=R_x\hat{i}+R_y\hat{j}$$

Ejemplo 1

Si $\vec{A}=-3\hat{i}+7\hat{j}$ y $\vec{B}=-2\hat{i}+5\hat{j}$. ¿Cuál es la magnitud del vector $\vec{A}+\vec{B}$?

a) 3 b) 7 c) 169 d) 13

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$\vec{A}=-3\hat{i}+7\hat{j}$	$R_x=A_x+B_x$	$R_x=(-3)+(-2)=-5$	
$\vec{B}=-2\hat{i}+5\hat{j}$	$R_y=A_y+B_y$	$R_y=7+5=12$	
$A_x=-3$, $A_y=7$	$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$	$R=\sqrt{(-5)^2+(12)^2}$	$R=13$
$B_y=-2$, $B_y=5$		$R=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}$	
$R=?$		$R=13$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

¿Cuál es el vector que resulta de la suma de los vectores $\vec{V_1} = 40\ \angle 120^{o}$ y $\vec{V_2} = 80\ \angle 300^{o}$?

a) $20\sqrt{3}\ \hat{i} - 20\sqrt{3}\ \hat{j}$ b) $-20\ \hat{i} - 20\sqrt{3}\ \hat{j}$ c) $20\ \hat{i} - 20\sqrt{3}\ \hat{j}$ d) $20\ \hat{i} + 20\sqrt{3}\ \hat{j}$

Solución:

Se descomponen ambos vectores en sus componentes.

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$\vec{V_1} = 40\ \angle 120^{o}$	$V_{1x} = V_1 \cos\theta$	$V_{1x} = 40\cos 120^{o} = (40)\left(-\frac{1}{2}\right) = -20$	$R = 20\ \hat{i} - 20\sqrt{3}\ \hat{j}$
$\vec{V_2} = 80\ \angle 300^{o}$	$V_{1y} = V_1 \operatorname{sen}\theta$	$V_{1y} = 40\operatorname{sen}120^{o} = (40)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\sqrt{3}$	
$V_{1x} = ?$	$V_{2x} = V_2 \cos\theta$	$V_{2x} = 80\cos 300^{o} = (80)\left(\frac{1}{2}\right) = 40$	
$V_{1y} = ?$	$V_{2y} = V_2 \operatorname{sen}\theta$	$V_{2y} = 800\operatorname{sen}300^{o} = (80)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -40\sqrt{3}$	
$V_{2x} = ?$	$R_x = V_{1x} + V_{2x}$	$R_x = -20 + 40 = 20$	
$V_{2y} = ?$	$R_y = V_{1y} + V_{2y}$	$R_y = 20\sqrt{3} + (-40\sqrt{3}) = -20\sqrt{3}$	
$R_x = ?$	$R = R_x\ \hat{i} + R_y\ \hat{j}$	$R = 20\ \hat{i} - 20\sqrt{3}\ \hat{j}$	
$R_y = ?$			
$R = ?$			

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

¿Cuál es el vector que resulta de la suma de los vectores $\vec{V_1} = 60\ \angle 120^{o}$ y $\vec{V_2} = 60\ \angle 60^{o}$?

a) $60\sqrt{3}\ \hat{j}$ b) $-60\sqrt{3}\ \hat{j}$ c) $60\sqrt{3}\ \hat{i}$ d) $-60\sqrt{3}\ \hat{i}$

Solución:

Se descomponen ambos vectores en sus componentes.

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$\vec{V_1} = 60\ \angle 120^{o}$	$V_{1x} = V_1 \cos\theta$	$V_{1x} = 60\cos 120^{o} = (60)\left(-\frac{1}{2}\right) = -30$	$R = 60\sqrt{3}\ \hat{j}$
$\vec{V_2} = 60\ \angle 60^{o}$	$V_{1y} = V_1 \operatorname{sen}\theta$	$V_{1y} = 60\operatorname{sen}120^{o} = (60)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30\sqrt{3}$	
$V_{1x} = ?$	$V_{2x} = V_2 \cos\theta$	$V_{2x} = 60\cos 60^{o} = (60)\left(\frac{1}{2}\right) = 30$	
$V_{1y} = ?$	$V_{2y} = V_2 \operatorname{sen}\theta$	$V_{2y} = 60\operatorname{sen}60^{o} = (60)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30\sqrt{3}$	
$V_{2x} = ?$	$R_x = V_{1x} + V_{2x}$	$R_x = -30 + 30 = 0$	
$V_{2y} = ?$	$R_y = V_{1y} + V_{2y}$	$R_y = 30\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$	
$R_x = ?$	$R = R_x\ \hat{i} + R_y\ \hat{j}$	$R = 0\ \hat{i} + 60\sqrt{3}\ \hat{j} = 60\sqrt{3}\ \hat{j}$	
$R_y = ?$			
$R = ?$			

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Producto escalar de vectores

Dado los vectores $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ y $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ se define $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (producto escalar o producto punto) como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad ó \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\alpha$$

Donde:

$\left|\vec{A}\right|$ = Magnitud del vector $\vec{A}$

$\left|\vec{B}\right|$ = Magnitud del vector $\vec{B}$

α = Es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Si los vectores son ortogonales (perpendiculares), entonces el producto escalar es igual a "0".

Ejemplo 1

Si $\vec{A} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ y $\vec{A} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$. ¿Cuál es el valor de $\vec{A} \cdot \vec{B}$?

a) 23 b) 1 c) 11 d) 2

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\vec{A} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = 11$
$\vec{A} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - \hat{k}$		$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-3)(2) + (2)(6) + (-5)(-1)$	
$\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$		$\vec{A} \cdot \vec{B} = -6 + 12 + 5$	
		$\vec{A} \cdot \vec{B} = 11$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

El ángulo que forman dos vectores es de 45°, si sus magnitudes son 50 y 80 respectivamente. ¿Cuál es el valor de su producto escalar?

a) $4000\sqrt{2}$ b) $400\sqrt{2}$ c) $200\sqrt{2}$ d) $2000\sqrt{2}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\left|\vec{A}\right| = 50$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\alpha$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\alpha$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2000\sqrt{2}$
$\left|\vec{B}\right| = 80$		$\vec{A} \cdot \vec{B} = (50)(80)\cos 45°$	
$\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$		$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4000\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2000\sqrt{2}$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. La velocidad es una cantidad de tipo:
 a) Vectorial b) Escalar c) Química d) Positiva

2. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es un escalar?
 a) La aceleración b) El peso c) La masa d) La fuerza

3. Un auto viaja a razón de $85\frac{km}{h}$ a 42° en dirección sureste; esta cantidad representa una magnitud:
 a) numérica b) escalar c) básica d) vectorial

4. La densidad y la temperatura son magnitudes:
 a) numéricas b) escalares c) básicas d) vectoriales

5. Los vectores coplanares, son aquellos que:
 a) se encuentran en planos diferentes
 b) se encuentran en el mismo plano
 c) no existen
 d) son imaginarios

6. ¿Cuál es la magnitud del vector $F = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ en Newtons?
 a) 12N b) 7N c) 5N d) 3N

7. ¿Cuál es la magnitud del vector $-\hat{j}$?
 a) –1 b) 1 c) 0 d) j

8. El producto del número – 5 por el vector $M = -7\hat{i} + 2\hat{j}$ es igual a:
 a) $-35\hat{i} + 2\hat{j}$ b) $-35\hat{i} - 10\hat{j}$ c) $-35\hat{i} + 10\hat{j}$ d) $35\hat{i} - 10\hat{j}$

9. Dado los vectores $W = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ y $Z = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ el resultado de W + Z es:
 a) $7\hat{i} + 2\hat{j}$ b) $7\hat{i} - 2\hat{j}$ c) $\hat{i} + 2\hat{j}$ d) $-\hat{i} - 2\hat{j}$

10. ¿Cuál es el resultado de $\vec{A} - \vec{B}$, si $A = -2\hat{i} + 8\hat{j}$ y $B = 7\hat{i} - 5\hat{j}$?
 a) $9\hat{i} + 13\hat{j}$ b) $9\hat{i} - 13\hat{j}$ c) $-9\hat{i} + 13\hat{j}$ d) $-9\hat{i} - 13\hat{j}$

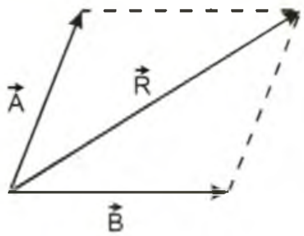
11. ¿Cuál es la magnitud del vector resultante de la suma de los vectores $\vec{A} = 4\hat{i} - 7\hat{j}$ y $\vec{B} = -8\hat{i} + 4\hat{j}$?
 a) 5 b) –5 c) –7 d) 4

12. Las componentes rectangulares de cualquier vector forman siempre un ángulo de:
 a) 0° b) 60° c) 90° d) 180°

13. Si el producto escalar de dos vectores es cero, entonces dichos vectores son:
 a) Concurrentes b) Paralelos c) Perpendiculares d) Oblicuas

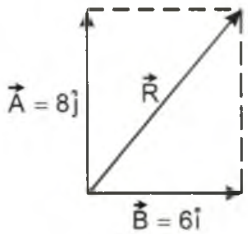
14. Con base en el siguiente diagrama, ¿cuál de las siguientes expresiones representa al vector $\vec{R}$?

a) $\vec{A}+\vec{B}$
b) $\vec{A}-\vec{B}$
c) $-\vec{A}-\vec{B}$
d) $-\vec{A}+\vec{B}$



15. ¿Cuál es el vector resultante de los vectores mostrados en la figura?

a) $14\hat{j}$
b) $2\hat{i}$
c) $8\hat{i}+6\hat{j}$
d) $6\hat{i}+8\hat{j}$



16. ¿Cuál es la magnitud del producto vectorial o producto cruz de 2 vectores?:

a) $A \cdot B\cos\theta$ b) $A+B\cos\theta$ c) $A \cdot B\operatorname{sen}\theta$ d) $A-B\operatorname{sen}\theta$

17. El producto del número 2 por el vector $\vec{N}=5\hat{i}-3\hat{j}$ es igual a:

a) $-10\hat{i}+6\hat{j}$ b) $10\hat{i}-6\hat{j}$ c) $6\hat{i}+10\hat{j}$ d) $6\hat{i}-10\hat{j}$

18. ¿Cuál es el producto del escalar $-\frac{3}{4}$ por el vector $12\hat{z}$?

a) $-9\hat{z}$ b) $9\hat{z}$ c) $-12\hat{z}$ d) $36\hat{z}$

19. El producto escalar de los vectores $\vec{A}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ y $\vec{B}=4\hat{i}+8\hat{j}-2\hat{k}$ es:

a) -12 b) 23 c) -24 d) 24

20. Obtén el resultado del producto escalar de los vectores $\vec{A}=5\hat{i}$ y $\vec{B}=-2\hat{z}$

a) 10 b) 0 c) 1 d) -10

21. La magnitud del vector $5\hat{i}+12\hat{j}$ en Newton es:

a) 13 N b) 15 N c) 10 N d) 13.45 N

22. Si el producto escalar de dos vectores es cero, entonces dichos vectores son:

a) Concurrentes b) Paralelos c) Perpendiculares d) Oblicuas

3 Cinemática

Propósito: el alumno resolverá problemas de movimiento mecánico.

Definiciones y características de los fenómenos mecánicos

Cinemática

Rama de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo originan.

Tienen como característica común el movimiento.

Ejemplos:

La caída de un objeto; el movimiento de un auto; el movimiento que describe un proyectil.

Movimiento rectilíneo uniforme

Movimiento en el cual los cuerpos se desplazan en una trayectoria recta con velocidad constante recorriendo distancias iguales en tiempos iguales.

a) Velocidad media

Se define como la razón entre el desplazamiento de un cuerpo y el intervalo de tiempo en que sucedió dicho desplazamiento.

$$v = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{Tiempo}}$$

En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad media se define como la razón entre la distancia total recorrida por el cuerpo y el tiempo total que tarda en recorrer dicha distancia.

$$v = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo total}} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

Donde: d_1 = Posición inicial t_1 = Tiempo inicial
d_2 = Posición final t_2 = Tiempo final

Si $x_2 - x_1 = d$ y $t_2 - t_1 = t$ entonces, $v = \frac{d}{t}$ además $d = v \cdot t$ y $t = \frac{d}{v}$

Donde: d = Distancia total [m, km, ft]
t = Tiempo total [s , h]
v = Velocidad media $\left[\frac{m}{s}, \frac{km}{h}, \frac{ft}{s}\right]$

Ejemplo 1

Un cuerpo recorre 400 km en 8 horas. ¿Cuál es su velocidad media en ese intervalo de tiempo?

a) $3200\frac{km}{h}$ b) $80\frac{km}{h}$ c) $50\frac{km}{h}$ d) 40 km.h

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
d = 350km t = 5h v = ?	$v = \frac{d}{t}$	$v = \frac{400\,km}{8\,h}$	$v = 50\frac{km}{h}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Un auto va de una ciudad a otra, el viaje lo realiza en dos etapas, en la primera etapa recorre 300 km en 4 horas. En la segunda etapa recorre 600 km en 5 horas. ¿Cuál es la velocidad media que desarrolla el auto en la segunda etapa? ¿Cuál es la velocidad media que desarrolla el auto en todo el viaje?

a) $75\frac{km}{h}$ y $120\frac{km}{h}$ b) $120\frac{km}{h}$ y $100\frac{km}{h}$ c) $100\frac{km}{h}$ y $75\frac{km}{h}$ d) $120\frac{km}{h}$ y $75\frac{km}{h}$

Solución:

La velocidad media del auto en la segunda etapa es:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
d = 600 km t = 5 h v = ?	$v = \frac{d}{t}$	$v = \frac{600\,km}{5\,h}$	$v = 120\frac{km}{h}$

La velocidad media del auto en todo el viaje es:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
d = 300 km + 600 km = 900 km t = 4 h + 5 h = 9 h v = ?	$v = \frac{d}{t}$	$v = \frac{900\,km}{9\,h}$	$v = 100\frac{km}{h}$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

Una partícula viaja a razón de $5\frac{m}{s}$. ¿Qué distancia recorre al cabo de 4 minutos?

a) 20 m b) 75 m c) 120 m d) 1200 m

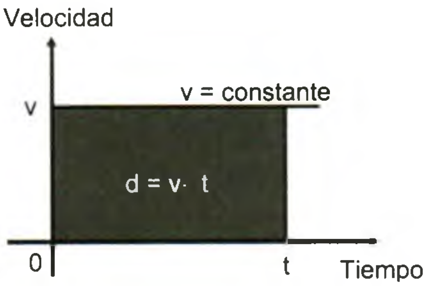
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v = 5\frac{m}{s}$ t = 4 min = 4(60s) = 240 s d = ?	$d = v \cdot t$	$d = \left(5\frac{m}{s}\right) \cdot (240\,s)$	$d = 1200m$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

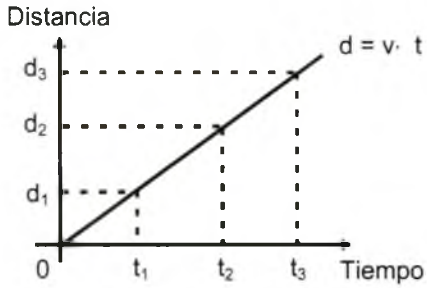
b) Gráficas representativas del movimiento rectilíneo uniforme

Gráfica de v–t



En la gráfica la velocidad "v" permanece constante, el área de la región sombreada representa la distancia "d" recorrida por el móvil en un tiempo "t".

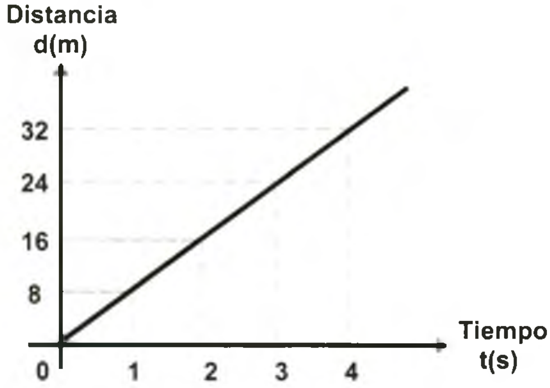
Gráfica de d–t



La gráfica muestra la distancia "d" recorrida por un cuerpo en un tiempo "t". la pendiente de la recta representa la velocidad "v" con que se mueve dicho cuerpo.

Ejemplo 1

La siguiente gráfica describe la distancia "d" recorrida por un cuerpo con respecto al tiempo "t". De acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de la velocidad media del cuerpo en el intervalo de $t_1 = 2\,s$ a $t_2 = 4\,s$?



a) $10\frac{m}{s}$ b) $8\frac{m}{s}$ c) $16\frac{m}{s}$ d) $24\frac{m}{s}$

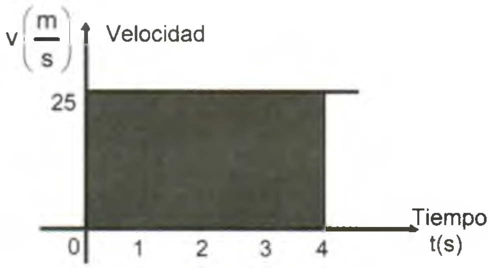
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
Para $t_1 = 2\,s$ $d_1 = 16\,m$ Para $t_2 = 4\,s$ $d_2 = 32\,m$ $v = ?$	$v = \dfrac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$v = \dfrac{32\,m - 16\,m}{4\,s - 2\,s} = \dfrac{16\,m}{2\,s}$	$v = 8\dfrac{m}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El movimiento de un cuerpo se describe en la siguiente gráfica. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 1 s hasta t = 4 s es de 70 m.

b) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 0 hasta t = 2 s es de 60 m.

c) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 1 s hasta t = 3 s es de 50 m.

d) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 0 hasta t = 4 s es de 110 m.

Solución:

La gráfica muestra una velocidad constante de $25\frac{m}{s}$; ésta indica que por cada segundo que transcurre, el cuerpo recorre 25 m, por tanto, la afirmación correcta corresponde al inciso "c", ya que de 1 s a 3 s el intervalo de tiempo es de 2 s, sustituyendo este valor y el de la velocidad en la fórmula "d = v t" se obtiene:

$$d = \left(25\frac{m}{s}\right)(2\,s) = 50\,m$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

En este movimiento los cuerpos se desplazan en una trayectoria rectilínea con aceleración constante.

a) Aceleración

Cambio en la velocidad de un cuerpo con respecto al tiempo.

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Sí $t_f - t_i = t$ la fórmula se expresa como:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

Donde: v_i = Velocidad inicial $\left[\frac{m}{s}, \frac{km}{h}, \frac{ft}{s}\right]$

v_f = Velocidad final $\left[\frac{m}{s}, \frac{km}{h}, \frac{ft}{s}\right]$

t = Intervalo de tiempo [s, h]

a = Aceleración $\left[\frac{m}{s^2}, \frac{km}{h^2}, \frac{ft}{s^2}\right]$

Ejemplo:

Un móvil se mueve a razón de $40\frac{m}{s}$, después de 8 segundos se mueve a razón de $60\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la aceleración del móvil?

a) $2.5\frac{m}{s^2}$ b) $12.5\frac{m}{s^2}$ c) $25\frac{m}{s^2}$ d) $0.25\frac{m}{s^2}$

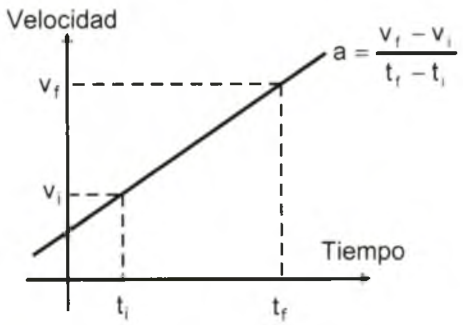
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 40\frac{m}{s}$ $v_f = 60\frac{m}{s}$ $t = 8\ s$ $a = ?$	$a = \frac{v_f - v_i}{t}$	$a = \frac{60\frac{m}{s} - 40\frac{m}{s}}{8\,s} = \frac{20\frac{m}{s}}{8\,s}$ $a = 2.5\frac{m}{s^2}$	$a = 2.5\frac{m}{s^2}$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

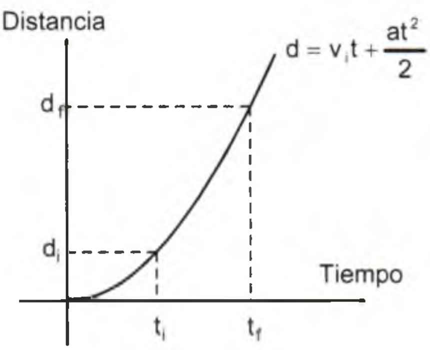
Gráficas representativas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Gráfica de v - t



En la gráfica, la pendiente de la recta representa la aceleración con que se mueve un cuerpo en un intervalo de tiempo.

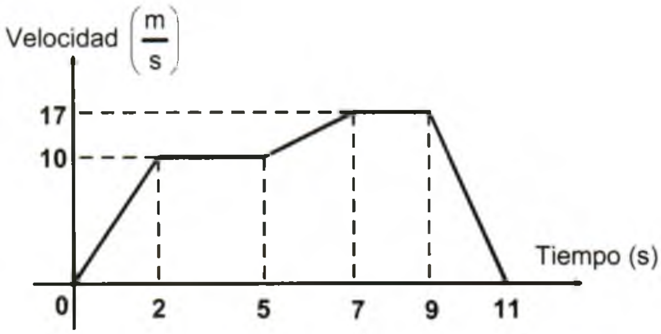
Gráfica de d – t



Gráfica que representa la distancia recorrida por un cuerpo con aceleración constante con respecto al tiempo.

Ejemplo:

La siguiente gráfica describe el movimiento de un cuerpo, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?



I En el intervalo de 0 a 2 segundos y de 9 a 11 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U. y con aceleración de 0.

II En el intervalo de 2 a 5 segundos el cuerpo se mueve con aceleración igual a cero y en el intervalo de 9 a 11 segundos el cuerpo se mueve con aceleración de $-8.5\frac{m}{s^2}$

III En el intervalo de 0 a 2 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U.A. con aceleración de $5\frac{m}{s^2}$ y en el intervalo de 7 a 9 segundos se encuentra en M.R.U.

IV En el intervalo de 2 a 5 segundos y en el intervalo de 7 a 9 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U.A. con aceleraciones de $5\frac{m}{s^2}$ y de $-8.5\frac{m}{s^2}$.

a) I y II b) Sólo IV c) II y III d) Sólo II

Solución.

En el intervalo de 0 a 2 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U.A. con aceleración de $a=\frac{10-0}{2-0}=5\frac{m}{s^2}$.

En el intervalo de 2 a 5 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U. con aceleración de $a=\frac{10-10}{5-2}=0\frac{m}{s^2}$

En el intervalo de 5 a 7 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U.A. con aceleración de $a=\frac{17-10}{7-5}=3.5\frac{m}{s^2}$

En el intervalo de 7 a 9 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U. con aceleración de $a=\frac{17-17}{9-7}=0\frac{m}{s^2}$

En el intervalo de 9 a 11 segundos el cuerpo se encuentra en M.R.U.A. con aceleración de $a=\frac{0-17}{11-9}=-8.5\frac{m}{s^2}$

De acuerdo con los resultados anteriores, la respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Fórmulas para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$v_f = v_i + a \cdot t$ $\qquad v_f^2 = v_i^2 + 2 \cdot a \cdot d$ $\qquad d = v_i \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ $\qquad d = \frac{(v_i + v_f) \cdot t}{2}$

Ejemplo 1

Un cuerpo parte del reposo y se acelera a razón de $2.5\frac{m}{s^2}$. ¿Qué distancia recorre después de 8 segundos?

a) 80 m b) 160 m c) 10 m d) 800 m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 0$ $a = 2.5\frac{m}{s^2}$ $t = 8\,s$ $d = ?$	$d = v_i \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$d = (0)\cdot(8\,s) + \frac{\left(2.5\frac{m}{s^2}\right)\cdot(8\,s)^2}{2}$ $= 0 + \frac{\left(2.5\frac{m}{s^2}\right)\cdot(64\,s^2)}{2}$ $= \frac{160m}{2}$ $= 80\,m$	$d = 80m$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Un móvil se mueve a razón de $15\frac{m}{s}$ y se desacelera a un ritmo de $1\frac{m}{s^2}$. ¿Cuál es su velocidad al cabo de 9 segundos?

a) $20\frac{m}{s}$ b) $24\frac{m}{s}$ c) $-6\frac{m}{s}$ d) $6\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 15\frac{m}{s}$ $a = -1\frac{m}{s^2}$ $t = 9\,s$ $v_f = ?$	$v_f = v_i + a \cdot t$	$v_f = 15\frac{m}{s} + \left(-1\frac{m}{s^2}\right)\cdot(9\,s)$ $= 15\frac{m}{s} - 9\frac{m}{s}$ $v_f = 6\frac{m}{s}$	$v_f = 6\frac{m}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Una ciclista viaja a razón de $12\frac{m}{s}$ y se desacelera a un ritmo de $4\frac{m}{s^2}$. ¿En qué distancia se detiene completamente?

a) 40 m b) 20 m c) 18 m d) 6 m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 12\frac{m}{s}$ $a = -4\frac{m}{s^2}$ $v_f = 0$ $d = ?$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a \cdot d$ Despeje $d = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$	$d = \frac{(0)^2 - \left(12\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(-4\frac{m}{s^2}\right)}$ $d = 18\,m$	$d = 18\,m$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Velocidad y aceleración instantánea

La velocidad instantánea se define como la razón de cambio con respecto a la posición en un tiempo determinado y matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La aceleración instantánea se define como la razón de cambio de la velocidad en un tiempo determinado y matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

La aceleración instantánea se expresa como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo o bien como la segunda derivada de la función posición con respecto al tiempo, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ejemplo

La posición de una partícula viene dada por la función:

$$x = 2t^4 - t^2 + 8t - 1$$

Determina la velocidad y la aceleración instantáneas de la partícula en los tiempos $t_1 = 2s$ y $t_2 = 6s$, si la posición se expresa en metros, la velocidad en $\frac{m}{s}$ y la aceleración en $\frac{m}{s^2}$

Solución:

La velocidad es: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^4 - t^2 + 8t - 1) = 8t^3 - 2t + 8$

Se evalúan los tiempos $t_1 = 2s$ y $t_2 = 6s$ en la función $v = 8t^3 - 2t + 8$, para determinar las velocidades instantáneas:

$$v(2) = 8(2)^3 - 2(2) + 8 = 64 - 4 + 8 = 68\frac{m}{s};$$

$$v(6) = 8(6)^3 - 2(6) + 8 = 1\,728 - 12 + 8 = 1\,724\frac{m}{s}$$

La aceleración es: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(8t^3 - 2t + 8) = 24t^2 - 2$

Ahora los tiempos $t_1 = 2s$ y $t_2 = 6s$, se evalúan en $a = 24t^2 - 2$ para determinar las aceleraciones instantáneas:

$$a(2) = 24(2)^2 - 2 = 96 - 2 = 94\frac{m}{s^2}$$

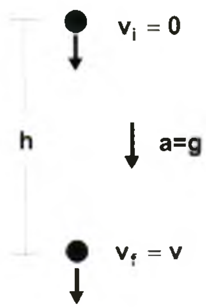
$$a(6) = 24(6)^2 - 2 = 864 - 2 = 862\frac{m}{s^2}$$

Caída libre

En este movimiento los cuerpos describen una trayectoria rectilínea de arriba hacia abajo con aceleración constante e igual a la gravedad.

$$a = g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

Todos los cuerpos en caída libre son acelerados hacia el centro de la Tierra y su velocidad aumenta de manera uniforme con respecto al tiempo.



Fórmulas

$v = g \cdot t$

$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$

$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$

Donde

t = Tiempo $[s]$

h = Altura $[m]$

v = Velocidad $\left[\frac{m}{s}\right]$

$g = 9.81\frac{m}{s^2}$

Ejemplo 1

Se deja caer un cuerpo desde la parte más alta de un edificio y tarda 4 segundos en llegar al suelo, calcular la altura del edificio.

a) 39.24 m b) 78.48 m c) 156.96m d) 784.8m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$g = 9.81\frac{m}{s^2}$		$h = \frac{\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)\cdot(4\,s)^2}{2}$	
$t = 4\,s$	$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$	$= \frac{\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)\cdot(16\,s^2)}{2}$	$h = 78.48m$
$h = ?$		$h = 78.48m$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

Un objeto es soltado desde una altura de 80m. ¿Cuánto tiempo le toma al objeto llegar al suelo? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) 10 s b) 5 s c) 4 s d) 1 s

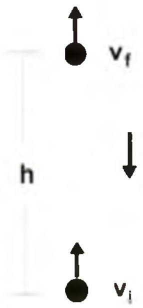
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$h = 80\,m$			
$g = 10\frac{m}{s^2}$	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$	$t = \sqrt{\frac{2(80\,m)}{10\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{\frac{160\,m \cdot s^2}{10\,m}}$	$t = 4\,s$
$t = ?$		$t = \sqrt{16\,s^2} = 4\,s$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Tiro vertical

Movimiento rectilíneo en el cual los cuerpos describen una trayectoria de abajo hacia arriba con aceleración constante e igual a la gravedad.
En este movimiento la velocidad de los cuerpos disminuye de manera uniforme conforme el cuerpo va ascendiendo, esto debido a que la gravedad es contraria a la dirección del movimiento. Cuando la velocidad final del cuerpo es cero, en ese instante el cuerpo alcanza su altura máxima.



Fórmulas

$$v_f = v_i - g \cdot t$$
$$v_f^2 = v_i^2 - 2 \cdot g \cdot h$$
$$h = v_i \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$
$$h_{max} = \frac{v_i^2}{2 \cdot g}$$
$$t_s = \frac{v_i}{g}$$

Donde:

v_i = Velocidad inicial $\left[\frac{m}{s}\right]$

v_f = Velocidad finial $\left[\frac{m}{s}\right]$

h = Altura $[m]$

h_{max} = Altura máxima $[m]$

t = Tiempo $[s]$

t_s = Tiempo de subida $[s]$

Ejemplo 1

Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de $30\frac{m}{s}$. Cuando su velocidad es igual a un tercio de su velocidad de lanzamiento, ¿a qué altura se encuentra la pelota? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$.

a) 1 m b) 40 m c) 400 m d) 100 m

Solución:

Datos

$v_i = 30\frac{m}{s}$

$v_f = \frac{1}{3} \cdot \left(30\frac{m}{s}\right) = 10\frac{m}{s}$

$g = 10\frac{m}{s^2}$

$h = ?$

Fórmula

$v_f^2 = v_i^2 - 2 \cdot g \cdot h$

Despeje:

$h = \frac{v_i^2 - v_f^2}{2 \cdot g}$

Sustitución

$$h = \frac{\left(30\frac{m}{s}\right)^2 - \left(10\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot \left(10\frac{m}{s^2}\right)}$$

$$h = \frac{900\frac{m^2}{s^2} - 100\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = \frac{800\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}}$$

$h = 40\,m$

Resultado

$h = 40m$

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 2

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de $90\frac{m}{s}$. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?

a) 9.17s b) 4.5s c) 0.1s d) 1s

Solución:

Datos

$v_i = 90\frac{m}{s}$

$g = 9.81\frac{m}{s^2}$

$t = ?$

Fórmula

$t_s = \frac{v_i}{g}$

Sustitución

$$t_s = \frac{90\frac{m}{s}}{9.81\frac{m}{s^2}}$$

$t_s = 9.17s$

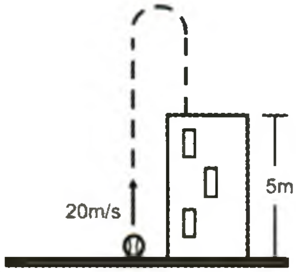
Resultado

$t_s = 9.17s$

La respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Ejemplo 3

Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de $20\frac{m}{s}$. En su camino hacia abajo, es atrapada en un punto situado a 5.0 metros por encima del lugar desde donde fue lanzada.



¿Qué rapidez tiene la piedra cuando fue atrapada?

a) $-17.4\frac{m}{s}$ b) $-16.3\frac{m}{s}$ c) $-15.2\frac{m}{s}$ d) $-14.1\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$h = 5m$ $v_i = 20\frac{m}{s}$ $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ $v_f = ?$	$v_f^2 = v_i^2 - 2g \cdot h$ Se despeja "v_f" $v_f = \pm\sqrt{v_i^2 - 2g \cdot h}$	$v_f = \pm\sqrt{(20\frac{m}{s})^2 - 2(9.8\frac{m}{s^2})(5m)}$ $v_f = \pm\sqrt{400\frac{m^2}{s^2} - 98\frac{m^2}{s^2}}$ $v_f = \pm\sqrt{302\frac{m^2}{s^2}}$ $v_f = \pm 17.4\frac{m}{s}$	$v_f = -17.4\frac{m}{s}$

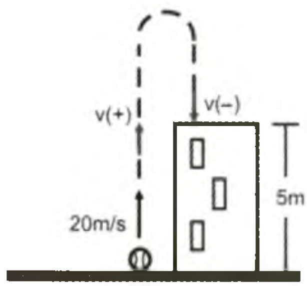
El signo de la velocidad es negativo porque ésta se encuentra descendiendo y su magnitud es de $17.4\frac{m}{s}$. La respuesta correcta es el inciso "a".

¿Cuánto tiempo le tomó el recorrido?

a) 3.9s b) 3.8s c) 3.7s d) 3.6s

Solución:

La rapidez a los 5 metros es la misma cuando la pelota va hacia arriba que cuando va hacia abajo, lo que cambia es el sentido del vector, si al igual que en el reactivo anterior, se considera al ascenso como positivo y al descenso como negativo, veamos lo que sucede:



Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 20\frac{m}{s}$ $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ $v_f = -17.4\frac{m}{s}$ $t = ?$	$v_f = v_i - g \cdot t$ Se despeja "t" $t = \frac{v_i - v_f}{g}$	$t = \frac{20\frac{m}{s} - (-17.4\frac{m}{s})}{9.8\frac{m}{s^2}}$ $t = \frac{37.4\frac{m}{s}}{9.8\frac{m}{s^2}} = 3.8s$	$t = 3.8s$

A la pelota le lleva 3.8 segundos en realizar el recorrido, justo antes de quedarse atrapada. La respuesta correcta es el inciso "b".

Ejemplo 4

Un cañón antiaéreo dispara verticalmente hacia arriba una granada con una velocidad inicial de $500\frac{m}{s}$.

Despreciando el rozamiento del aire, calcular:

¿Cuál es la máxima altura que puede alcanzar la granada?

a) 12.6km b) 12.7km c) 12.8km d) 12.9km

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución y resultado
$v_i = 500\frac{m}{s}$ $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ $h_{max} = ?$	$h_{max} = \frac{v_i^2}{2g}$	$h_{max} = \frac{(500\frac{m}{s})^2}{2(9.8\frac{m}{s^2})}$ $h_{max} = \frac{250000\frac{m^2}{s^2}}{19.6\frac{m}{s^2}} = 12755.10m \approx 12.8km$

La altura máxima que alcanza el proyectil es 12755 metros, pero se aproxima a 12.8 kilómetros. La respuesta correcta es el inciso "c".

¿Cuál es la velocidad instantánea al final de 60 segundos?

a) $-88\frac{m}{s}$ b) $-89\frac{m}{s}$ c) $-90\frac{m}{s}$ d) $-91\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 500\frac{m}{s}$ $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ $t = 60s$ $v_f = ?$	$v_f = v_i - g \cdot t$	$v_f = 500\frac{m}{s} - (9.8\frac{m}{s^2})(60s)$ $v_f = 500\frac{m}{s} - 588\frac{m}{s}$ $v_f = -88\frac{m}{s}$	$v_f = -88\frac{m}{s}$

El signo negativo del resultado de la velocidad es porque la munición se dirige hacia abajo. La respuesta correcta es el inciso "a".

¿Cuál es el tiempo que tarda en llegar a esa altura?

a) 50.6s b) 50.7s c) 50.8s d) 51.02s

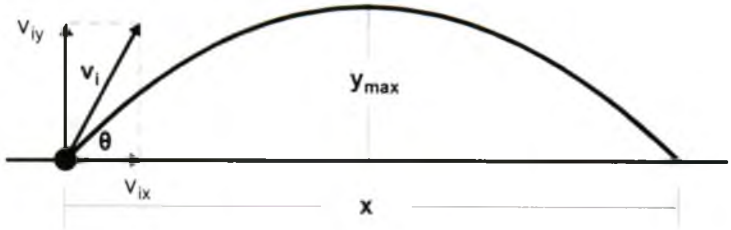
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 500\frac{m}{s}$ $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ $t_s = ?$	$t_s = \frac{v_i}{g}$	$t_s = \frac{500\frac{m}{s}}{9.8\frac{m}{s^2}}$ $t_s = 51.02s$	$t_s = 51.02s$

El tiempo que le lleva a la munición llegar a la altura máxima son 51.02 segundos. La respuesta correcta es el inciso "d".

Movimiento de proyectiles (Tiro parabólico)

En este movimiento los cuerpos son disparados con una velocidad; ésta forma un ángulo de inclinación con la horizontal.



v_i = Velocidad inicial.

θ = Ángulo de inclinación.

v_{ix} = componente horizontal de la velocidad inicial.

v_{iy} = Componente vertical de la velocidad inicial.

Componentes de la velocidad inicial

$$v_{ix} = v_i \cdot \cos\theta$$

$$v_{iy} = v_i \cdot \text{sen}\theta$$

Características del tiro parabólico

La velocidad del proyectil para un tiempo "t" de vuelo es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Donde:

$$v_x = v_{ix} = v_i \cdot \cos\theta \quad \text{y} \quad v_y = v_{iy} - gt = v_i \cdot \text{sen}\theta - gt$$

La componente horizontal de la velocidad es constante e igual a la componente inicial, la componente vertical disminuye conforme el proyectil asciende. Cuando la componente vertical del la velocidad es cero, el proyectil en ese instante alcanza su altura máxima.

La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene mediante la fórmula:

$$y_{max} = \frac{v_i^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{2 \cdot g} = \frac{(v_i \cdot \text{sen}\theta)^2}{2 \cdot g}$$

El alcance horizontal se obtiene con la fórmula:

$$x = \frac{v_i^2 \cdot \text{sen}2\theta}{g}$$

El tiempo que tarda el proyectil en alcanzar su altura máxima se obtiene con la fórmula:

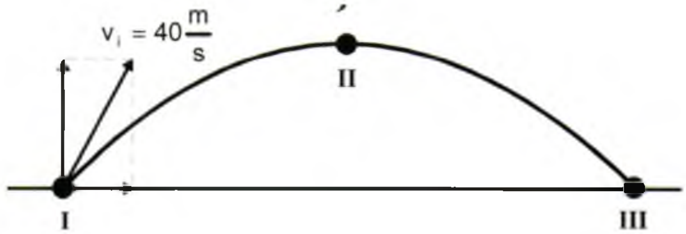
$$t = \frac{v_i \cdot \text{sen}\theta}{g}$$

El tiempo total de vuelo de un proyectil es el doble del tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima.

La magnitud de la velocidad con que es disparado un proyectil es igual a la magnitud de la velocidad con que se impacta con la superficie, suponiendo que ésta es completamente horizontal.

Ejemplo 1

Un proyectil es disparado con una velocidad de $40\frac{m}{s}$ y un ángulo de inclinación con respecto a la horizontal de 60°.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I La componente horizontal de la velocidad en el punto **II** es de $20\frac{m}{s}$ y la componente vertical es cero.

II La componente horizontal y vertical de la velocidad en el punto **I** es de $20\frac{m}{s}$ y $34.64\frac{m}{s}$ respectivamente.

III La componente horizontal de la velocidad en el punto **III** es cero y la componente vertical es de $20\frac{m}{s}$.

IV En el punto **II** ambas componentes de la velocidad son iguales.

a) Sólo III b) Sólo IV c) III y IV d) I y II

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultados
$v_i = 40\frac{m}{s}$	$v_{ix} = v_i \cdot \cos\theta$ $v_{iy} = v_i \cdot \text{sen}\theta$	$v_{ix} = \left(40\frac{m}{s}\right)\cdot\cos 60°$	
$\theta = 60°$		$= \left(40\frac{m}{s}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 20\frac{m}{s}$	$v_{ix} = 20\frac{m}{s}$
$v_{ix} = ?$	$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5$	$v_{iy} = \left(40\frac{m}{s}\right)\cdot \text{sen}60°$	$v_{iy} = 34.64\frac{m}{s}$
$v_{iy} = ?$	$\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$	$= \left(40\frac{m}{s}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 34.64\frac{m}{s}$	

Con los resultados anteriores se observa que las afirmaciones correctas son la **I** y **II**, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

Una bala de cañón es disparada en tiro parabólico, con una velocidad horizontal de $24\frac{m}{s}$. ¿Cuál es su alcance si permanece 15 segundos en el aire?

a) 6250m b) 6.25m c) 62.5m d) 625m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_x = 24\frac{m}{s}$ $t = 15s$ $x = ?$	$x = v_x t$	$x = \left(24\frac{m}{s}\right)(15s) = 360\ m$	$x = 360\ m$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Un proyectil se dispara con una velocidad de $50\frac{m}{s}$ y formando un ángulo de 45° con la horizontal, ¿cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? $\left(\text{Considea } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$.

a) 6250m b) 6.25m c) 62.5m d) 625m

Solución:

Datos

$v_i = 50\frac{m}{s}$

$\theta = 45°$

$g = 10\frac{m}{s^2}$

$y_{max} = ?$

Fórmula

$$y_{max} = \frac{v_i^2 \cdot sen^2\theta}{2 \cdot g}$$

Sustitución y resultado

$$y_{max} = \frac{\left(50\frac{m}{s}\right)^2 \cdot sen^2 45°}{2 \cdot \left(10\frac{m}{s^2}\right)} = \frac{\left(2500\frac{m^2}{s^2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{20\frac{m}{s^2}}$$

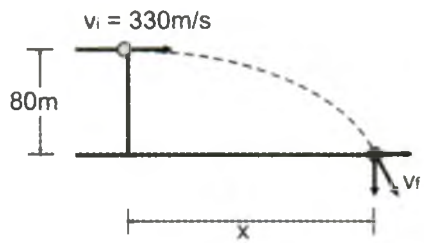
$$y_{max} = \frac{1250\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 62.5m$$

$$y_{max} = 62.5m$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 4

Desde la cima de un fallón de 80 metros de alto se dispara un proyectil en dirección horizontal, con una velocidad de $330\frac{m}{s}$.



Encuentra:

¿Cuánto tiempo necesitará para dar con el nivel del suelo en la base del risco?

a) 4.03s b) 4.04s c) 4.05s d) 4.06s

Solución:

Datos

$y = 0$

$g = 9.8\frac{m}{s^2}$

$h = 80m$

$t = ?$

Fórmula

$$y = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Se despeja "t"

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}$$

Sustitución

$$t = \sqrt{\frac{2(80m-0)}{9.8\frac{m}{s^2}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{160m}{9.8\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{16.32s^2}$$

$$t = 4.04s$$

Resultado

$t = 4.04s$

El tiempo de vuelo del proyectil es de 4.04 segundos. La respuesta correcta es el inciso "b".

¿A qué distancia del pie del risco será el choque?

a) 1320m b) 1352m c) 1330m d) 1335m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_i = 330\frac{m}{s}$ $t = 4.04s$ $x = ?$	$x = v_i \cdot t$	$x = (330\frac{m}{s})(4.04s)$ $x = 1332.2\,m \approx 1330m$	$x = 1330\,m$

La distancia a la que se impacta es de 1332.2 metros, pero se redondea a 1330 metros. La respuesta correcta es el inciso "c".

¿Con qué velocidad será el choque?

a) $338\frac{m}{s}$ b) $336\frac{m}{s}$ c) $334\frac{m}{s}$ d) $332\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustituciones y resultado
$v_i = 330\frac{m}{s}$ $t = 4.04s$ $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ $v = ¿?$	Comp. horizontal $v_x = v_i$ Comp. vertical $v_y = -g \cdot t$ Magnitud $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$v_x = 330\frac{m}{s}$ $v_y = -(9.8\frac{m}{s^2})(4.04s) = -39.59\frac{m}{s}$ $v = \sqrt{(330\frac{m}{s})^2 + (-39.59\frac{m}{s})^2}$ $v = \sqrt{108900\frac{m^2}{s^2} + 1567.36\frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{110467.36\frac{m^2}{s^2}}$ $v = 332.3\frac{m}{s}$

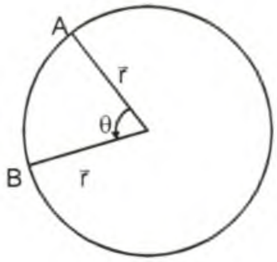
La velocidad con la que se impacta el proyectil es de $332.3\frac{m}{s}$. La respuesta correcta es el inciso "d".

Movimiento circular

Un cuerpo describe un movimiento circular cuando éste realiza un giro alrededor de un punto fijo llamado eje de rotación, este movimiento se efectúa en un mismo plano y es bidimensional.

a) Eje de rotación

Es un punto fijo a través del cual se realizan los giros de un movimiento circular. En el caso de los engranes, discos, poleas y llantas el eje de rotación, se encuentra dentro del mismo cuerpo, pero en el caso de una honda, el eje de rotación se encuentra fuera de ésta, hasta el otro extremo de la piedra.



Donde:

$\vec{r}$ = vector de posición
θ = desplazamiento angular
A = posición inicial
B = posición final

b) Frecuencia (f)

Es el número de revoluciones o vueltas completas que realiza un cuerpo por unidad de tiempo. La frecuencia se expresa en $\frac{rev}{s}$ o bien $\frac{rev}{min}$ (r.p.m.)

c) Periodo (T)
Es el tiempo que un cuerpo tarda en dar una vuelta completa o revolución. El periodo se expresa en segundos (s) o bien en minutos (min.)

Movimiento circular uniforme

Este tipo de movimiento es producido cuando un objeto se mueve con velocidad angular constante y recorre ángulos iguales en tiempos iguales.

a) Velocidad angular
La velocidad angular es el cociente del desplazamiento angular que describe un objeto con respecto al tiempo que tarda en efectuarlo.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{o} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad \text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donde:

ω = Velocidad angular $\left[\frac{rad}{s}\right]$

θ = Desplazamiento angular [rad]

t = Tiempo en el que se efectúa el movimiento [s]

f = Frecuencia $\left[\frac{rev}{s}\right]$

T = Periodo [s]

Nota:

2π rad = 360° = 1 revolución (rev)

Por tanto:

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3° = 57°18'$$

Ejemplo 1

Un objeto que se hace girar, se desplaza 24 radianes en 0.4 segundos. ¿Cuál es la velocidad angular de dicho objeto?

a) $60\frac{rad}{s}$ b) $40\frac{rad}{s}$ c) $12\frac{rad}{s}$ d) $9.6\frac{rad}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
θ = 24 rad t = 0.4 s ω = ?	$\omega = \frac{\theta}{t}$	$\omega = \frac{24 \text{ rad}}{0.4 \text{ s}} = 60\frac{rad}{s}$	$\omega = 60\frac{rad}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Una polea gira a razón de 30 r.p.m. durante 4 minutos. ¿Cuál es el desplazamiento de la polea durante este tiempo?

a) 2300rad b) 753.6rad c) 74.5rad d) 44.6rad

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
f = 30 r.p.m t = 4 min = 240s θ = ?	Se obtiene la velocidad angular $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ Además $\omega = \frac{\theta}{t}$ Despejando el desplazamiento "θ" $\theta = \omega \cdot t$	Convirtiendo $30\frac{rev}{min} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0.5\ \frac{rev}{s}$ $\omega = 2\ (3.14)\left(0.5\frac{rev}{s}\right) = 3.14\ \frac{rad}{s}$ $\theta = \left(3.14\frac{rad}{s}\right)(240 \text{ s}) = 753.6\text{rad}$	θ = 753.6rad

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

b) Velocidad tangencial

La velocidad tangencial de un cuerpo está dada por:

$$v_t = \omega \cdot r \qquad \text{o} \qquad v_t = 2\pi \cdot f \cdot r$$

Donde: ω = velocidad angular $\left[\frac{rad}{s}\right]$ $\quad$ v_t = velocidad tangencial $\left[\frac{m}{s}\right]$

r = radio de la circunferencia $[m]$ $\quad$ f = frecuencia $[Hz]$

Ejemplo

Un ventilador de 80 cm de diámetro gira a razón de 90 r.p.m. ¿Cuál es la velocidad tangencial del ventilador?

a) $3.768\frac{m}{s}$ b) $9.42\frac{m}{s}$ c) $7.536\frac{m}{s}$ d) $2.40\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$f = 90$ r.p.m $d = 80cm = 0.8m$ $r = 40cm = 0.4m$ $\theta = ?$	$v_t = 2\pi \cdot f \cdot r$ $v_t = \omega \cdot r$	Convirtiendo $90\frac{rev}{min} \times \frac{1\ min}{60\,s} = 1.5\frac{rev}{s}$ $\omega = 2\,(3.14)\left(1.5\frac{rev}{s}\right) = 9.42\frac{rad}{s}$ $v_t = \left(9.42\frac{rad}{s}\right)(0.4m) = 3.768\frac{m}{s}$	$v_t = 3.768\frac{m}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Movimiento circular uniformemente acelerado

En este movimiento los objetos siguen una trayectoria circular y su velocidad angular no permanece constante, es decir que varía cada unidad de tiempo, mientras que su aceleración angular permanece constante.

a) Aceleración angular (α)

Es el cambio en la velocidad angular que un objeto sufre con respecto a un lapso de tiempo.

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

Sí $t_f - t_i = t$ la fórmula se expresa como:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

Donde:

ω_i = Velocidad angular inicial $\left[\frac{rad}{s}\right]$

ω_f = Velocidad angular final $\left[\frac{rad}{s}\right]$

t = Intervalo de tiempo $[s]$

α = Aceleración angular $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$

Ejemplo:

Una rueda partiendo del reposo adquiere una velocidad de $1050\frac{rad}{s}$, en 2.5 minutos. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?

a) $2625\frac{rad}{s^2}$ b) $420\frac{rad}{s^2}$ c) $35\frac{rad}{s^2}$ d) $7\frac{rad}{s^2}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\omega_i = 0$ $\omega_f = 1050\ \frac{rad}{s}$ $t = 2.5\ min = 150\ s$ $\alpha = ?$	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$	$\alpha = \frac{1050\frac{rad}{s} - 0}{150\,s} = 7\frac{rad}{s^2}$	$\alpha = 7\frac{rad}{s^2}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Aceleración tangencial (a_t)

La aceleración tangencial de un cuerpo está dada por:

$$a_t = \alpha \cdot r$$

Donde: α = aceleración angular $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ a_t = aceleración tangencial $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

r = radio de la circunferencia $[m]$

Ejemplo

Un disco de 60 cm de radio parte del reposo y adquiere una velocidad de 1500rpm, en 1.5 minutos. ¿Cuál es la aceleración tangencial del disco?

a) $2.5\frac{m}{s^2}$ b) $1.7\frac{m}{s^2}$ c) $1.53\frac{m}{s^2}$ d) $1.04\frac{m}{s^2}$

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustituciones	Resultado
$\omega_i = 0$ $\omega_f = 1500\ \frac{rev}{min} = 25\frac{rev}{s} = 50\pi\frac{rad}{s}$ $t = 1.5\ min = 90\ s$ $r = 60cm = 0.6\ m$ $a_t = ?$	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$ $a_t = \alpha \cdot r$	$\alpha = \frac{50\pi\frac{rad}{s} - 0}{90\,s} = 1.74\frac{rad}{s^2}$ $a_t = \left(1.74\frac{rad}{s^2}\right)(0.6m) = 1.04\frac{m}{s^2}$	$a_t = 1.04\frac{m}{s^2}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Fórmulas para el movimiento circular uniformemente acelerado

$\omega_f = \omega_i + \alpha \cdot t$ $\qquad \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \theta$ $\qquad \theta = \omega_i \cdot t + \dfrac{\alpha \cdot t^2}{2}$ $\qquad \theta = \dfrac{(\omega_i + \omega_f) \cdot t}{2}$

Donde:

ω_i = Velocidad angular inicial $\left[\dfrac{rad}{s}\right]$

ω_f = Velocidad angular final $\left[\dfrac{rad}{s}\right]$

t = Intervalo de tiempo [s]

α = Aceleración angular $\left[\dfrac{rad}{s^2}\right]$

θ = Desplazamiento angular [rad]

Ejemplo 1

Un volante que parte del reposo se acelera angularmente a razón de $1.5\dfrac{rad}{s^2}$. ¿Cuál es desplazamiento angular del volante después de 6 segundos?

a) 27 rad b) 9 rad c) 54 rad d) 81 rad

Solución:

Datos

$\omega_i = 0$

$t = 6$ s

$\alpha = 1.5\dfrac{rad}{s^2}$

$\theta = ?$

Fórmula

$$\theta = \omega_i \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$$

Sustitución

$$\theta = (0)\cdot(6s) + \frac{\left(1.5\frac{rad}{s^2}\right)(6s)^2}{2}$$

$$\theta = 0 + \frac{\left(1.5\frac{rad}{s^2}\right)(36\,s^2)}{2} = 27 \text{ rad}$$

Resultado

$\theta = 27$ rad

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Una hélice se mueve a razón de $90\dfrac{rad}{s}$ y sufre una desaceleración de $2\dfrac{rad}{s^2}$. ¿Cuál es su velocidad angular al cabo de 10 segundos?

a) $120\dfrac{rad}{s}$ b) $84\dfrac{rad}{s}$ c) $70\dfrac{rad}{s}$ d) $8\dfrac{rad}{s}$

Solución:

Datos

$\omega_i = 90\dfrac{rad}{s}$

$\alpha = -2\dfrac{rad}{s^2}$

$t = 10$ s

$\omega_f = ?$

Fórmula

$$\omega_f = \omega_i + \alpha \cdot t$$

Sustitución

$$\omega_f = 90\frac{rad}{s} + \left(-2\frac{rad}{s^2}\right)(10\,s)$$

$$\omega_f = 90\frac{rad}{s} - 20\frac{rad}{s} = 70\frac{rad}{s}$$

Resultado

$\omega_f = 70\dfrac{rad}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 3

Un engrane se gira razón de $14\frac{rad}{s}$ y se desacelera a un ritmo de $3.5\frac{rad}{s^2}$. ¿Cuál es el desplazamiento que tiene el engrane antes de detenerse completamente?

a) 686 rad b) 196 rad c) 70 rad d) 28 rad

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\omega_i = 14\frac{rad}{s}$ $\omega_f = 0$ $\alpha = 3.5\frac{rad}{s^2}$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\cdot\alpha\cdot\theta$	$(0)^2 = \left(14\frac{rad}{s}\right)^2 + 2\left(-3.5\frac{rad}{s^2}\right)\theta$ $0 = 196\frac{rad^2}{s^2} - \left(7\frac{rad}{s^2}\right)\theta$ $\theta = \frac{-196\frac{rad^2}{s^2}}{-7\frac{rad}{s^2}} = 28\,rad$	$\theta = 28$ rad

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 4

Una polea de 5 centímetros de radio, que pertenece a un motor, está girando a razón de $30\frac{rev}{s}$ y disminuye su velocidad uniformemente hasta $20\frac{rev}{s}$ en 2 segundos. Determina:

¿Cuál es la aceleración angular del motor?

a) $-4\frac{rev}{s^2}$ b) $-5\frac{rev}{s^2}$ c) $-6\frac{rev}{s^2}$ d) $-7\frac{rev}{s^2}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\omega_i = 30\frac{rev}{s}$ $\omega_f = 20\frac{rev}{s}$ t = 2s α = ?	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$	$\alpha = \frac{20\frac{rev}{s} - 30\frac{rev}{s}}{2s}$ $\alpha = \frac{-10\frac{rev}{s}}{2s} = -5\frac{rev}{s^2}$	$\alpha = -5\frac{rev}{s^2}$

El signo negativo de la aceleración angular es porque el motor disminuye su velocidad angular en un lapso de 2 segundos. La respuesta correcta es el inciso "b".

¿Cuál es el número de revoluciones que efectúa en este tiempo?

a) 48rev b) 49rev c) 50rev d) 51rev

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\omega_i = 30\frac{rev}{s}$ $\omega_f = 20\frac{rev}{s}$ t = 2s θ = ?	$\theta = \frac{(\omega_f + \omega_i)\cdot t}{2}$	$\theta = \frac{\left(20\frac{rev}{s} + 30\frac{rev}{s}\right)(2s)}{2}$ $\theta = \frac{100rev}{2} = 50rev$	$\theta = 50\,rev$

El número de vueltas o revoluciones que da la polea son 50. La respuesta correcta es el inciso "c".

Ejercicios

1. Un cuerpo recorre 1080m en 3 min. ¿Cuál es su velocidad media en ese intervalo de tiempo?

   a) $6\frac{m}{s}$ b) $3\frac{m}{s}$ c) $160\frac{m}{s}$ d) $360\frac{m}{s}$

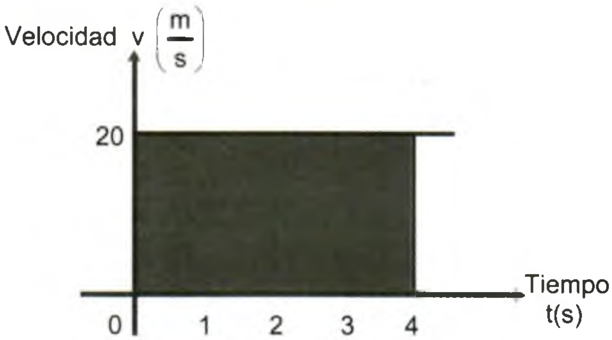
2. Un móvil recorre 600m en 9s, después recorre 100 m en 5s. ¿Cuál es la velocidad media del móvil en todo el recorrido?

   a) $175\frac{m}{s}$ b) $125\frac{m}{s}$ c) $50\frac{m}{s}$ d) $60\frac{m}{s}$

3. Una corredora se desplaza sobre una pista circular de 1200m, si la corredora tarda 3 minutos en recorrer la pista (salir y llegar al mismo punto), ¿cuál es su velocidad y rapidez, respectivamente?

   a) $v = 0\frac{m}{s}$, $r = 0\frac{m}{s}$ b) $v = 6.67\frac{m}{s}$, $r = 0\frac{m}{s}$ c) $v = 0\frac{m}{s}$, $r = 6.67\frac{m}{s}$ d) $v = 6.67\frac{m}{s}$, $r = 6.67\frac{m}{s}$

4. El movimiento de un cuerpo se describe en la siguiente gráfica. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



   a) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 1 s hasta t = 4 s es de 100 m.
   b) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 0 hasta t = 2 s es de 10 m.
   c) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 1 s hasta t = 3 s es de 45m.
   d) La distancia recorrida por el cuerpo desde t = 0 hasta t = 4 s es de 80m.

5. Un móvil se mueve a razón de $40\frac{m}{s}$, después de 10 segundos se mueve a razón de $60\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la aceleración del móvil?

   a) $-10\frac{m}{s^2}$ b) $10\frac{m}{s^2}$ c) $-2\frac{m}{s^2}$ d) $2\frac{m}{s^2}$

6. Una bicicleta viaja a una velocidad de $30\frac{m}{s}$ y se frena en 10 segundos. ¿Cuál es el valor de su desaceleración?

   a) $3\frac{m}{s^2}$ b) $0.33\frac{m}{s^2}$ c) $-3\frac{m}{s^2}$ d) $-0.03\frac{m}{s^2}$

7. Un auto que viaja a $144\frac{km}{h}$ se detiene en 8 segundos, ¿cuál es el valor de su aceleración?

a) $-5\frac{m}{s^2}$ b) $5\frac{m}{s^2}$ c) $-18\frac{m}{s^2}$ d) $18\frac{m}{s^2}$

8. Un cuerpo parte del reposo y se acelera a razón de $3\frac{m}{s^2}$. ¿Qué distancia recorre después de 4s?

a) 24 m b) 48 m c) 8 m d) 6 m

9. La función $x(t) = 2t^3 + 5t^2 - 4t + 8$, determina la posición de una partícula. Encuentra la posición y la velocidad instantánea de dicha partícula a los 2 segundos.

a) 40m, $36\frac{m}{s}$ b) 36m, $40\frac{m}{s}$ c) 63m, $60\frac{m}{s}$ d) 36m, $80\frac{m}{s}$

10. La posición de una partícula está dada por la función $x = \frac{1}{2}t^4 - 5t + 2$, determina la velocidad y la aceleración instantánea a los 3 segundos.

a) $49\frac{m}{s}$, $54\frac{m}{s^2}$ b) $49\frac{m}{s}$, $45\frac{m}{s^2}$ c) $54\frac{m}{s}$, $59\frac{m}{s^2}$ d) $94\frac{m}{s}$, $49\frac{m}{s^2}$

11. La posición de una partícula viene dada por la función: $x = 5t^3 - 4t^2 - 9t + 3$, determina la posición y velocidad instantáneas de la partícula a los 2 segundos. La posición se expresa en metros y el tiempo en segundos.

a) 6m, $25\frac{m}{s}$ b) 9m, $35\frac{m}{s}$ c) 12, $35\frac{m}{s}$ d) 9m, $25\frac{m}{s}$

12. Dada la posición de una partícula por la función: $x = 4t^4 + t^2 - 6t - 1$, encuentra la velocidad y la aceleración instantáneas de la partícula a los 3 segundos. La velocidad se expresa en $\frac{m}{s}$ y la aceleración en $\frac{m}{s^2}$.

a) $432\frac{m}{s}$, $434\frac{m}{s^2}$ b) $434\frac{m}{s}$, $432\frac{m}{s^2}$ c) $234\frac{m}{s}$, $343\frac{m}{s^2}$ d) $324\frac{m}{s}$, $434\frac{m}{s^2}$

13. La posición de una partícula está dada por $x = e^{2t+1}$, encuentra la velocidad y la aceleración instantáneas de la partícula a los 4 segundos. La velocidad se expresa en $\frac{m}{s}$ y la aceleración en $\frac{m}{s^2}$.

a) $e^9\frac{m}{s}$, $2e^9\frac{m}{s^2}$ b) $2e^9\frac{m}{s}$, $e^9\frac{m}{s^2}$ c) $4e^9\frac{m}{s}$, $2e^9\frac{m}{s^2}$ d) $2e^9\frac{m}{s}$, $4e^9\frac{m}{s^2}$

14. Si se suelta un cuerpo desde la parte más alta de una torre, ¿en cuánto tiempo recorre una distancia de 45m? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 10.1s b) 5.10s c) 6.0s d) 3.0s

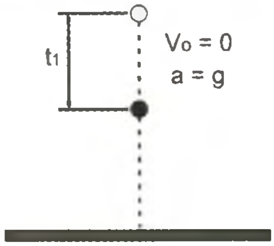
15. Se deja caer un cuerpo desde la parte más alta de un edificio y tarda 2s en llegar al suelo, calcular la altura del edificio. (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 40 m b) 20 m c) 50 m d) 65 m

16. Dos esferas de marfil se dejan caer desde lo alto de una torre; una de ellas pesa el doble de la otra, si se desprecia la fricción del aire, el tiempo que tardan en llegan al suelo es:

a) el mismo para las 2
b) es más rápido para la más pesada
c) la mitad para la menos pesada
d) 9.81 veces más rápida para la más pesada

17. Una esferita se deja caer libremente, ¿qué distancia habrá recorrido en el tiempo t_1?



a) $v \cdot t_1$ b) $2g \cdot t_1$ c) $4g \cdot t_1$ d) $\frac{1}{2} g \cdot t_1^2$

18. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de $30 \frac{m}{s}$. Calcular la altura máxima que alcanza el cuerpo. (considera $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

a) 125 m b) 55 m c) 40 m d) 45 m

19. Calcular el tiempo en que una piedra tarda en alcanzar su altura máxima si se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de $39.24 \frac{m}{s}$.

a) 4s b) 8s c) 6s d) 12s

20. Un proyectil se lanza con una velocidad de $40 \frac{m}{s}$ y formando un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? (considera $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

a) 40 m b) 2 m c) 20 m d) 120 m

21. Un proyectil se lanza con una velocidad de $10 \frac{m}{s}$ y formando un ángulo de 15° con la horizontal, ¿cuál es el alcance horizontal máximo que alcanza el proyectil? (considera $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

a) 25 m b) 50 m c) 10 m d) 5 m

22. ¿Cuál es el ángulo β con el que el proyectil de la siguiente figura tiene su mayor alcance?



a) 30° b) 45° c) 60° d) 70°

23. Un objeto se hace girar, se desplaza 35 radianes en 0.7segundos. ¿Cuál es la velocidad angular del objeto?

a) $7\frac{rad}{s}$ b) $25\frac{rad}{s}$ c) $40\frac{rad}{s}$ d) $50\frac{rad}{s}$

24. La velocidad angular de un cuerpo es de $5\frac{rad}{s}$. Calcular el desplazamiento del cuerpo después de 1minuto.

a) 300rad b) 12rad c) 5rad d) 500rad

25. Un volante que parte del reposo se acelera angularmente a razón de $2\frac{rad}{s^2}$. ¿Cuál es el desplazamiento angular del volante después de 4segundos?

a) 32rad b) 16rad c) 8rad d) 5rad

26. Un volante de 140cm de diámetro gira a razón de $2.5\frac{rad}{s}$. ¿Cuál es la velocidad tangencial del ventilador?

a) $0.75\frac{m}{s}$ b) $1.25\frac{m}{s}$ c) $1.75\frac{m}{s}$ d) $2.75\frac{m}{s}$

27. Una rueda 0.5 m de radio gira a razón de $2\frac{rev}{s}$. ¿Cuál es la velocidad tangencial del ventilador?

a) $1.0\frac{m}{s}$ b) $3.14\frac{m}{s}$ c) $6.28\frac{m}{s}$ d) $12.56\frac{m}{s}$

28. Un ventilador de 50cm de diámetro gira a 40 r.p.m. ¿Cuál es la velocidad tangencial del ventilador?

a) $0.166\frac{m}{s}$ b) $1.04\frac{m}{s}$ c) $4.18\frac{m}{s}$ d) $10.0\frac{m}{s}$

29. Una rueda de 12cm de radio gira a razón de $15\frac{rad}{s}$ y se detiene completamente en 3 minutos. ¿Cuál es la aceleración tangencial de la rueda?

a) $-60\frac{m}{s^2}$ b) $-30\frac{m}{s^2}$ c) $-1\frac{m}{s^2}$ d) $-0.01\frac{m}{s^2}$

30. Un ventilador de 120 cm de diámetro parte del reposo y adquiere una velocidad de $20\frac{rad}{s}$, en 1 minuto. ¿Cuál es la aceleración tangencial del disco?

a) $0.2\frac{m}{s^2}$ b) $2.0\frac{m}{s^2}$ c) $6.0\frac{m}{s^2}$ d) $12.0\frac{m}{s^2}$

31. Una polea de 40 cm de radio gira a razón de $30\frac{rad}{s}$ y se detiene completamente en 2 minutos. ¿Cuál es la aceleración tangencial del disco?

a) $0.1\frac{m}{s^2}$ b) $-0.1\frac{m}{s^2}$ c) $-6.0\frac{m}{s^2}$ d) $6.0\frac{m}{s^2}$

4 Dinámica

Propósito: el alumno resolverá problemas relacionados con las leyes de Newton y la energía.

Factores que cambian la estructura o el estado de movimiento de un cuerpo

El principal factor que altera la estructura o movimiento de un cuerpo es la fuerza; para que pueda existir una fuerza es necesario que interactúen dos cuerpos como mínimo.

Ejemplos:

Si se mueve una caja de un lugar a otro. Cuando se empuja un auto para moverlo. Al levantar un cuerpo ubicado en el suelo para subirlo a una mesa. Al detener un cuerpo en movimiento, son ejemplos en los cuales se emplea una fuerza para cambiar la posición o movimiento de los cuerpos.

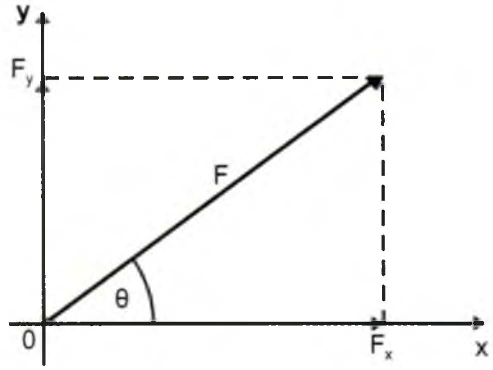
Concepto de fuerza

La fuerza es una magnitud de carácter vectorial. Las unidades de la magnitud de una fuerza se miden en Newtons (N), Dinas, Libras (lb), etc.

$$1N = 1kg\frac{m}{s^2} \quad ; \quad 1Dina = 1g\frac{cm}{s^2} \quad ; \quad 1lb = 1Slug\frac{ft}{s^2}$$

El carácter vectorial de la fuerza

Las fuerzas al ser magnitudes vectoriales poseen magnitud, dirección y sentido, y se pueden representar de las siguientes formas:



Forma polar

$$\vec{F} = (F, \theta)$$

Forma rectangular

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = F_x i + F_y j$$

Componentes de $\vec{F}$

$$F_x = F \cdot \cos\theta \quad ; \quad F_y = F \cdot \text{sen}\theta$$

Magnitud de $\vec{F}$; Dirección

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad ; \quad \theta = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

Donde:

F = Magnitud de la fuerza.

θ = Dirección de la fuerza.

F_x = Componente horizontal de la fuerza.

F_y = Componente vertical de la fuerza.

i = Vector unitario en **x**.

j = Vector unitario en y.

Ejemplo 1

Los componentes de la fuerza $\vec{F} = (120N, 60°)$ son:

a) $F_x = 30\sqrt{3}N, F_y = 30N$ b) $F_x = 60N, F_y = 60\sqrt{3}N$ c) $F_x = 30\sqrt{3}N, F_y = 60N$ d) $F_x = 60\sqrt{3}N, F_y = 60N$

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultados
$F = 120N$ $\theta = 60°$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\text{sen}\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $F_x = ?$ $F_y = ?$	$F_x = F \cdot \cos\theta$ $F_y = F \cdot \text{sen}\theta$	$F_x = (120N) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ $= 60N$ $F_y = (120N) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= 60\sqrt{3}N$	$F_x = 60N$ $F_y = 60\sqrt{3}N$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La magnitud del vector $\vec{F} = (50N, -120N)$ es:

a) 130N b) –130N c) 70N d) 170N

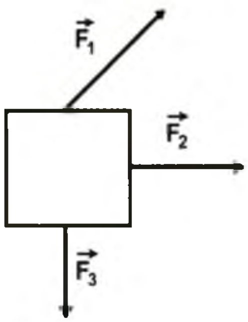
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$F_x = 50N$ $F_y = -120N$ $F = ?$	$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$	$F = \sqrt{(50N)^2 + (-120N)^2}$ $= \sqrt{2500N^2 + 14400N^2}$ $= \sqrt{16900N^2}$ $= 130N$	$F = 130N$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Superposición de fuerzas

Cuando un sistema de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ actúa sobre una partícula de manera simultánea, estas fuerzas se pueden remplazar por una fuerza resultante $\vec{R}$, la cual resulta de la suma vectorial de dichas fuerzas.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$

$$\vec{R} = (R_x, R_y)$$

con $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx}$

$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{nx}$

La magnitud de $\vec{R}$ es:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

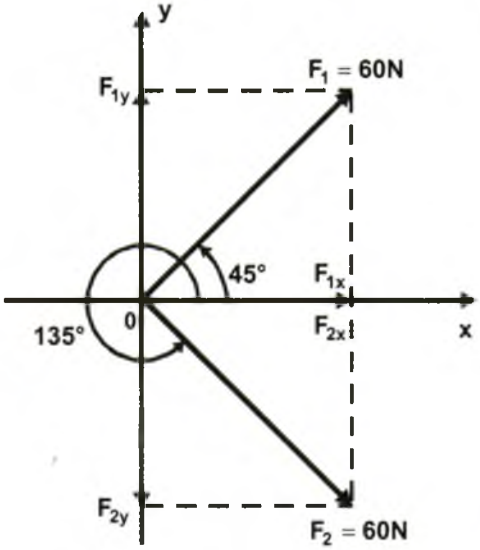
Ejemplo 1

Sobre un cuerpo actúan las fuerzas $\vec{F_1} = (60N, 45°)$ y $\vec{F_2} = (60N, 315°)$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante sobre el cuerpo?

a) 120N b) $60\sqrt{2}$ N c) $30\sqrt{2}$ N d) 60N

Solución:

Se dibuja el diagrama de cuerpo libre y se descomponen ambas fuerzas en sus componentes.



$\vec{F_1} = (60N, 45°) \rightarrow F_{1x} = (60N)\cdot\cos 45° = (60N)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30\sqrt{2}$ N

$F_{1y} = (60N)\cdot \text{sen} 45° = (60N)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30\sqrt{2}$ N

$\vec{F_2} = (60N, 315°) \rightarrow F_{2x} = (60N)\cdot\cos 315° = (60N)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30\sqrt{2}$ N

$F_{2y} = (60N)\cdot \text{sen} 315° = (60N)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -30\sqrt{2}$ N

Se obtienen R_x y R_y:

$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 30\sqrt{2}\text{ N} + 30\sqrt{2}\text{ N} = 60\sqrt{2}$ N

$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 30\sqrt{2}\text{ N} + \left(-30\sqrt{2}\text{ N}\right) = 0$

La magnitud de $\vec{R}$ es:

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(60\sqrt{2}\text{ N}\right)^2 + (0)^2} = 60\sqrt{2}$ N

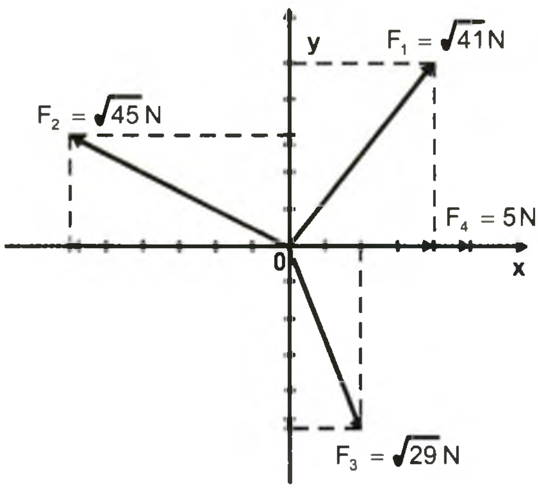
La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La magnitud de la fuerza resultante del siguiente sistema de fuerzas es:

a) 34N b) 2N c) 8N d) 5.8N

Solución:



Se escriben los vectores en su forma cartesiana.

$\vec{F_1} = (4N,\ 5N)$; $\vec{F_2} = (-6N,\ 3N)$; $\vec{F_3} = (2N, -5N)$; $\vec{F_4} = (5N,\ 0)$

Se obtiene R_x y R_y:

$R_x = 4N + (-6N) + 2N + 5N = 5N$

$R_y = 5N + 3N + (-5N) + 0 = 3N$

La magnitud de la resultante es:

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(5N)^2 + (3N)^2} = \sqrt{25N^2 + 9N^2} = \sqrt{34N^2} = 5.8N$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Primera Ley de Newton (Ley de la inercia)

Todo cuerpo en movimiento o reposo conserva ese estado a menos que una fuerza externa lo modifique. Esta ley indica que en ausencia de fuerzas, los cuerpos en reposo continuarán en reposo y los cuerpos en movimiento se moverán en una línea recta con velocidad constante.

Segunda ley de Newton (Ley de la masa inercial)

La aceleración que un cuerpo experimenta es directamente proporcional a la resultante de todas las fuerzas que actúen sobre él e inversamente proporcional a su masa. La dirección y el sentido en que se mueve el cuerpo es la misma que la de la fuerza resultante.

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \quad \text{en magnitud} \quad a = \frac{F}{m}$$

Donde:

a = Aceleración $\left[\frac{m}{s^2}, \frac{cm}{s^2}, \frac{ft}{s^2}\right]$

F = Fuerza [m, cm, ft]

m = Masa [kg, g, Slugs]

Otra forma de representar a la segunda ley de Newton es: $F = m \cdot a$.

Ejemplo 1

Sobre un cuerpo de 80 Kg actúa una fuerza de 400 N. ¿Qué aceleración le proporciona dicha fuerza al cuerpo?

a) $32000\frac{m}{s^2}$ b) $240\frac{m}{s^2}$ c) $5\frac{m}{s^2}$ d) $0.2\frac{m}{s^2}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 80Kg$ $F = 400N$ $a = ?$	$a = \frac{F}{m}$	$a = \frac{400\ N}{80\,Kg} = 5\frac{m}{s^2}$	$a = 5\frac{m}{s^2}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Sobre un cuerpo de masa "m" actúa una fuerza de magnitud "F" que le imprime una aceleración de $4\frac{m}{s^2}$. Si la magnitud de la fuerza se reduce a la mitad y la masa se reduce a una cuarta parte, ¿cuál es la nueva aceleración del cuerpo?

a) $8\frac{m}{s^2}$ b) $4\frac{m}{s^2}$ c) $16\frac{m}{s^2}$ d) $2\frac{m}{s^2}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\frac{F}{m} = 4\frac{m}{s^2}$ $F' = \frac{F}{2}$ $m' = \frac{m}{4}$ $a' = ?$	$a' = \frac{F'}{m'}$	$a' = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{m}{4}} = \frac{4 \cdot F}{2 \cdot m} = 2 \cdot \frac{F}{m}$ $a' = 2 \cdot \left(4\frac{m}{s^2}\right) = 8\frac{m}{s^2}$	$a = 8\frac{m}{s^2}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Una masa de 25kg se mueve a razón de $6\frac{m}{s}$ y después de 5 segundos su velocidad es de $18\frac{m}{s}$, calcular la magnitud de la fuerza que acelera la masa.

a) 120 N b) 30 N c) 60 N d) 100 N

Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$m = 25\,kg$ $v_i = 6\frac{m}{s}$ $t = 5\,s$ $v_f = 18\frac{m}{s}$ $a = ?$ $F = ?$	$a = \frac{v_f - v_i}{t}$ $F = m \cdot a$	$a = \frac{18\frac{m}{s} - 6\frac{m}{s}}{5\,s} = \frac{12\frac{m}{s}}{5\,s}$ $a = 2.4\frac{m}{s^2}$ $F = m \cdot a$ $F = (25kg)\cdot\left(2.4\frac{m}{s^2}\right) = 60kg\cdot\frac{m}{s^2}$ $F = 60\,N$	F = 60 N

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

a) Concepto de peso

Es la fuerza ejercida por la tierra sobre los cuerpos.

$$w = m \cdot g$$

Donde: m = Masa $[kg, gr, Slugs]$

g = Gravedad $\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}, 32\frac{ft}{s^2}\right]$

w = Peso $[N, Dinas, , lb]$

Ejemplo 1

¿Cuál es el peso de una masa de 200 gramos?

a) 1962000 Dinas b) 196200 Dinas c) 19620 Dinas d) 1962 Dinas

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 200g$ $g = 981\frac{cm}{s^2}$ $w = ?$	$w = m \cdot g$	$w = (200g)\cdot\left(981\frac{cm}{s^2}\right)$ $w = 196200\,Dinas$	$w = 196200\,Dinas$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

El peso de un cuerpo es de 392.4N. ¿Cuál es su masa?

a) 392.4kg b) 20kg c) 80kg d) 40kg

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$w = 392.4N$ $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ $m = ?$	$w = m \cdot g$ Despeje $m = \frac{w}{g}$	$m = \frac{392.4N}{9.81\frac{m}{s^2}}$ $m = 40\,kg$	m = 40kg

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Concepto de masa

Es la medida de la inercia de un cuerpo. Las unidades de masa son los kilogramos (kg), gramos (gr), Slugs, etc.,...

Tercera Ley de Newton (Ley de la acción y la reacción)

A toda fuerza de acción corresponde una de reacción de igual magnitud pero de sentido opuesto.

Equilibrio rotacional y traslacional, fuerza y torca

Se dice que un cuerpo se encuentre en equilibrio si:

a) El cuerpo se encuentra en reposo con respecto a un marco de referencia.

b) El cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme (Equilibrio traslacional).

a) Primera condición de equilibrio

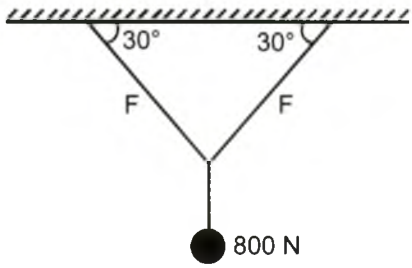
Un cuerpo se encuentra en equilibrio si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\ldots+\vec{F}_n=0$$

$$\sum F_x=0 \quad y \quad \sum F_y=0$$

Ejemplo 1

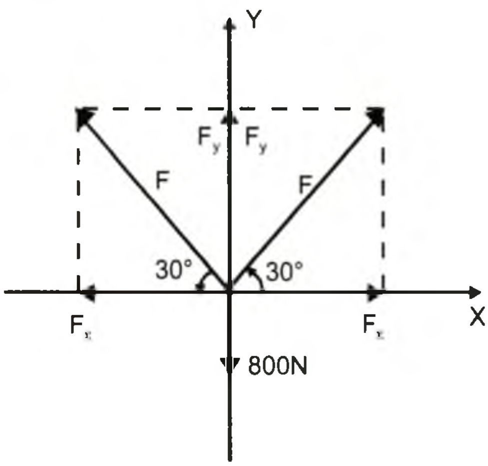
La magnitud de la fuerza $\vec{F}$ para que el cuerpo que se ilustra se encuentre en equilibrio es:



a) $200\sqrt{3}$ N b) 400 N c) 800 N d) $400\sqrt{3}$ N

Solución:

Diagrama de cuerpo libre.



Se descomponen las fuerzas en sus componentes y se aplica la primera condición de equilibrio.

$$F_x=F\cdot\cos 30°=F\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$F_y=F\cdot\text{sen}30°=F\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}F$$

$$\sum F_x=0\rightarrow -F_x+F_x=0$$

$$\sum F_y=0\rightarrow F_y+F_y-800N=0$$

$$2\cdot F_y-800N=0$$

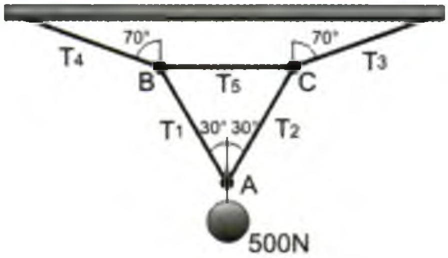
$$2\cdot\left(\frac{1}{2}F\right)=800N$$

$$F=800N$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

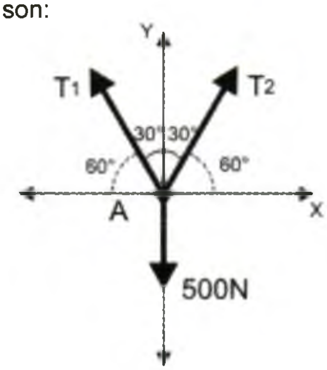
3. Determina las tensiones de las cuerdas mostradas en la figura si el objeto soportado pesa 500 N



Solución:

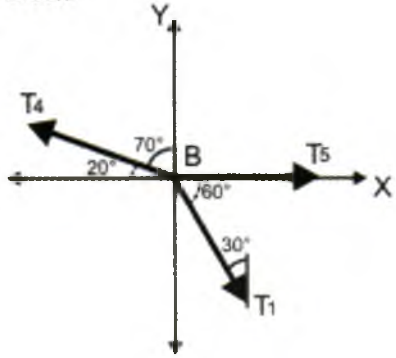
Para determinar la magnitud de las fuerzas, es necesario realizar un diagrama de cuerpo libre para los nodos A, B y C.

Las fuerzas concurrentes para el nodo A son:



Datos	Fórmulas	Sustitución y Resultados
$\vec{T_1} = T_1 \angle 120^\circ$	$\sum F_x = 0$	Para las componentes horizontales:
$\vec{T_2} = T_2 \angle 60^\circ$	$T_{1x} + T_{2x} + W_x = 0$	$T_1 \cos 120^\circ + T_2 \cos 60^\circ + 500 \cos 270^\circ = 0$
$\vec{W} = 500 \angle 270^\circ$		$(T_1)(-0.5) + (T_2)(0.5) + (500)(0) = 0$
$T_{1x} = T_1 \cos 120^\circ$		$-0.5T_1 + 0.5T_2 = 0$
$T_{1y} = T_1 \operatorname{sen} 120^\circ$		$0.5T_2 = 0.5T_1$ es decir $T_2 = T_1$
$T_{2x} = T_2 \cos 60^\circ$	$\sum F_y = 0$	Para las componentes verticales:
$T_{2y} = T_2 \operatorname{sen} 60^\circ$	$T_{1y} + T_{2y} + W_y = 0$	$T_1 \operatorname{sen} 120^\circ + T_2 \operatorname{sen} 60^\circ + 500 \operatorname{sen} 270^\circ = 0$
$W_x = 500 \cos 270^\circ$		$(T_1)(0.866) + (T_2)(0.866) + (500)(-1) = 0$
$W_y = 500 \operatorname{sen} 270^\circ$		Pero como $T_1 = T_2$, entonces: $1.732T_1 - 500 = 0$
$T_1 = ?$		$T_1 = \dfrac{500}{1.732} = 288.68\text{N}$, por tanto:
$T_2 = ?$		$T_1 = 288.68\text{N}$; $T_2 = 288.68\text{N}$

Las fuerzas concurrentes para el nodo B son:



Datos

$\vec{T_4} = T_4 \angle 160^\circ$

$\vec{T_1} = 288.68 \angle 300^\circ$

$\vec{T_5} = T_5 \angle 0^\circ$

$T_{4x} = T_4 \cos 160^\circ$

$T_{4y} = T_4 \operatorname{sen} 160^\circ$

$T_{1x} = 288.68 \cos 300^\circ$

$T_{1y} = 288.68 \operatorname{sen} 300^\circ$

$T_{5x} = T_5 \cos 0^\circ$

$T_{5y} = T_5 \operatorname{sen} 0^\circ$

$T_4 = ?$

$T_5 = ?$

Fórmulas

$\sum F_x = 0$

$T_{4x} + T_{1x} + T_{5x} = 0$

$\sum F_y = 0$

$T_{4y} + T_{1y} + T_{5y} = 0$

Sustitución y Resultados

Para las componentes horizontales:

$T_4 \cos 160^\circ + T_5 \cos 0^\circ + 288.68 \cos 300^\circ = 0$

$-0.939 T_4 + T_5 + 144.34 = 0$

$T_5 = 0.939 T_4 - 144.34$

Para las componentes verticales:

$T_4 \operatorname{sen} 160^\circ + T_5 \operatorname{sen} 0^\circ + 288.68 \operatorname{sen} 300^\circ = 0$

$0.342 T_4 + 0 - 250.0 = 0$

$0.342 T_4 = 250.0$

$T_4 = \dfrac{250.0}{0.342} = 730.99\text{N}$

Ahora $T_4 = 730.99\text{N}$, se sustituye en:

$T_5 = 0.939 T_4 - 144.34$

Y se obtiene:

$T_5 = 0.939(730.99) - 144.34$

$T_5 = 686.39 - 144.34 = 542.05\text{N}$

$T_5 = 542.05\text{N}$

El análisis para el nodo C se hace de una forma análoga al que se realizo para el nodo B, de donde se obtiene que la fuerza $T_4 = T_3$.

Finalmente se concluye que:

$$T_1 = T_2 = 288.68\text{N};\ T_3 = T_4 = 730.99\text{N};\ T_5 = 542.05\text{N}$$

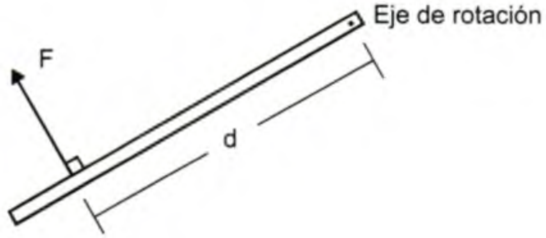
b) Segunda condición de equilibrio (Equilibrio rotacional)

Para que un cuerpo se encuentre en equilibrio rotacional, la suma de todas las torcas o momentos que actúan sobre él debe ser igual a cero.

$$\sum \tau = 0 \quad \text{donde} \quad \tau = \text{torca o momento}$$

Se define a la torca o momento que produce una fuerza con respecto a un eje de giro, como el producto de la magnitud de la fuerza por el brazo de palanca (distancia del punto donde actúa la fuerza al eje de rotación).

$$\tau = F \cdot d$$



Donde:

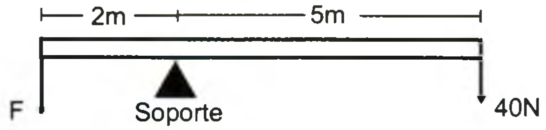
F = Fuerza [N, Dinas, lb]
d = Brazo de palanca [m, cm, ft]
τ = Torca o momento [N.m, Dina.cm, lb.ft]

a) La torca se considera positiva si la fuerza tiende a hacer girar al cuerpo con respecto al eje de rotación en sentido opuesto al giro de las manecillas del reloj.

b) La torca se considera negativa si la fuerza tiende a hacer girar al cuerpo con respecto al eje de rotación en el mismo sentido en que giran las manecillas del reloj.

Ejemplo 1

La magnitud de la fuerza "F" que equilibra la balanza es:



a) 100 N b) 200 N c) 80 N d) 16 N

Solución:

En la barra el eje de rotación se localiza en el soporte. Las torcas producidas por cada fuerza son:

$$\tau_1 = (F)\cdot(2m) = (2m)\cdot F \quad y \quad \tau_2 = -(40N)\cdot(5m) = -200N\cdot m$$

Se aplica la segunda condición de equilibrio:

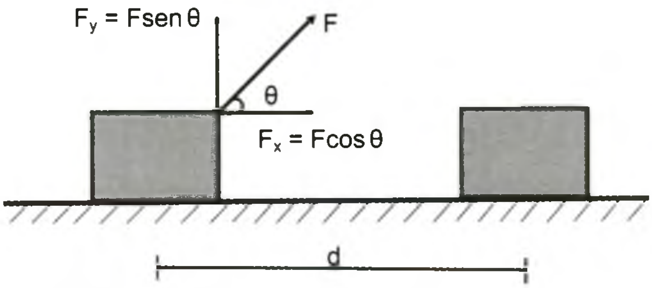
$$\sum \tau = 0 \rightarrow \tau_1 + \tau_2 = 0$$
$$(2m)\cdot F + (-200N\cdot m) = 0$$
$$(2m)\cdot F = 200N\cdot m$$
$$F = \frac{200N\cdot m}{2m}$$
$$F = 100N$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Concepto de trabajo mecánico

El trabajo es una magnitud escalar, que es igual al producto de la componente de la fuerza, que actúa en la misma dirección en que se efectúa el movimiento del cuerpo, por la distancia que se desplaza el cuerpo.

$$T = F \cdot d \cdot \cos\theta$$



Donde:

F = Fuerza	[N, Dinas, lb]
θ = Ángulo que forma la fuerza con la horizontal	
d = Desplazamiento	[m, cm, ft]
T = Trabajo	[Joules(J), ergios, lb · ft]

Además:

$$1\,\text{Joule} = 1\,\text{N} \cdot \text{m} \quad \text{y} \quad 1\,\text{ergio} = 1\,\text{Dina} \cdot \text{cm}$$

Por tanto:

Si θ = 0°, la fuerza aplicada al cuerpo es paralela a la dirección del movimiento y la magnitud del trabajo es:

$$T = F \cdot d$$

Si θ = 90°, la fuerza aplicada al cuerpo es perpendicular a la dirección del movimiento, por tanto, la magnitud del trabajo es:

$$T = 0$$

Ejemplo 1

Una fuerza de 6N forma un ángulo de 60° con la horizontal. Si esta fuerza se aplica a un cuerpo para desplazarlo 5 m, ¿qué trabajo realiza?

a) 60J b) 3J c) 15J d) 30J

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
F = 6N d = 5m θ = 60° T =?	$T = F \cdot d \cdot \cos\theta$	$T = (6N)\cdot(5m)\cdot\cos 60°$ $T = (6N)\cdot(5m)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 15\,N\cdot m$ $T = 15J$	T = 15J

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Una fuerza levanta un cuerpo de 1530N desde el suelo hasta una altura de 1.3m. ¿Qué trabajo realiza la fuerza?

a) 1650J b) 1989J c) 9030J d) 12540J

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
F = w = 1530N d = 1.3m T =?	$T = F \cdot d = w \cdot d$	$T = (1530N)\cdot(1.3m)$ $T = 1989\,N\cdot m$ $T = 1989\,J$	T = 1989J

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Energía

La **energía** es la capacidad que tiene todo cuerpo para desarrollar un trabajo. Las unidades de la energía en el sistema internacional son los Joules (J). Existen dos tipos de energía mecánica: la cinética y la potencial.

a) Energía cinética

La *energía* es la capacidad que tiene todo cuerpo para desarrollar un trabajo. La *energía cinética* es aquélla que tiene todo cuerpo en movimiento.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde:

m = Masa	$[kg, g, Slugs]$
v = Velocidad	$\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$
E_c = Energía cinética	$[Joules, ergios, lb \cdot ft]$

Ejemplo 1

¿Cuál es la energía cinética de un cuerpo de 8g, si su velocidad es de $260\frac{m}{s}$?

a) 270.4J b) 900.5J c) 2080.5J d) 4000J

Solución:

Datos

m = 8g = 0.008kg

$v = 260\frac{m}{s}$

$E_c = ?$

Fórmula

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Sustitución

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot(0.008\,kg)\cdot\left(260\frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot(0.008\,kg)\cdot\left(67600\frac{m^2}{s^2}\right) = 270.4\,J$$

Resultado

Ec = 270.4J

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Determinar la velocidad que lleva un cuerpo cuya masa es de 3kg, si su energía cinética es de 96J.

a) $32\frac{m}{s}$ b) $19.5\frac{m}{s}$ c) $18\frac{m}{s}$ d) $8\frac{m}{s}$

Solución:

Datos

m = 3 kg

E_c = 96 J

v =?

Fórmula

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando "v"

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot E_c}{m}}$$

Sustitución

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot(96J)}{3kg}} = \sqrt{\frac{192J}{3\,kg}}$$

$$v = \sqrt{64\frac{m^2}{s^2}} = 8\frac{m}{s}$$

Resultado

$v = 8\frac{m}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Un objeto se mueve a razón de $11\frac{m}{s}$ y tiene una energía cinética de 847J. ¿Cuál es la masa del objeto?

a) 154kg b) 103kg c) 28kg d) 1 kg

Solución:

Datos

$v = 11\frac{m}{s}$

E_c = 847J

m = ?

Fórmula

$E_c = \frac{1}{2}m\cdot v^2$ se despeja "m"

$$m = \frac{2E_c}{v^2}$$

Sustitución

$$m = \frac{2(847\,J)}{\left(11\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{1694\,J}{121\frac{m^2}{s^2}}$$

$m = 14\,kg$

Resultado

m = 14kg

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Energía potencial

Es aquélla que tiene todo cuerpo en virtud de su posición.

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad ó \quad E_p = w \cdot h$$

Donde:

m = Masa	$[kg, g, Slugs]$
g = Gravedad	$\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}, 32\frac{ft}{s^2}\right]$
h = Altura	$[m, cm, ft]$
w = Peso	$[N, Dinas, lb]$
E_p = Energía potencial	$[Joules, ergios, lb \cdot ft]$

Ejemplo 1

Calcular la energía potencial de un cuerpo de 8kg que se eleva hasta una altura de 4m.

a) 12.6J b) 123.6J c) 213.6J d) 313.92J

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 8kg$ $h = 4m$ $E_p = ?$	$E_p = m \cdot g \cdot h$	$E_p = (8kg) \cdot \left(9.81\frac{m}{s^2}\right) \cdot (4m)$ $E_p = 313.92J$	$E_p = 313.92J$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

¿A qué altura se debe colocar un cuerpo de 9kg para que tenga una energía potencial de 180J? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) 2m b) 4.5m c) 6m d) 10m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 9kg$ $E_p = 180J$ $g = 10\frac{m}{s^2}$ $h = ?$	$E_p = m \cdot g \cdot h$ Despeje $h = \frac{E_p}{m \cdot g}$	$h = \frac{180J}{(9kg) \cdot \left(10\frac{m}{s^2}\right)}$ $h = 2m$	$h = 2m$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Una caja se encuentra a 8m de altura y tiene una energía potencial de 360J. ¿Cuál es la masa de la caja? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) 0.166kg b) 16.6kg c) 4.5kg d) 600kg

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$h = 8m$ $E_p = 360J$ $g = 10\frac{m}{s^2}$ $m = ?$	$E_p = m \cdot g \cdot h$ Despejando "m" $m = \frac{E_p}{g \cdot h}$	$m = \frac{360\,J}{\left(10\frac{m}{s^2}\right)(8m)}$ $m = \frac{360\,J}{80\frac{m^2}{s^2}} = 4.5\,kg$	$m = 4.5kg$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

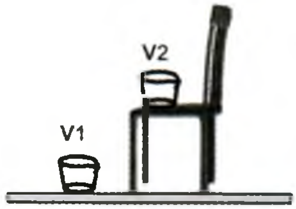
Ejemplo 4

¿Cuál afirmación tendría validez, si un vaso de precipitados se encuentra sobre una silla y otro en el suelo? El del suelo:

a) tiene menor energía potencial que el de la silla
b) tiene mayor energía potencial que el de la silla
c) presentará al caer, menor energía cinética que el otro
d) presentará al caer, la misma energía cinética que el otro

Solución:

La *energía potencial* es aquella energía que poseen los cuerpos en virtud de su posición, en este caso si observamos la figura el vaso de precipitados (v_2) tiene una altura mayor con respecto a la posición al nivel del suelo a la que se encuentra el vaso (v_1), en consecuencia el vaso que se encuentra en el suelo tiene una menor energía potencial que el que se encuentra encima de la silla.



Por consiguiente, la respuesta correcta corresponde al inciso “a”.

Concepto de potencia

Es la rapidez con que se realiza un trabajo mecánico. La magnitud de la potencia es la razón del trabajo mecánico realizado en la unidad de tiempo, sus fórmulas son:

$$P = \frac{T}{t} \qquad P = \frac{F \cdot d}{t} \qquad P = F \cdot v \qquad P = \frac{m \cdot (v_f - v_i) \cdot d}{t^2}$$

Donde:

T = Trabajo	[Joules, ergios, $lb \cdot ft$]	v = Velocidad	$\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$
t = Tiempo	[s]	d = Distancia	[m, cm, ft]
F = Fuerza	[N, Dinas, lb]	P = Potencia	$\left[\text{Watts}, \frac{\text{ergios}}{s}, \text{hp}\right]$

$$1\,\text{Watt} = 1\frac{J}{s}\;;\; 1\text{hp} = 1\frac{lb \cdot ft}{s}\;;\; 1\text{hp} = 764\,\text{Watts}\;;\; 1\text{kw} = 1000\,\text{watts}$$

Ejemplo 1

Hallar la potencia desarrollada por una grúa que levanta un cuerpo de 250N hasta una altura de 3m en un tiempo de 5 segundos.

a) 1500 Mwatts b) 4500 watts c) 50 Mwatts d) 150 watts

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
F = 250 N d = 3 m t = 5 s P =?	$P = \frac{F \cdot d}{t}$	$P = \frac{(250\,N) \cdot (3m)}{5\,s} = \frac{750\,N \cdot m}{5\,s}$ $P = 150\,\text{Watts}$	P = 150 watts

La respuesta correcta corresponde al inciso “d”.

Ejemplo 2

Un cuerpo de 120 kg parte del reposo y es acelerado uniformemente recorriendo 900 m. ¿Qué potencia desarrolla el cuerpo si para realizar el recorrido emplea 15 segundos y alcanza una velocidad de $60\frac{m}{s}$?

(Considera $1\text{Kwatt} = 1000\text{Watts}$)

a) 288000 Watts b) 288 Kwatts c) 28.8 Kwatts d) 2880 Watts

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 120\text{kg}$ $v_i = 0$ $d = 900\text{m}$ $t = 15\text{s}$ $v_f = 60\frac{m}{s}$	$P = \frac{m \cdot (v_f - v_i) \cdot d}{t^2}$	$P = \frac{(120\text{kg}) \cdot \left(60\frac{m}{s} - 0\right) \cdot (900\text{m})}{(15\text{s})^2}$ $P = \frac{6480000\ \text{kg} \cdot \frac{m^2}{s}}{225\,s^2}$ $P = 28800\ \text{Watts}$ $P = 28.8\ \text{Kwatts}$	$P = 28.8\ \text{Kwatts}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Conservación de la energía mecánica

a) Principio de conservación de la energía

La energía no se crea ni se destruye sólo se transforma.

b) Conservación de la energía mecánica

Si sobre un cuerpo en movimiento solo actúan fuerzas conservativas, la suma de su energía cinética y su energía potencial permanece constante y se le llama "Conservación de la energía mecánica".

$$E = E_c + E_p$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$$

Donde:

E_c = Energía cinética	$[\text{Joules}, \text{Ergios}, \text{lb} \cdot \text{ft}]$	v = Velocidad	$\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$
E_p = Energía potencial	$[\text{Joules}, \text{Ergios}, \text{lb} \cdot \text{ft}]$	g = gravedad	$\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}, 32\frac{ft}{s^2}\right]$
E = Energía mecánica	$[\text{Joules}, \text{Ergios}, \text{lb} \cdot \text{ft}]$	h = Altura	$[m, cm, ft]$
m = Masa	$[kg, g, slugs]$		

En un sistema de fuerzas conservativas, la energía cinética de un cuerpo se puede transformar en energía potencial y viceversa, el cambio en la energía mecánica es cero, es decir, la energía mecánica inicial es igual a la energía mecánica final.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_o^2 + m \cdot g \cdot h_o = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 + m \cdot g \cdot h_f$$

Donde:

v_o = Velocidad inicial	$\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$	h_o = Altura inicial	$[m, cm, ft]$
v_f = Velocidad final	$\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$	h_f = Altura final	$[m, cm, ft]$
m = Masa	$[kg, g, slugs]$	g = Gravedad	$\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}, 32\frac{ft}{s^2}\right]$

Ejemplo

¿Cuál es la energía mecánica de un cuerpo de 2kg que se deja caer desde una cierta altura y alcanza una velocidad de $20\frac{m}{s}$, cuando se encuentra a una altura de 5m? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) 1200J b) 500J c) 300J d) 5000J

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 2kg$		$E = \frac{1}{2}\cdot(2kg)\cdot\left(20\frac{m}{s}\right)^2 + (2kg)\cdot\left(10\frac{m}{s^2}\right)\cdot(5m)$	
$v = 20\frac{m}{s}$	$E = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h$	$E = \frac{1}{2}\cdot(2kg)\cdot\left(400\frac{m^2}{s^2}\right) + 100kg\frac{m^2}{s^2}$	$E = 500\,J$
$g = 10\frac{m}{s^2}$		$E = 400J + 100J = 500J$	
$h = 5\ m$			
$E = ?$			

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Colisiones entre partículas en una dimensión (Choques)

a) Choque elástico
Es aquél donde la energía cinética total del sistema antes y después del impacto es la misma, es decir, los cuerpos no sufren deformaciones durante el impacto.

b) Choque inelástico
Es aquél donde la energía cinética del sistema antes y después del choque cambia, es decir, cuando el choque de los cuerpos presenta una deformación permanente.

c) Ley de la conservación de la cantidad de movimiento
En la colisión de dos cuerpos, la cantidad de movimiento antes y después del impacto no varía.

Cantidad de movimiento *antes* de la colisión

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$



Cantidad de movimiento *después* de la colisión

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$



Ley de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

Donde: m_1, m_2 = masas $[kg, g, slugs]$

u_1, u_2 = velocidades antes del choque $\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$

v_1, v_2 = velocidades después del choque $\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$

El *coeficiente de restitución* es una medida del grado de conservación de la energía cinética en un choque entre dos partículas; cuando se presenta un choque entre dos cuerpos, las velocidades después del choque están relacionadas con las velocidades antes del choque y su expresión es:

$$e = -\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

El coeficiente de restitución, toma valores entre 0 y 1, mientras el valor 1 se da en un choque perfectamente elástico, donde se conserva tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema. El valor 0 se da en un choque perfectamente inelástico (o plástico) donde sólo se conserva el momento lineal, una porción de la energía cinética inicial de las partículas se "consume" durante el choque, convirtiéndose en energía de deformación plástica, energía sonora, calor, etc.

Ejemplo

Una pelota de 1 kilogramo que se mueve a la derecha a razón de $12\frac{m}{s}$ y choca de frente con otra de 2 kilogramos que se a la izquierda a razón de $24\frac{m}{s}$. Determina la velocidad de cada una de ellas, después del impacto si:

a) El coeficiente de restitución es $e = \frac{2}{3}$

Solución:

En este choque se considera el coeficiente de restitución de $\frac{2}{3}$, m_1 = 1kg, $u_1 = 12\frac{m}{s}$, m_2 = 2kg, $u_2 = -24\frac{m}{s}$, v_1 = ?, v_2 = ?

Fórmulas

Coeficiente de restitución

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

Conservación del movimiento

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

Sustituciones y resultados

$$\frac{2}{3} = \frac{v_2 - v_1}{12\frac{m}{s} - (-24\frac{m}{s})}$$, se despeja $v_2 - v_1$

$$v_2 - v_1 = 24\frac{m}{s}$$, se despeja "v_2"

$$v_2 = 24\frac{m}{s} + v_1$$

$$(1kg)(12\frac{m}{s}) + (2kg)(-24\frac{m}{s}) = (1kg)(v_1) + (2kg)(v_1 + 24\frac{m}{s})$$

$$12kg\frac{m}{s} - 48kg\frac{m}{s} = (1kg)(v_1) + (2kg)(v_1) + 48kg\frac{m}{s}$$

$$-36kg\frac{m}{s} - 48kg\frac{m}{s} = 3kg(v_1)$$

$$\frac{-84kg\frac{m}{s}}{3kg} = v_1$$

$$-28\frac{m}{s} = v_1$$

$$v_2 = 24\frac{m}{s} + (-28\frac{m}{s}) = -4\frac{m}{s}$$

Finalmente ambas pelotas se mueven a la izquierda a razón de 28 y $4\frac{m}{s}$, respectivamente.

b) Las pelotas queden unidas

Solución:

En este choque se considera el coeficiente de restitución de 0, ya que las pelotas quedan unidas y el choque es completamente inelástico. Con $m_1 = 1\text{kg}$, $u_1 = 12\frac{m}{s}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $u_2 = -24\frac{m}{s}$, $v_1 = ?$, $v_2 = ?$

Fórmulas

Coeficiente de restitución

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

Conservación del movimiento

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

Sustituciones y resultados

$$0 = \frac{v_2 - v_1}{12\frac{m}{s} - (-24\frac{m}{s})}$$, se despeja $v_2 - v_1$

$v_2 - v_1 = 0$, se despeja "v_2", $v_2 = v_1$

$$(1\text{kg})(12\frac{m}{s}) + (2\text{kg})(-24\frac{m}{s}) = (1\text{kg})(v_1) + (2\text{kg})(v_1)$$

$$12\text{kg}\frac{m}{s} - 48\text{kg}\frac{m}{s} = (1\text{kg})(v_1) + (2\text{kg})(v_1)$$

$$-36\text{kg}\frac{m}{s} = 3\text{kg}(v_1)$$

$$\frac{-36\text{kg}\frac{m}{s}}{3\text{kg}} = v_1$$

$$-12\frac{m}{s} = v_1$$

$$v_2 = -12\frac{m}{s}$$

Por consiguiente las pelotas se mueven a la izquierda a razón de $12\frac{m}{s}$.

c) El choque es perfectamente elástico

Solución:

En este choque se considera el coeficiente de restitución de 1, y el choque completamente elástico. Con $m_1 = 1\text{kg}$, $u_1 = 12\frac{m}{s}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $u_2 = -24\frac{m}{s}$, $v_1 = ?$, $v_2 = ?$

Fórmulas

Coeficiente de restitución

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

Conservación del movimiento

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

Sustituciones y resultados

$$1 = \frac{v_2 - v_1}{12\frac{m}{s} - (-24\frac{m}{s})}$$, se despeja $v_2 - v_1$

$v_2 - v_1 = 36\frac{m}{s}$, se despeja "$v_2$"

$$v_2 = v_1 + 36\frac{m}{s}$$

$$(1\text{kg})(12\frac{m}{s}) + (2\text{kg})(-24\frac{m}{s}) = (1\text{kg})(v_1) + (2\text{kg})(v_1 + 36\frac{m}{s})$$

$$12\text{kg}\frac{m}{s} - 48\text{kg}\frac{m}{s} = (1\text{kg})(v_1) + (2\text{kg})(v_1) + 72\text{kg}\frac{m}{s}$$

$$-108\text{kg}\frac{m}{s} = (3\text{kg})(v_1)$$

$$-36\frac{m}{s} = v_1$$

$$v_2 = -36\frac{m}{s} + 36\frac{m}{s} = 0$$

Por lo tanto la primera pelota se mueve a la izquierda a razón de $36\frac{m}{s}$ y la segunda permanece en reposo.

Procesos disipativos (Fricción)

a) Fuerza de fricción

Fuerza que se opone al movimiento o deslizamiento de un cuerpo sobre una superficie o sobre otro cuerpo. La fuerza de fricción siempre es paralela a la superficie sobre la que se mueve el cuerpo.

Fuerza de fricción estática

Es la fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo, cuando éste está en reposo.

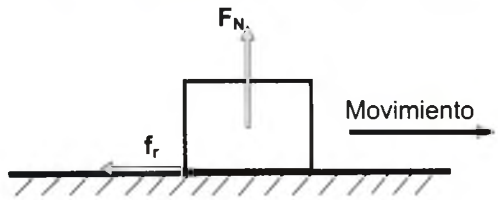
Fricción cinética

Es la fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo, cuando éste se está moviendo.

La fricción estática es mayor que la fricción cinética, es decir, se necesita una fuerza mayor para empezar a mover el cuerpo, que para mantenerlo en movimiento uniforme.

b) Coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción entre dos superficies, es la razón entre la fuerza de fricción y la fuerza normal entre las superficies. La fuerza normal es la que ejerce una superficie sobre un cuerpo que se encuentra sobre ella, cuando la superficie es horizontal, la fuerza normal es igual al peso del cuerpo.



$$\eta = \frac{f_r}{F_N}$$

Donde: η = Coeficiente de fricción
F_r = Fuerza de fricción [N]
F_N = Fuerza normal [N]

Ejemplo 1

Al deslizar un bloque de madera de 300N sobre una superficie horizontal aparece una fuerza de fricción entre las superficies de 90N. ¿Hallar el valor del coeficiente η de fricción estático?

a) 0.03 b) 0.003 c) 0.3 d) 3

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$f_r = 90N$ $F_N = 300N$ $\eta = ?$	$\eta = \frac{f_r}{F_N}$	$\eta = \frac{90N}{300N} = 0.3$	$\eta = 0.3$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

¿Qué fuerza de fricción aparece entre una superficie cuyo coeficiente de fricción cinético es de 0.25 y un cuerpo de 730 N que se desliza sobre ella?

a) 182.5N b) 193N c) 200N d) 340N

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\eta = 0.25$ $F_N = 730N$ $f_r = ?$	$\eta = \frac{f_r}{F_N}$ Despeje $f_r = \eta \cdot F_N$	$f_r = (0.25)(730N)$ $f_r = 182.5N$	$f_r = 182.5N$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 3

Un automóvil de 600 kilogramos se mueve sobre un camino plano a $30\frac{m}{s}$. Determina:

a) ¿Cuánto vale la fuerza (suponiéndola constante) que se requiere para detenerlo en una distancia de 70 metros?

a) 3860N   b) 3870N   c) 3880N   d) 3890N

Solución:

Datos

$m = 600kg$

$v_i = 30\frac{m}{s}$

$v_f = 0\frac{m}{s}$

$d = 70m$

$a = ?$

$F = ?$

Fórmulas

$v_f^2 = v_i^2 + 2a \cdot d$

Se despeja "a"

$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2d}$

$a = \frac{F}{m}$

Se despeja "F"

$F = m \cdot a$

Sustituciones y resultado

$$a = \frac{(0)^2 - (30\frac{m}{s})^2}{2(70m)} = \frac{-900\frac{m^2}{s^2}}{140m} = -6.48\frac{m}{s^2}$$

Esta aceleración se sustituye en la segunda ley de Newton

$$F = (600Kg)(-6.48\frac{m}{s^2}) = -3857.14N$$

$$F = -3857.14N \approx -3860N$$

El signo negativo de la fuerza es porque el sentido de ella es contrario al movimiento del auto. La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de rozamiento entre los neumáticos y el camino para que esto sea posible?

a) 0.67   b) 0.66   c) 0.65   d) 0.64

Solución:

Datos

$m = 600Kg$

$f_r = 3857.1N$

$w = F_N = ?$

$\eta = ?$

Fórmula

$w = m \cdot g$

$\eta = \frac{f_r}{F_N}$

Sustitución

$$F_N = w = (600Kg)(9.8\frac{m}{s^2})$$

$$F_N = w = 5886Kg\frac{m}{s^2} = 5886N$$

$$\eta = \frac{3857.6N}{5886N}$$

$$\eta = 0.655 \approx 0.66$$

Resultado

$\eta = 0.655 \approx 0.66$

El coeficiente de rozamiento es una cantidad adimensional y de magnitud 0.66. La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejercicios

1. Las componentes de la fuerza $\vec{F} = (200N, 30°)$ son:

   a) $F_x = 100\sqrt{3}N,\ F_y = 100N$
   b) $F_x = 100N,\ F_y = 100N$
   c) $F_x = 100N,\ F_y = 100\sqrt{3}N$
   d) $F_x = 100\sqrt{3}N,\ F_y = 100\sqrt{3}N$

2. La magnitud del vector $\vec{F} = (-50N, 120N)$ es:

   a) 150N b) 130N c) 250N d) 300N

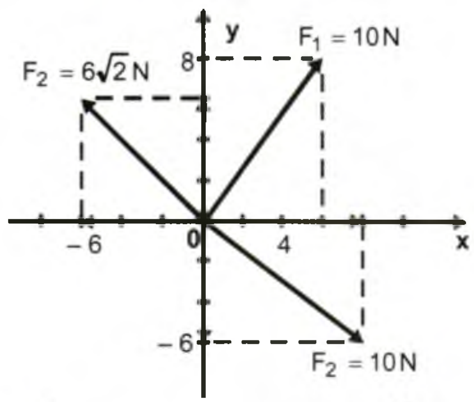
3. Sobre una caja se aplican las siguientes fuerzas $\vec{F_1} = (350N, 60°)$ y $\vec{F_2} = (350N, 120°)$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante sobre la caja?

   a) 350N b) $350\sqrt{3}$ N c) $700\sqrt{3}$ N d) 700N

4. Calcula la suma de los vectores A = 4N con dirección 60° al noroeste y B = 3N con dirección 30° al sureste

   a) $7\hat{i} - 7\hat{j}$ b) $\frac{3\sqrt{3}+4}{2}\hat{i} + \frac{4\sqrt{3}+3}{2}\hat{j}$ c) $7\hat{i} + 7\hat{j}$ d) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}\hat{i} + \frac{4\sqrt{3}-3}{2}\hat{j}$

5. La magnitud de la fuerza resultante del siguiente sistema de fuerzas es:



   a) 64N b) 46 c) $26\sqrt{2}$ N d) $8\sqrt{2}$ N

6. Un cuerpo de 20kg es acelerado a un ritmo de $1.5\frac{m}{s^2}$, calcular la magnitud de la fuerza que acelera al cuerpo.

   a) 15 N b) 0.075 N c) 13.33 N d) 30 N

7. Sobre una masa de 80kg actúa una fuerza de 320N. ¿Qué aceleración le proporciona dicha fuerza a la masa?

   a) $3.5\frac{m}{s^2}$ b) $14\frac{m}{s^2}$ c) $4\frac{m}{s^2}$ d) $25\frac{m}{s^2}$

8. ¿Cuál es el peso de un cuerpo cuya masa es de 500 gr? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 5 N b) 5000 N c) 50 N d) 0.02 N

9. La masa de un cuerpo cuyo peso es de 294.3 N es:

a) 2943 Kg b) 30 Kg c) 55 Kg d) 60 Kg

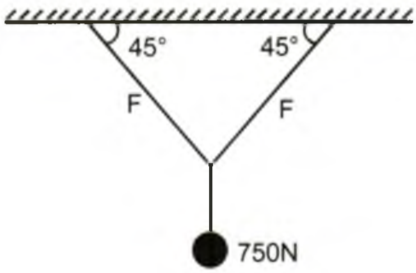
10. Sobre un cuerpo de masa "m" actúa una fuerza de magnitud "F" que le imprime una aceleración de $8\frac{m}{s^2}$. Si la magnitud de la fuerza se reduce a la mitad. ¿Cuál es la nueva aceleración del cuerpo?

a) $8\frac{m}{s^2}$ b) $16\frac{m}{s^2}$ c) $4\frac{m}{s^2}$ d) $32\frac{m}{s^2}$

11. Determina la masa de un cuerpo cuyo peso es de 196N, considera a la gravedad como $9.8\frac{m}{s^2}$.

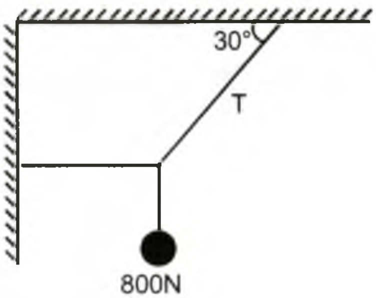
a) 1 928.8kg b) 20kg c) 16kg d) 0.05kg

12. La magnitud de la fuerza $\vec{F}$ para que el cuerpo que se ilustra se encuentre en equilibrio es:



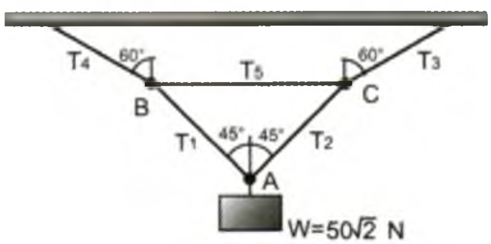
a) $750\sqrt{2}$ N b) 500N c) 750N d) $375\sqrt{2}$ N

13. ¿Cuál es la magnitud de la tensión "T" del cable para que el cuerpo que se muestra en la figura se encuentre en equilibrio?



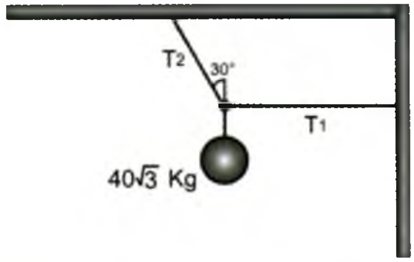
a) 1 600N b) 800N c) 400N d) 200N

14. Con respecto al siguiente diagrama determina la magnitud de la tensión T_2



a) 100N b) 70.71N c) 50N d) 43.30N

15. Determina la tensión de la cuerda T_1, con respecto a la figura mostrada a continuación:



a) 138.5N b) 800N c) 400N d) 285.6N

16. Con respecto a la figura anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) $2T_1 = 3T_2$ b) $T_1 = 2T_2$ c) $T_1 = T_2$ d) $2T_1 = T_2$

17. Un cuerpo se encuentra en equilibrio rotacional si:

a) la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es 0
b) la suma de todos los momentos es 0
c) la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es diferente de 0
d) la suma de todos los momentos es diferente de 0

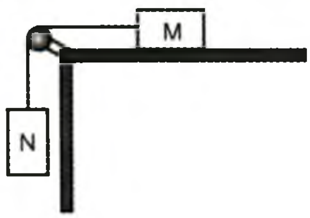
18. Condición necesaria y suficiente para el equilibrio traslacional de una partícula:

a) que las fuerzas sean colineales
b) que las fuerzas sean coplanares
c) $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$
d) $\sum F_x = \sum F_y$

19. Un cuerpo está en equilibrio de traslación cuando la fuerza externa neta es:

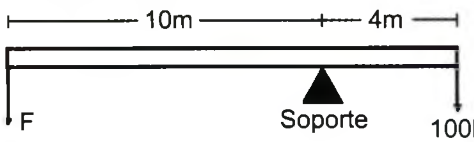
a) constante b) variable c) igual a "g" d) cero

20. El sistema mostrado en la figura un bloque de masa M se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento, y esta unido con una cuerda ligera y flexible que pasa por una polea sin rozamiento, a un segundo bloque de masa N suspendido. ¿Cuál es la aceleración del sistema si ambas masas son iguales?



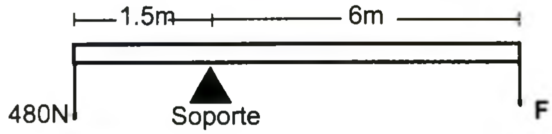
a) $\frac{g}{2}$ b) 2g c) g d) 0

21. La magnitud de la fuerza "F" que equilibra la balanza es:



a) 250 N b) 400 N c) 40 N d) 4000 N

22. La magnitud de la fuerza "F" que equilibra la balanza es:



a) 2880 N b) 120 N c) 720 N d) 1920 N

23. Relaciona las siguientes columnas:

I Aceleración.
II Segunda condición de equilibrio.
III Segunda Ley de Newton.
IV Primera condición de equilibrio.

a. $\sum \tau = 0$
b. $a = \frac{F}{m}$
c. $a = \frac{v_f - v_i}{t}$
d. $\sum \vec{F} = 0$

a) I-c, II-a, III-b, IV-d b) I-c, II-b, III-a, IV-d c) I-c, II-d, III-a, IV-b, d) I-c, II-d, III-a, IV-b

24. El enunciado "Todo cuerpo en movimiento experimenta una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él", corresponde a:

a) Ley de gravitación universal
b) Segunda Ley de Newton
c) Tercera Ley de Newton
d) Primera Ley de Newton

25. El enunciado "Todo cuerpo en movimiento o reposo conserva ese estado a menos que una fuerza externa lo modifique" corresponde a:

a) Ley de gravitación universal
b) Tercera Ley de Newton
c) Primera Ley de Newton
d) Ley de Hooke

26. ¿Cuál es el nombre que recibe la resistencia de un cuerpo a cambiar de su estado en reposo o movimiento?

a) potencia b) peso c) ímpetu d) inercia

27. Una persona levanta un cuerpo de 30 N hasta una altura de 1.5 m. ¿Qué trabajo realiza la persona?

a) 300J b) 60J c) 20J d) 45J

28. Del problema anterior, si la persona mantiene el cuerpo a la misma altura y camina 3.2 m., ¿qué trabajo ha realizado?

a) 0 b) 9.37J c) 64J d) 96J

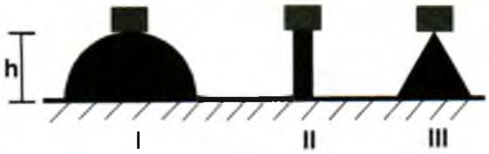
29. Un bloque se mueve 5 m sobre una superficie horizontal. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de 100 N con un ángulo de inclinación de 60° con la horizontal para mover el bloque?

a) 1 000J b) 520J c) 500J d) 250J

30. La energía cinética de un cuerpo de masa "m" que se mueve con una velocidad "v" es de 820 J. Si la velocidad permanece constante y la masa incrementa al doble, ¿cuál es el valor de la nueva energía cinética del cuerpo?

a) 210J b) 16 400J c) 410J d) 1640J

31. Un bloque de la misma masa se levanta hasta la parte superior de las figuras que tienen una altura "h", como se muestra en la figura. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) En el caso II se efectúa menor trabajo que en el caso III y mayor que en el caso I.
b) En el caso II y III se realiza el mismo trabajo que en el I.
c) En el caso III se efectúa un trabajo nulo.
d) En el caso I se efectúa un trabajo mayor.

32. Un cuerpo cuyo peso es de 50 N lleva una velocidad de $12\frac{m}{s}$. ¿Cuál es su energía cinética?

(considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 750J   b) 720J   c) 360J   d) 300J

33. Encuentra la velocidad de un cuerpo cuya masa es de 4kg y tiene una energía cinética de 1250 J.

a) $5\frac{m}{s}$ b) $10\frac{m}{s}$ c) $15\frac{m}{s}$ d) $25\frac{m}{s}$

34. Un bloque de 8kg se eleva a una altura de 3.5m. ¿Cuál es su energía potencial? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 2800J   b) 280J   c) 80J   d) 28J

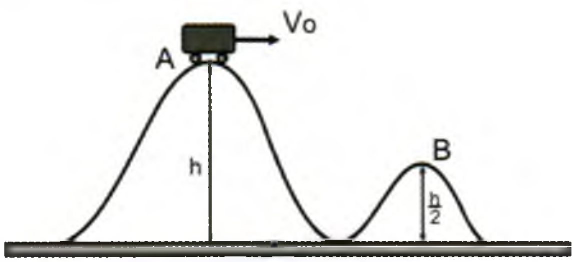
35. Determina la altura a la que debe estar un cuerpo cuya masa es de 50kg, para que su energía potencial sea de 14500 J. (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 29m   b) 35m   c) 45m   d) 54m

36. Un cuerpo de 12 Kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $15\frac{m}{s}$. ¿Qué altura alcanza el cuerpo? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

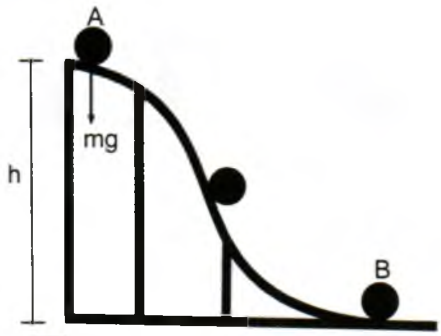
a) 50.25m   b) 22.25m   c) 11.25m   d) 1.25m

37. De acuerdo a la figura, ¿cuál es el valor de la velocidad en el punto B?



a) $v_B = \sqrt{v_o^2 + g \cdot h}$ b) $v_B = 2\sqrt{v_o^2 + g \cdot h}$ c) $v_B = \frac{1}{2}\sqrt{2v_o^2 + g \cdot h}$ d) $v_B = \sqrt{\frac{3}{2}v_o^2 + \frac{g \cdot h}{2}}$

38. Un cuerpo situado en el punto "A", se desliza (sin fricción) como se muestra en la figura. ¿Con qué velocidad llegará al punto más bajo "B"?



a) $h\sqrt{\frac{g}{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2g}}{h}$ c) $\sqrt{2gh}$ d) $\frac{2g}{\sqrt{h}}$

39. Calcular la potencia desarrollada por un motor de una grúa que levanta 3000kg hasta una altura de 15m en un tiempo de 2.5s. (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 180W b) 100Kw c) 30Kw d) 180Kw

40. Calcular el tiempo que requiere el motor de un elevador cuya potencia es de 35000 watts para elevar una carga de 5000N hasta una altura de 70 metros.

a) 10s b) 20s c) 35s d) 100s

41. La potencia de un motor eléctrico es de 45500 W. ¿A qué velocidad puede elevar una carga de 6500 N?

a) $0.07\frac{m}{s}$ b) $7\frac{m}{s}$ c) $70\frac{m}{s}$ d) $700\frac{m}{s}$

42. ¿Cuál es el trabajo y la potencia desarrollada por un elevador que tiene 300 kilogramos de masa si es elevado a una altura de 15 metros en 3 minutos? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 45 000Joules, 150Watts b) 450Joules, 150Watts c) 45 000Joules, 250Watts d) 4 500Joules, 2 500Watts

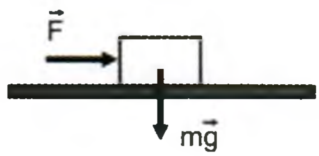
43. Un bloque de madera de 520N descansa sobre un piso horizontal de cemento. Si la fuerza de fricción estática entre el bloque y la superficie es de 40N, ¿cuál es valor del coeficiente de fricción estática de la superficie?

a) 0.07 b) 0.7 c) 0.007 d) 7

44. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción entre un cuerpo de 860N, que se desliza horizontalmente sobre una superficie cuyo coeficiente de fricción cinético es de 0.25?

a) 344N b) 310N c) 215N d) 0.215N

45. De acuerdo a la siguiente figura, ¿cuál es el valor de la fuerza "F" para imprimirle una aceleración "a" al bloque?



a) $F = m(g\mu_k + a)$ b) $F = 2m(g\mu_k + a)$ c) $F = m(2g + \mu_k a)$ d) $F = 2a(g + \mu_k m)$

5 Propiedades de la materia

Propósito: el alumno identificará las propiedades de la materia.

Estructura de la materia

La materia en general está formada por protones, electrones y neutrones; estas partículas por lo general forman átomos. Los átomos son las partículas más pequeñas de la materia. A las sustancias que contienen átomos de una misma clase se les llama **elementos**, y las que están formadas por átomos de distintas clases se les llama **compuestos**. La materia en la naturaleza se presenta en tres estados de agregación: sólido, líquido y gaseoso.

Propiedades generales de la materia

Estas propiedades son las que poseen todos los cuerpos, por ejemplo: la masa, el peso, el volumen, porosidad impenetrabilidad, elasticidad, divisibilidad, etc.

Masa: es la medida de la inercia de un cuerpo. Sus unidades son los kilogramos, gramos, Slugs, etc.
Inercia: es la oposición que ofrecen todos los cuerpos a cambiar su estado, ya sea de movimiento o reposo.
Peso: es la fuerza con que son atraídos los cuerpos hacia la superficie terrestre.
Volumen: es el espacio que ocupa un cuerpo. Sus unidades son los metros cúbicos, centímetros cúbicos, etc.
Porosidad: es el espacio vacío que existe entre las partículas de un cuerpo.
Impenetrabilidad: propiedad de la materia que establece que dos cuerpos no pueden ocupar simultáneamente un mismo espacio.
Elasticidad: propiedad de los cuerpos de recuperar su forma original después de que las fuerzas que los deforman dejan de actuar. En la elasticidad existen algunos otros aspectos como: el estiramiento, la flexión, la compresión y la torsión.
Divisibilidad: esta propiedad indica que la materia puede ser dividida en partículas.
Energía: es la capacidad de los cuerpos para realizar un trabajo.

Propiedades específicas de la materia

Estas propiedades permiten identificar a unas sustancias de otras, ya que tienen propiedades diferentes a las demás, ejemplos: densidad, punto de fusión, punto de ebullición, etc.

Punto de fusión: temperatura a la cual un sólido comienza a licuarse, estando en contacto con el estado líquido resultante.

Punto de ebullición: temperatura a la cual un líquido comienza a hervir.

Densidad: es la masa por unidad de volumen de un cuerpo.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Donde	m = Masa	[kg, g, slug]
	V = Volumen	$[m^3, cm^3, ft^3]$
	ρ = Densidad	$\left[\frac{kg}{m^3}, \frac{g}{cm^3}, \frac{slug}{ft^3}\right]$

Ejemplo 1

Un cuerpo de 400 Kg ocupa un volumen de 0.2 m^3. ¿Cuál es su densidad?

a) $800\frac{kg}{m^3}$ b) $80\frac{kg}{m^3}$ c) $2000\frac{kg}{m^3}$ d) $200\frac{kg}{m^3}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
m = 400 kg V = 0.2 m^3 ρ =?	$\rho = \frac{m}{V}$	$\rho = \frac{400\,kg}{0.2\,m^3} = 2000\frac{kg}{m^3}$	$\rho = 2000\frac{kg}{m^3}$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Estiramiento de un resorte (Ley de Hooke)

A un resorte que se encuentre de forma vertical, sostenido firmemente en la parte superior, se le agrega un peso en la parte inferior, se estira y su alargamiento estará en proporción con el peso que se suspende en él. Este sencillo caso, representa la Ley de Hooke, la cual establece que "la deformación de un resorte, es proporcional a la fuerza que se le aplica".

$$F \propto x \quad \text{(Fuerza proporcional al estiramiento)}$$

$$F = k \cdot x$$

Donde:

F = Fuerza aplicada [N, dinas, lb]

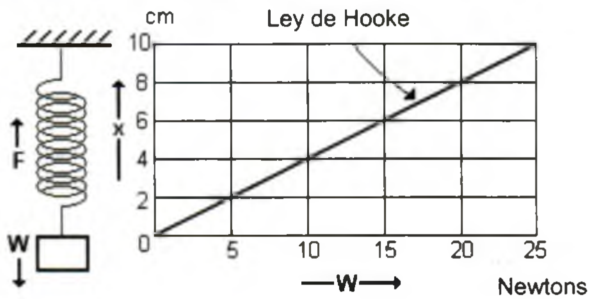
x = Deformación (compresión o elongación) [m, cm., ft]

k = Constante de proporcionalidad $\left[\frac{N}{m}, \frac{dinas}{cm}, \frac{lb}{ft}\right]$

Limite elástico

Es el esfuerzo (fuerza) máximo, que un cuerpo puede soportar sin perder sus propiedades elásticas.

Gráfica que muestra el estiramiento de un resorte, para ilustrar la Ley de Hooke.



Ejemplo 1

¿Cuál es la magnitud de la fuerza que comprime 60cm a un resorte de constante $280\frac{N}{m}$?

a) 168N b) 466.6 c) 84N d) 284N

Solución:

Datos

$x = 60cm = 0.60m$

$k = 280\frac{N}{m}$

$F = ?$

Fórmula

$F = k \cdot x$

Sustitución

$F = \left(280\frac{N}{m}\right) \cdot (0.60\,m) = 168\,N$

Resultado

F = 168N

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Un resorte se elonga 14 cm cuando se le aplica una fuerza de 70 Newtons. Si el resorte recobra su longitud original y después se le aplica una fuerza de 125 Newtons, ¿cuál es la nueva elongación del resorte, si el resorte no alcanza su límite elástico?

a) 1m b) 85cm c) 63cm d) 25cm

Solución:

Datos

$F_1 = 70N$

$x_1 = 14cm = 0.14m$

$F_2 = 125N$

$x_2 = ?$

Fórmula

$F = k \cdot x$

despejando

$k = \frac{F}{x}$

Sustitución

$k = \frac{70\,N}{0.14\,m} = 500\frac{N}{m}$

La elongación del resorte es:

$x = \frac{125\,N}{500\frac{N}{m}} = 0.25\,m$

Resultado

F = 0.25 m = 25cm

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. ¿Cuáles son las fases de agregación de la materia?
   a) Sólido, gaseoso y pastoso
   b) Sólido, líquido y gaseoso
   c) Plasma y líquido
   d) Sólido, líquido y pastoso

2. Propiedad de los cuerpos de recuperar su forma original después de que las fuerzas que los deforman dejan de actuar.
   a) Porosidad b) Peso c) Densidad d) Elasticidad

3. Es una propiedad especifica de la materia:
   a) densidad b) porosidad c) divisibilidad d) masa

4. Al deformar un sólido dentro del límite elástico la fuerza de reacción hace que:
   a) se mantenga deforma
   b) no suceda nada
   c) recupere su forma original
   d) se deforme el doble

5. Esta propiedad indica que la materia puede ser dividida en partículas.
   a) Densidad b) Porosidad c) Divisibilidad d) Masa

6. Es el espacio vacío que existe entre las partículas de un cuerpo.
   a) Impenetrabilidad b) Porosidad c) Divisibilidad d) Masa

7. Propiedad de la materia que establece que dos cuerpos no pueden ocupar simultáneamente un mismo espacio.
   a) Masa b) Divisibilidad c) Porosidad d) Impenetrabilidad

8. Se considera una propiedad específica de la materia:
   a) peso b) densidad c) volumen d) masa

9. ¿Qué sucede con la densidad de una barra de metal cuando se corta en 2 partes?
   a) Se duplica b) Se reduce a la mitad c) Permanece constante d) Se cuadriplica

10. Determina la densidad de una sustancia que tiene 2.85 toneladas de masa y ocupa un volumen de $0.75m^3$
    a) $3\,800\frac{kg}{m^3}$ b) $21\,375\frac{kg}{m^3}$ c) $3.8\frac{kg}{m^3}$ d) $14\,250\frac{kg}{m^3}$

11. Las dimensiones de un lingote de cobre son 6cm, 10cm y 15cm. Determina el peso del lingote si la densidad del material es $8\,960\frac{kg}{m^3}$. (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)
    a) 99.55N b) 89.65N c) 80.64N d) 68.40N

12. Si un cuerpo de $3m^3$ de aluminio tiene una masa de 8100kg y la densidad del agua es de $10^3\frac{kg}{m^3}$, ¿cuál es la densidad relativa del aluminio?
    a) 2.47 b) 2.7 c) 5.16 d) 7.2

13. Con base a la "ley de Hooke", ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $F \alpha \frac{1}{x}$ b) $F \alpha x$ c) $F \alpha x^2$ d) $F \alpha \frac{1}{x^2}$

14. Se aplica 150 N, a un resorte, el cual se elonga 20cm. Si el resorte recobra su longitud original y después se le aplica una fuerza de 210N, ¿cuál es la nueva elongación del resorte? Consideré que el resorte no excede su límite elástico.

a) 14.2cm b) 28cm c) 40cm d) 280cm

15. ¿Cuál es la deformación que sufre un resorte cuya constante es de $1500\frac{N}{s}$ y se le aplica una fuerza de 600N?

a) 0.40cm b) 2.5cm c) 40cm d) 40m

16. Un resorte se deforma o elonga 30cm bajo la acción de una fuerza de 120 N, ¿cuál es la constante del resorte?

a) $36\frac{N}{s}$ b) $40\frac{N}{s}$ c) $360\frac{N}{s}$ d) $400\frac{N}{s}$

6

Hidráulica

Propósito: el alumno resolverá problemas de fluidos, mediante las leyes y conceptos correspondientes.

Hidrostática (Fluidos en reposo)

a) Presión atmosférica

Es la presión que la atmósfera ejerce en todas direcciones sobre los cuerpos sumergidos en ella. La presión atmosférica varía con la altura, a medida que ésta aumenta, la presión disminuye y al nivel del mar tiene su máximo valor que es igual a:

$$1\text{atm} = 760\text{mm de Hg} = 1.013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$$

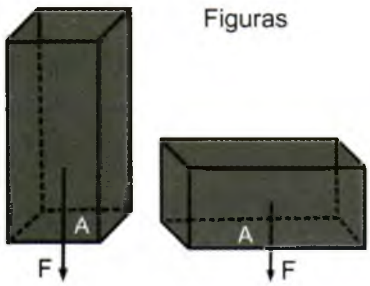
Se define a la **presión** como la razón que existe entre la fuerza aplicada por unidad de área o superficie.

$$P = \frac{F}{A}$$

Donde: P = Presión $\left[\frac{N}{m^2} = \text{Pascal} = \text{Pa}\right]$

F = Fuerza $[N]$

A = Área $[m^2]$



Figuras

La fórmula indica que la presión es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la superficie. Si se disminuye el área sobre la que actúa una fuerza constante, la presión aumenta; si el área sobre la que actúa la fuerza constante aumenta, la presión disminuye como se observa en las figuras.

Ejemplo

¿Cuál es la presión ejercida por una fuerza de 120 N que actúa sobre una superficie de 0.040 m^2?

a) 4.8 Pa b) 3000 Pa c) 300 Pa d) 480 Pa

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
F = 120 N A = 0.040 m^2 P =?	$P = \frac{F}{A}$	$P = \frac{120N}{0.040m^2} = 3000\frac{N}{m^2}$ P = 3000 Pa	P = 3000 Pa

La solución correcta corresponde al inciso "b".

b) Principio de Pascal

La presión ejercida sobre un fluido encerrado en un recipiente se trasmite con la misma intensidad a todos los puntos de las paredes del recipiente.

Ejemplo:

En la figura, si al émbolo se le aplica una fuerza, de acuerdo con el principio de Pascal, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) El globo se mueve hacia el extremo "A" y se deforma.

b) El globo estalla.

c) El globo se pega al émbolo y estalla.

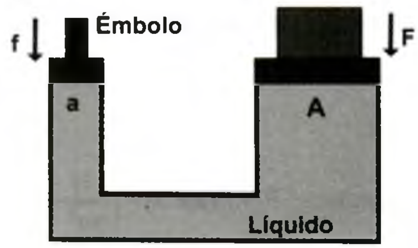
d) El globo reduce su tamaño y no se deforma.

Solución:
Al aplicarle la fuerza al émbolo, ésta produce una presión cuya magnitud se trasmite con la misma intensidad en toda la superficie del globo, reduciendo su tamaño y conservando su forma esférica, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Prensa hidráulica

Este dispositivo emplea el principio de Pascal para su funcionamiento, está formada por dos recipientes cilíndricos comunicados, estos recipientes contienen un fluido, la sección transversal de uno de ellos es mayor que la del otro, cada recipiente tiene un émbolo, si se ejerce una presión $P_1 = \frac{f}{a}$ en el émbolo más pequeño, se obtiene una presión $P_2 = \frac{F}{A}$ en el émbolo mayor, de tal forma que $P_1 = P_2$, por tanto,

$$\frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$



Donde: f = Fuerza aplicada en el émbolo menor $[N; Dinas]$
F = Fuerza en el émbolo mayor $[N; Dinas]$
a = Área del émbolo menor $[m^2, cm^2]$
A = Área del émbolo mayor $[m^2, cm^2]$

Ejemplo:
En una prensa el émbolo mayor tiene un diámetro de 42 cm, y el émbolo menor de 2.1 cm. ¿Qué fuerza se necesita ejercer en el émbolo menor para levantar un bloque de 50000 N?

a) 125 N b) 2500 N c) 250 N d) 1250 N

Solución:

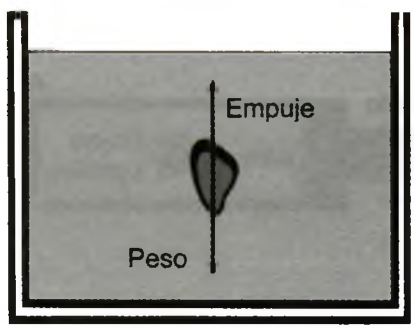
Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
F = 50000 N D = 42cm d = 2.1cm f = ?	$\frac{f}{a} = \frac{F}{A} \rightarrow \frac{f}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4}} \rightarrow \frac{f}{d^2} = \frac{F}{D^2}$ Despejando "f" $f = \frac{F \cdot d^2}{D^2}$	$f = \frac{(50\,000\,N)(2.1\,cm)^2}{(42\,cm)^2}$ $f = \frac{(50\,000\,N)(4.41\,cm^2)}{1764\,cm^2}$ $f = 125\,N$	$f = 125\,N$

La solución correcta corresponde al inciso "a".

c) Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido, experimenta un empuje o fuerza de flotación igual al peso del volumen desalojado del fluido.
El empuje será el producto del peso específico del fluido por el volumen sumergido.

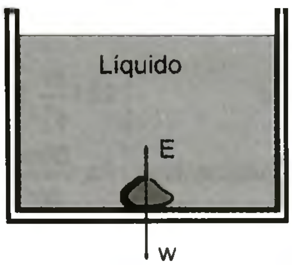
$$E = P_e \cdot V \quad ó \quad E = \rho \cdot g \cdot V$$



Donde: P_e = Peso específico del fluido $\left[\frac{N}{m^3}, \frac{Dinas}{cm^3}\right]$
V = Volumen desalojado $[m^3, cm^3]$
g = Gravedad $\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}\right]$
ρ = Densidad $\left[\frac{kg}{m^3}, \frac{g}{cm^3}\right]$
E = Empuje $[N, Dinas]$

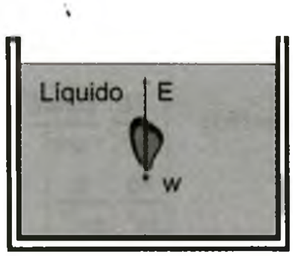
Relación entre el empuje y el peso de un cuerpo

Si $E < w$



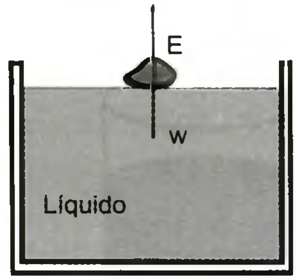
1) Si el empuje es menor que el peso, el cuerpo se hunde.

Si $E = w$



2) Si el empuje es igual al peso, el cuerpo estará sumergido dentro del líquido.

Si $E > w$



3) Si el empuje es mayor que el peso, el cuerpo flota y parte de él queda sobre la superficie del líquido.

Ejemplo 1

Un cubo de 0.3 m de arista, se sumerge en agua. Calcular el empuje que recibe.

$\left(\text{Considera } \rho_{Agua} = 1000\frac{kg}{m^3} \text{ y } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) 2700 N b) 27 N c) 270 N d) 27000 N

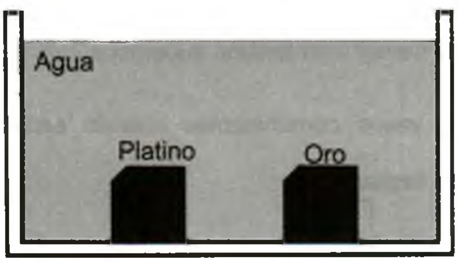
Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\rho_{Agua} = 1000\frac{kg}{m^3}$ $a = 0.3$ m $V_{cubo} = V_{agua\ desalojada} = V$ $V = a^3 = (0.3m)^3 = 0.027m^3$ $E = ?$	$E = \rho \cdot g \cdot V$	$E = \rho \cdot g \cdot V$ $E = \left(1000\frac{kg}{m^3}\right)\left(10\frac{m}{s^2}\right)(0.027m^3)$ $E = 270$ N	$E = 270$ N

La solución correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

En la figura se observan dos cubos del mismo tamaño, uno de oro y el otro de platino, ambos cubos se sumergen en agua hasta el fondo del recipiente. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) El empuje es cero en ambos cubos.

b) El cubo de oro recibe un empuje mayor que el de platino.

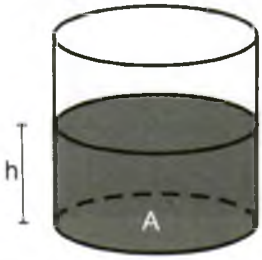
c) No existe empuje porque los cubos desalojan toda el agua.

d) El empuje que recibe cada cubo es el mismo.

La respuesta correcta corresponde al inciso "d", ya que ambos cubos desalojan la misma cantidad de agua, por tanto, reciben el mismo empuje.

d) Presión hidrostática

La presión que ejerce un líquido sobre el fondo del recipiente que lo contiene es igual a:



$$P_h = P_e \cdot h \quad \text{ó} \quad P_h = \rho \cdot g \cdot h$$

Donde:

P_e = Peso específico $\left[\frac{N}{m^3}, \frac{Dinas}{cm^3}\right]$ g = Gravedad $\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}\right]$

ρ = Densidad $\left[\frac{kg}{m^3}, \frac{g}{cm^3}\right]$ P_h = Presión hidrostática $\left[Pa, \frac{Dinas}{cm^2}\right]$

h = Profundidad $[m, cm]$

Ejemplo:

¿Cuál es la presión hidrostática en el fondo de una poza de 10 m de profundidad?

$\left(\text{Considera } \rho_{agua} = 1000\frac{kg}{m^3} \text{ y } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) 10000 Pa b) 100000 Pa c) 1000000 Pa d) 10000000 Pa

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$h = 10$ m $\rho_{agua} = 1000\frac{kg}{m^3}$ $g = 10\frac{m}{s^2}$ $P_h = ?$	$P_h = \rho \cdot g \cdot h$	$P_h = \left(1000\frac{kg}{m^3}\right)\left(10\frac{m}{s^2}\right)(10m)$ $P_h = 100000\frac{N}{m^2} = 100000\,Pa$	$P_h = 100000\,Pa$

La solución correcta corresponde al inciso "b".

e) Tensión superficial y capilaridad

Tensión superficial

Es la superficie libre de los líquidos que se comporta como una membrana elástica tensa.

Adherencia

Es la Fuerza de cohesión entre un líquido y un sólido.

Relación entre adherencia y tensión superficial

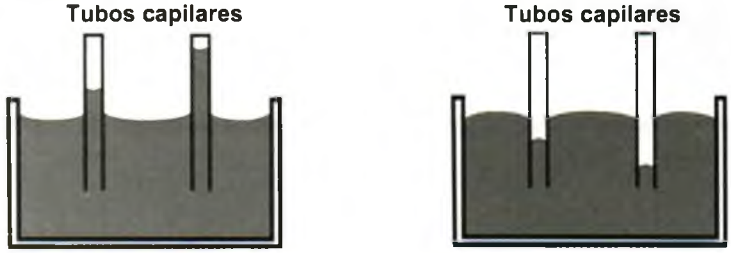
1) Se dice que un líquido moja una superficie cuando su adherencia es mayor que su tensión superficial.

2) Se dice que un líquido no moja una superficie cuando su adherencia es menor a su tensión superficial.

Capilaridad

Propiedad de los líquidos de guardar un nivel diferente al de los vasos comunicantes cuando están comunicados a tubos capilares.

Tubos capilares **Tubos capilares**



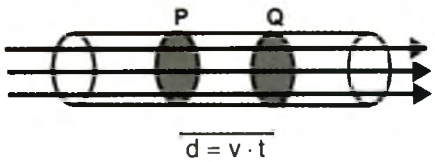
Hidrodinámica (Fluidos en movimiento)

Hidrodinámica

Parte de la Hidráulica que estudia los fluidos en movimiento.

Si un líquido fluye con una velocidad "v" por un tubo, el volumen del líquido es igual al producto del área "A" de la sección transversal, la velocidad "v" y el tiempo "t" que tarda el líquido en fluir.

$$V = A \cdot v \cdot t$$



Donde: V = Volumen $[m^3]$

A = Área de la sección transversal del tubo $[m^2]$

v = Velocidad $\left[\frac{m}{s}\right]$

t = Tiempo $[s]$

Gasto

Es la relación entre el volumen del líquido que fluye en la unidad de tiempo.

$$G = \frac{V}{t} \qquad G = A \cdot v$$

Donde: G = Gasto $\left[\frac{m^3}{s}\right]$ v = Velocidad $\left[\frac{m}{s}\right]$

A = Área de la sección transversal del tubo $[m^2]$ t = Tiempo $[s]$

V = Volumen $[m^3]$

Ejemplo 1

¿Cuál es el gasto de agua que fluye por una tubería si pasan 2 m^3 en 25 s?

a) $8\frac{m^3}{s}$ b) $1.8\frac{m^3}{s}$ c) $1.08\frac{m^3}{s}$ d) $0.08\frac{m^3}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$V = 2\ m^3$ $t = 25s$ $G = ?$	$G = \frac{V}{t}$	$G = \frac{2m^3}{25s} = 0.08\frac{m^3}{s}$	$G = 0.08\frac{m^3}{s}$

La solución correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

¿Cuál es el gasto de un líquido que fluye con una velocidad de $5\frac{m}{s}$ por una tubería de diámetro 8cm?

a) $8\pi\frac{m^3}{s}$ b) $1.8\pi\frac{m^3}{s}$ c) $1.008\pi\frac{m^3}{s}$ d) $0.008\pi\frac{m^3}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v = 5\frac{m}{s}$ $D = 8\,cm = 0.08\,m$ $G = ?$	$G = A \cdot v$ $G = \frac{\pi D^2}{4}v$	$G = \frac{\pi(0.08\,m)^2}{4}\left(5\frac{m}{s}\right) = 0.008\pi\frac{m^3}{s}$	$G = 0.008\pi\frac{m^3}{s}$

La solución correcta corresponde al inciso "d".

Flujo
Es la relación que existe entre la masa del líquido que fluye en la unidad de tiempo.

$$F = \frac{m}{t} \qquad F = \rho \cdot G \qquad F = \rho\frac{V}{t}$$

Donde:

m = Masa	$[kg]$	G = Gasto	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
ρ = Densidad del líquido	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	t = Tiempo	$[s]$
V = Volumen	$[m^3]$	F = Flujo	$\left[\frac{kg}{s}\right]$

Ejemplo:
¿Cuál es el flujo de una tubería por la que fluyen 2.5 m^3 de agua en 50 s?

a) $500\frac{kg}{s}$ b) $150\frac{kg}{s}$ c) $50\frac{kg}{s}$ d) $.050\frac{kg}{s}$

Solución:

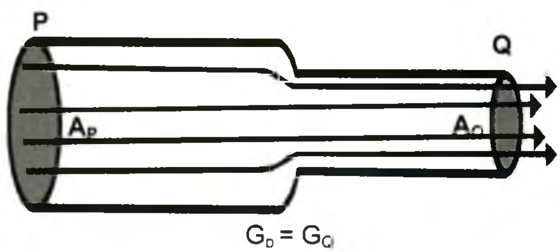
Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$V = 2.5\ m^3$ $t = 50\ s$ $F = ?$	$F = \rho\frac{V}{t}$	$F = \left(1000\frac{kg}{m^3}\right)\cdot\left(\frac{2.5m^3}{50s}\right) = 50\frac{kg}{s}$	$F = 50\frac{kg}{s}$

La solución correcta corresponde al inciso "c".

a) Ecuación de continuidad
En un tubo de secciones transversales diferentes, como se muestra en la figura, el gasto que fluye por la sección transversal "P", es igual al gasto que fluye por la sección transversal "Q", es decir, la cantidad de líquido que pasa por P y Q es la misma.

$$A_p \cdot v_p = A_Q \cdot v_Q$$

Donde:
A_P = Área de la sección transversal en el punto "P" $[m^2]$
A_Q = Área de la sección transversal en el punto "Q" $[m^2]$
v_P = Velocidad a la que fluye el líquido por el punto "P" $\left[\frac{m}{s}\right]$
v_Q = Velocidad a la que fluye el líquido por el punto "Q" $\left[\frac{m}{s}\right]$



Ejemplo:
Por una tubería de 0.08 m de diámetro circula agua a una velocidad de $2\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la velocidad que llevará el agua, al pasar por un estrecho de la tubería donde el diámetro es de 0.02 m?

a) $0.32\frac{m}{s}$ b) $32\frac{m}{s}$ c) $0.125\frac{m}{s}$ d) $1.25\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v_1 = 2\frac{m}{s}$ $D_1 = 0.08\ m$ $D_2 = 0.02\ m$ $v_2 = ?$	$A_1 v_1 = A_2 v_2$ $D_1^2 \cdot v_1 = D_2^2 \cdot v_2$ Despeje $v_2 = \frac{D_1^2 \cdot v_1}{D_2^2}$	$v_2 = \frac{(0.08m)^2\left(2\frac{m}{s}\right)}{(0.02m)^2} = 32\frac{m}{s}$	$v_2 = 32\frac{m}{s}$

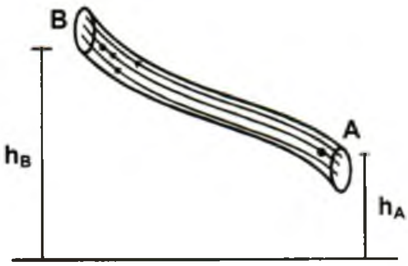
La solución correcta corresponde al inciso "b".

Flujo estacionario

Si un flujo se mueve de tal manera que en cualquier punto no cambia su velocidad, presión y densidad con el transcurrir el tiempo, se dice entonces que el flujo es estacionario.

b) Ecuación de Bernoulli

En un fluido cuyo flujo es estacionario, la suma de la energía cinética, potencial y la energía de presión que tiene el líquido en el punto “A” es igual a la suma de las mismas energías en el punto B.



$$E_{CA} + E_{PA} + E_{presión\ A} = E_{CB} + E_{PB} + E_{presión\ B}$$

$$\frac{1}{2}\rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B + P_B$$

$$\frac{v_A^2}{2} + gh_A + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + gh_B + \frac{P_B}{\rho}$$

Donde:

m = Masa $[kg]$

ρ = Densidad del fluido $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

v_A = Velocidad en el punto “A” $\left[\frac{m}{s}\right]$

v_B = Velocidad en la sección transversal “B” $\left[\frac{m}{s}\right]$

h_A = Altura de la sección transversal “A” $[m]$

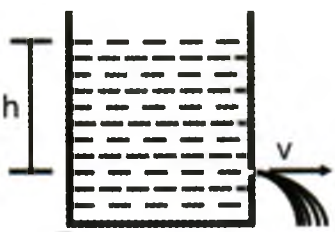
h_A = Altura de la sección transversal “B” $[m]$

P_A = Presión en la sección transversal “A $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

P_B = Presión en la sección transversal “B” $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Teorema de Torricelli

La velocidad de salida de un fluido por un orificio de un recipiente, es la misma que la que adquiriría un cuerpo que se dejase caer desde una altura igual a la de la superficie libre del fluido, hasta el nivel del orificio.



$$v = \sqrt{2g \cdot h}$$

h =Altura de la superficie del fluido [m, cm, ft]

g = Gravedad $\left[9.81\frac{m}{s^2}, 981\frac{cm}{s^2}, 32\frac{ft}{s^2}\right]$

v = Velocidad $\left[\frac{m}{s}, \frac{cm}{s}, \frac{ft}{s}\right]$

Ejemplo 1

¿Cuál es la velocidad de salida de un fluido que se encuentra contenido en un recipiente de 1.55 m de altura y al cual se le hace un orificio a 30cm por encima de su base? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$

a) $1\frac{m}{s}$ b) $5\frac{m}{s}$ c) $25\frac{m}{s}$ d) $10\frac{m}{s}$

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$g = 10\frac{m}{s^2}$ $h = 1.55m - 0.3m = 1.25m$ $v = ?$	$v = \sqrt{2g \cdot h}$	$v = \sqrt{2\left(10\frac{m}{s^2}\right) \cdot (1.25m)}$ $v = \sqrt{25\frac{m}{s^2}} = 5\frac{m}{s}$	$v = 5\frac{m}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

La velocidad con la que sale un fluido por un orificio de un recipiente es de $6\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la altura que tiene la columna del fluido por encima del orificio? $\left(\text{Considera } g = 10\frac{m}{s^2}\right)$?

a) 3.6 m b) 18 m c) 0.3 m d) 1.8 m

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$v = 6\frac{m}{s}$ $g = 10\frac{m}{s^2}$ $h = ?$	$v = \sqrt{2g \cdot h}$ Despeje $h = \frac{v^2}{2g}$	$h = \frac{\left(6\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(10\frac{m}{s^2}\right)} = \frac{36\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}} = 1.8m$	h =1.8 m

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

c) Viscosidad

Viscosidad es la resistencia que opone un líquido a fluir, es decir, es la fricción que se produce en el interior de un fluido.

La fricción es una fuerza que se aplica a la superficie de deslizamiento paralela y en sentido contrario al movimiento. Su magnitud depende de la naturaleza de las capas deslizantes o de la viscosidad del líquido.

Ejercicios

1. ¿Qué presión ejerce una fuerza de 250N al actuar sobre una superficie de $0.05m^2$?

   a) $5\ 000\frac{N}{m^2}$ b) $500\frac{N}{m^2}$ c) $50\frac{N}{m^2}$ d) $50\ 000\frac{N}{m^2}$

2. Una fuerza de 4500N produce una presión de 15KPa. ¿Cuál es la superficie sobre la que actúa la fuerza?

   a) $0.030m^2$ b) $0.3m^2$ c) $3m^2$ d) $30m^2$

3. ¿Cuál es la presión que recibe un líquido encerrado en un depósito, si se le aplica una fuerza de 54 N por medio de un embolo cuya área es de $0.06\ m^2$?

   a) $90\ 000\frac{N}{m^2}$ b) $9\ 000\frac{N}{m^2}$ c) $900\frac{N}{m^2}$ d) $90\frac{N}{m^2}$

4. Un peso de 5 600N ejerce una presión de 22.4KPa. ¿Cuál es el área sobre la que actúa el peso?

   a) $8m^2$ b) $4m^2$ c) $0.5m^2$ d) $0.25\ ^2$

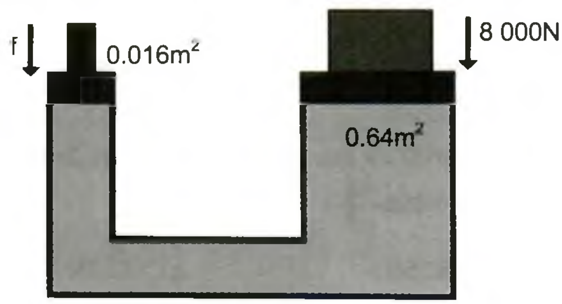
5. La presión que ejerce una columna de un fluido en el fondo del recipiente que lo contiene, depende de su:

   a) volumen b) superficie c) temperatura d) profundidad

6. La presión ejercida por un fluido contenido en un recipiente que se transmite con la misma intensidad a todos los puntos de las paredes del recipiente, es conocido como:

   a) principio de Pascal
   b) principio de Arquímedes
   c) presión atmosférica
   d) presión hidrostática

7. Observe la figura y de acuerdo con ella, calcule cuál es la fuerza aplicada en el émbolo menor.



   a) 320 000N b) 32 000N c) 2 000N d) 200N

8. El diámetro del émbolo menor de una prensa hidráulica es de 12 cm y se le aplica una fuerza de 300 N. ¿Cuál es el diámetro del émbolo mayor si la fuerza en el es de 7500 N?

   a) 3 600cm b) 60cm c) 40cm d) 20cm

9. Una cubo de oro se 40cm de arista se sumerge en fluido. ¿Calcular el empuje que recibe el cobo? (considera $\rho_{fluido} = 19\ 300\frac{kg}{m^3}$ y $g = 10\frac{m}{s^2}$)

   a) 123.52N b) 1 235.2N c) 12 532N d) 123 520N

10. Un prisma rectangular, de volumen igual a 6000 cm^3 se sumerge hasta la mitad en un recipiente que contiene gasolina. ¿Cuál es el empuje que recibe él? (considera $\rho_{gasolina} = 700\frac{kg}{m^3}$ y $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 21N b) 42N c) 210N d) 420N

11. Se sumerge dos quintas partes de un cilindro en un fluido cuya densidad es de $1500\frac{kg}{m^3}$. ¿Cuál es la densidad del cilindro?

a) $375\frac{kg}{m^3}$ b) $600\frac{kg}{m^3}$ c) $3\,750\frac{kg}{m^3}$ d) $6\,000\frac{kg}{m^3}$

12. ¿Cuál es la presión hidrostática en el fondo de un estanque contiene agua y cuya profundidad es de 1.5 m? (considera $\rho_{agua} = 1\,000\frac{kg}{m^3}$ y $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) $150\,000\frac{N}{m^2}$ b) $15\,000\frac{N}{m^2}$ c) $1\,500\frac{N}{m^2}$ d) $150\frac{N}{m^2}$

13. ¿Cuál es la presión que ejerce el fluido sobre el cuerpo que se encuentra sumergido en él a una profundidad de 5m? (considera $\rho_{fluido} = 790\frac{kg}{m^3}$ y $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) $1\,580\frac{N}{m^2}$ b) $3\,950\frac{N}{m^2}$ c) $15\,800\frac{N}{m^2}$ d) $39\,500\frac{N}{m^2}$

14. Se bombea agua con una presión de $6\times10^4\frac{N}{m^2}$, ¿cuál es la altura máxima a la que puede subir el agua por una tubería despreciando las pérdidas de presión? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 1.66m b) 6m c) 16.66m d) 60m

15. Una estatua de 50kg yace en el fondo de mar. Su volumen es de $3\times10^{-2}m^3$. ¿Cuál es el valor de la fuerza para levantarla? (considera $\rho_{agua} = 1\,025\frac{kg}{m^3}$)

a) 125.5N b) 152.5N c) 177.7N d) 188.8N

16. ¿Cuál es el gasto de agua por una tubería si por ella circulan 2.5 m^3 en 5 segundos?

a) $0.05\frac{m^3}{s}$ b) $0.5\frac{m^3}{s}$ c) $1.5\frac{m^3}{s}$ d) $2.0\frac{m^3}{s}$

17. ¿Cuál es el tiempo que tarda en llenarse un tanque cuya capacidad es de $60m^3$ al suministrarle un gasto de $0.2\frac{m^3}{s}$?

a) 5s b) 50s c) 300s d) 300min

18. ¿Cuál es el área de la sección transversal de una tubería, para que su gasto sea de $0.64\frac{m^3}{s}$, y el fluido tenga una velocidad de $20\frac{m}{s}$?

a) $3\,200cm^2$ b) $320cm^2$ c) $32cm^2$ d) $3.2cm^2$

19. Por una tubería fluyen $1.5m^3$ de gasolina en un 20s. ¿Cuál es el flujo? (considera $\rho_{gasolina} = 700\frac{kg}{m^3}$)

a) $9\,333.3\frac{kg}{s}$ b) $933.3\frac{kg}{s}$ c) $525\frac{kg}{s}$ d) $52.5\frac{kg}{s}$

20. En uno de sus extremos, una tubería tiene un área de sección transversal de $40cm^2$ y el agua circula con una velocidad de $8\frac{m}{s}$, en el otro extremo de la tubería hay un estrechamiento y el área de la sección transversal es de $10cm^2$. ¿Qué velocidad llevará el agua en este punto?

a) $2\frac{m}{s}$ b) $20\frac{m}{s}$ c) $32\frac{m}{s}$ d) $50\frac{m}{s}$

21. El enunciado, "Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta un empuje o fuerza de flotación igual al peso del volumen desalojado del fluido", corresponde al:

a) Principio de Pascal
b) Ecuación de Bernoulli
c) Principio de Arquímedes
d) Teorema de Torricelli

22. Es la razón que existe entre el volumen de un fluido y el tiempo.

a) Gasto b) Flujo c) Volumen d) Masa

23. A la oposición de un líquido a fluir se le llama:

a) Flujo b) Gasto c) Presión d) Viscosidad

24. ¿Cuál es la velocidad de salida de un fluido que se encuentra contenido en un recipiente de 3m de altura y al cual se le hace un orificio a 55cm por encima de su base? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) $7\frac{m}{s}$ b) $8\frac{m}{s}$ c) $49\frac{m}{s}$ d) $50\frac{m}{s}$

25. La velocidad con la que sale un fluido por un orificio de un recipiente es de $8\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la altura que tiene la columna del fluido por encima del orificio? (considera $g = 10\frac{m}{s^2}$)

a) 32m b) 8.1m c) 8m d) 3.2m

7 Propiedades térmicas de la materia

Propósito: el alumno resolverá problemas de calor temperatura y leyes de los gases.

Calor y temperatura

a) Diferencia entre el calor y la temperatura

El **calor** es una forma de energía que se transfiere de un cuerpo de mayor temperatura a otro de menor temperatura, también se puede definir al calor como la suma de las energías cinéticas de todas las moléculas de un cuerpo.

Equilibrio térmico (ley cero de la termodinámica)

Se dice que un sistema de cuerpos se encuentra en equilibrio térmico cuando el intercambio neto de energía entre sus elementos es cero, esto, tiene como consecuencia que los cuerpos se encuentren a la misma temperatura.

Escalas termométricas absolutas

Se define al **Cero absoluto** como la temperatura en la cual la energía cinética de las moléculas del agua es cero.

- Para convertir grados Celsius a escala Kelvin se emplea la fórmula:

$$T_K = T_C + 273$$

- Para convertir de escala Kelvin a grados Celsius se emplea la fórmula:

$$T_C = T_K - 273$$

- Para convertir grados Celsius a grados Fahrenheit se emplea la fórmula:

$$T_F = \frac{9}{5}T_c + 32 \quad \text{ó} \quad T_F = 1.8T_c + 32$$

- Para convertir grados Fahrenheit a grados Celsius se emplea la fórmula:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) \quad \text{ó} \quad T_C = \frac{T_F - 32}{1.8}$$

Ejemplo 1

Al convertir 41° F a grados Celsius se obtiene:

a) 105.8°C b) 45.5°C c) 5°C d) 100°C

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$T_F = 41°F$ $T_C = ?$	$T_C = \frac{T_F - 32}{1.8}$	$T_C = \frac{41-32}{1.8} = \frac{9}{1.8} = 5°C$	$T_C = 5°C$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Al convertir 27° C a escala Kelvin se obtiene:

a) 300K b) 235K c) 90.4K d) 50K

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$T_C = 27°C$ $T_K = ?$	$T_K = T_C + 273$	$T_K = 27 + 273$ $T_K = 300K$	$T_K = 300K$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Conductividad calorífica (Transferencia de calor) y capacidad térmica específica

El calor se transfiere o conduce de tres formas diferentes:

- Por **conducción**, es la forma en que el calor se conduce o propaga en los sólidos, debido al choque de las moléculas del cuerpo sin que éste modifique su forma.

Ejemplo:

Cuando uno de los extremos de una varilla metálica se pone en contacto con el fuego, después de un cierto tiempo el otro extremo también se calienta. Esto se debe a que las moléculas del extremo expuesto al fuego vibran con mayor energía, parte de esa energía se transfiere a las moléculas cercanas, las cuales a su vez transfieren ese exceso de energía a las otras moléculas. Así la temperatura del cuerpo aumenta de manera uniforme y se distribuye en todo el cuerpo.

- Por **convección**, el calor se propaga a través de un fluido.

Ejemplo:

Al calentar agua en un recipiente se observa que después de un cierto tiempo se produce un movimiento en el líquido. Esto se debe a que al recibir calor el agua del fondo del recipiente aumenta su temperatura y volumen, en consecuencia disminuye su densidad y esta agua tiende a ser reemplazada por agua a menor temperatura (más fría) y de mayor densidad. Al proceso de circulación de masas de agua caliente hacia arriba y fría hacia abajo se le conoce como "corrientes de convección".

- Por **radiación**, el calor se transfiere a través de ondas electromagnéticas.

Ejemplo:

Un ejemplo cotidiano de la transferencia de calor por radiación es el calor que nos llega del Sol, también conocido como "rayos infrarrojos".

Caloría (cal)

Cantidad de calor necesario para elevar en un grado Celsius la temperatura de un gramo de agua (de 14.5°C a 15.5°C). El equivalente del calor en joules es 1 cal = 4.2 J.
Otra equivalencia empleada con frecuencia es 1 Kcal = 1000 cal.

Capacidad calorífica

Se define como la razón que existe entre la cantidad de calor que recibe un cuerpo y el incremento de su temperatura.

$$c = \frac{Q}{\Delta T}$$

Donde:
- Q = Cantidad de calor [cal]
- ΔT = Incremento de la Temperatura [°C]
  $\Delta T = T_f - T_i$
- T_f = Temperatura final [°C]
- T_i = Temperatura inicial [°C]
- c = Capacidad calorífica $\left[\frac{cal}{°C}\right]$

Calor específico

Es la razón que existe entre la capacidad calorífica de una sustancia y su masa.

$$c_e = \frac{c}{m} \quad \text{ó} \quad c_e = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

Donde:
- Q = Cantidad de calor [cal]
- m = Masa [g]
- ΔT = Incremento de la temperatura [°C]
- c_e = Calor específico $\left[\frac{cal}{g \cdot °C}\right]$

Tabla de calores específico de algunas sustancias

Sustancia	Calor específico c_e en $\frac{cal}{g \cdot °C}$
Agua	1
Hierro	0.113
Aluminio	0.217
Hielo	0.50
Mercurio	0.033

Ejemplo 1

¿Qué cantidad de calor se debe aplicar a 350 g de agua para elevar su temperatura de 25°C a 65°C?

a) 14000cal b) 140000cal c) 14000cal d) 140cal

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 350g$ $c_e = 1\frac{cal}{g°C}$ $T_i = 25°C$; $T_f = 65°C$ $\Delta T = 65°C - 25°C = 40°C$	$c_e = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$ Despejando "Q" $Q = m \cdot c_e \cdot \Delta T$	$Q = (350g)\left(1\frac{cal}{g°C}\right)(40°C)$ $Q = 14000cal$	$Q = 14000cal$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

Se aplican 60.76 Kcal, a una barra de aluminio para que incremente su temperatura en 80 °C. ¿Cuál es la masa de la barra?

a) 3500kg b) 3.5kg c) 3.5g d) 35000g

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$Q = 60.76Kcal. = 60760\,cal$ $\Delta T = 80°C$ $c_e = 0.217\frac{cal}{g°C}$ $m = ?$	$c_e = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$ Despejando "m" $m = \frac{Q}{c_e \cdot \Delta T}$	$m = \frac{60760\,cal}{\left(0.217\frac{cal}{g°C}\right)\cdot(80°C)}$ $m = \frac{60760\,cal}{17.36\frac{cal}{g}} = 3500g = 3.5kg$	m =3.5 kg.

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 3

A 300 gr de una sustancia se le aplican 742.5cal para elevar su temperatura de 15°C a 90°C. ¿Cuál es la sustancia?

a) Hierro (0.113) b) Cobre (0.093) c) Aluminio (0.217) d) Mercurio (0.033)

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$m = 300\,g$ $Q = 742.5cal$ $T_i = 15°C$; $T_f = 90°C$ $\Delta T = 90°C - 15°C = 75°C$ $c_e = ?$	$c_e = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$	$c_e = \frac{742.5cal}{(300g)\cdot(75°C)} = \frac{742.5cal}{22500g°C}$ $c_e = 0.033\frac{cal}{g°C}$	$c_e = 0.033\frac{cal}{g°C}$

La sustancia cuyo calor específico es de $0.033\frac{cal}{g°C}$ es el mercurio, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Leyes de la termodinámica

La termodinámica es la rama de la Física que estudia la transformación del calor en trabajo y viceversa.

Primera ley

El calor suministrado a un sistema es igual a la suma del incremento en la energía interna de éste y el trabajo realizado por el sistema sobre sus alrededores, esto significa que la energía no se crea ni se destruye sólo se transforma.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Donde, ΔQ = Calor suministrado al sistema [cal, Joules]
ΔU = Incremento en la energía del sistema [cal, Joules]
ΔW = Trabajo realizado por el sistema [cal, Joules]

El signo de ΔQ es positivo cuando al sistema se le suministra calor y es negativo si el sistema cede calor. El signo de ΔW es positivo cuando el sistema realiza trabajo y negativo cuando el trabajo se realiza sobre él. Si el sistema incrementa su temperatura el signo de ΔU es positivo, y si disminuye su temperatura es negativo.

Un proceso térmico es **adiabático** si el sistema no recibe ni cede calor.

$$\Delta Q = 0 \rightarrow \Delta W = -\Delta U$$

Un proceso térmico es **isocórico** cuando el volumen del sistema permanece constante y no se realiza trabajo alguno.

$$\Delta V = \text{constante} \rightarrow \Delta W = 0 \rightarrow \Delta Q = \Delta U$$

Un proceso térmico es **isobárico** cuando la presión del sistema permanece constante.

Un proceso térmico es **isotérmico** cuando la temperatura del sistema permanece constante.

$$\Delta T = \text{constante} \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow \Delta Q = \Delta W$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el incremento en la energía interna de un sistema si se le suministran 800 calorías de calor y se le aplica un trabajo de 500 Joules?

a) 3860 J b) 2860 J c) –2860 J d) –3860 J

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\Delta Q = 800\,\text{cal} \times \frac{4.2\text{J}}{1\text{cal}} = 3360\,\text{J}$	$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$	$\Delta U = 3360\,\text{J} - (-500\,\text{J})$	
$\Delta W = -500\,\text{J}$	Despeje	$\Delta U = 3360\,\text{J} + 500\,\text{J}$	$\Delta U = 3860\,\text{J}$
$\Delta U = ?$	$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$	$\Delta U = 3860\,\text{J}$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Un sistema realiza un trabajo de 1.8Kcal para incrementar su energía interna en 3.2Kcal. ¿Cuánto calor en Joules se le suministró?

a) 2100J b) –2100J c) 21000J d) –21000J

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$\Delta W = 1.8\,\text{Kcal} = 1800\,\text{cal}$		$\Delta Q = 3200\,\text{cal} + 1800\,\text{cal}$	
$\Delta U = 3.2\,\text{Kcal} = 3200\,\text{cal}$	$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$	$\Delta Q = 5000\,\text{cal}$	$\Delta Q = 21000\,\text{J}$
$\Delta Q = ?$		$\Delta Q = 5000\,\text{cal} \times \frac{4.2\text{J}}{1\text{cal}} = 21000\,\text{J}$	

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Segunda ley
Es imposible construir una máquina térmica que transforme en su totalidad el calor en energía y viceversa.
La **eficiencia de una máquina térmica** es la relación entre el trabajo mecánico producido y el calor suministrado.

$$e = \frac{T}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Donde,

T = Trabajo mecánico	[cal, Joules]	T_1 = Trabajo de entrada	[cal, Joules]
Q_1 = Calor suministrado	[cal, Joules]	T_2 = Trabajo de salida	[cal, Joules]
Q_2 = Calor obtenido	[cal, Joules]	e = Eficiencia	[%]

Ejemplo:
¿Cuál es la eficiencia de una máquina térmica a la cual se le suministran 6000 calorías para obtener 12600 Joules de calor de salida?

a) 75% b) 25% c) 50% d) 20%

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$Q_1 = 6000$ cal $Q_2 = 12600\,J \times \frac{1cal}{4.2J}$ $Q_2 = 3000\,cal$ $e = ?$	$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$	$e = \frac{6000cal - 3000cal}{6000cal}$ $e = \frac{3000cal}{6000cal} = 0.5$ ó 50%	$e = 50\%$

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Teoría cinética de los gases

Esta teoría supone que las moléculas de un gas están muy separadas y se mueven en línea recta hasta encontrarse con otras moléculas y colisionarse con ellas o con las paredes del recipiente que las contiene.

a) Estructura de la materia

La materia en general está formada por protones, electrones y neutrones, estas partículas por lo general forman átomos.
Los átomos son las partículas más pequeñas de la materia. A las sustancias que contienen átomos de una misma clase se les llama **elementos**, y las que están formadas por átomos de distintas clases se les llama **compuestos**.
La materia en la naturaleza se presenta en tres estados de agregación: sólido, líquido y gaseoso.

b) Temperatura según la teoría cinética

La temperatura de una sustancia es la suma de las energías cinéticas promedio de sus moléculas.

c) Ecuación de los gases ideales

Los **gases ideales** son aquellos que tienen un número pequeño de moléculas, por tanto, su densidad es baja y la fuerza de cohesión entre sus moléculas es casi nula.

Ley general del estado gaseoso

Para una masa de gas dada, siempre será verdadera la relación:

$$\frac{P \cdot V}{T} = C \quad \text{ó} \quad \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$$

Donde:

V = Volumen	[m^3, cm^3]	P_1 = Presión inicial	[Pa, atm, mm de Hg]
T = Temperatura	[K]	P_2 = Presión final	[Pa, atm, mm de Hg]
P = Presión	[Pa, atm, mm de Hg]	T_1 = Temperatura inicial	[K]
C = Constante		T_2 = Temperatura final	[K]
		V_1 = Volumen inicial	[m^3, cm^3]
		V_2 = Volumen final	[m^3, cm^3]

Ley de Boyle
Para una masa de gas dada la temperatura constante, el volumen del gas varía de manera inversamente proporcional a la presión absoluta que recibe.

$$T = \text{Constante} \rightarrow P \cdot V = C \quad \text{ó} \quad P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

Ley Charles
Para una masa de gas dada a presión constante, el volumen del gas varía de manera directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$P = \text{Constante} \rightarrow \frac{V}{T} = C \quad \text{ó} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Ley de Gay–Lussac
Para una masa de gas dada a un volumen constante, la presión absoluta del gas varía de manera directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$V = \text{Constante} \rightarrow \frac{P}{T} = C \quad \text{ó} \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Ejemplo 1

Se tiene un gas a una presión constante de 600 mm de Hg, el gas ocupa un volumen de $40cm^3$ a una temperatura de 50°C. ¿Qué volumen ocupará el gas a una temperatura de 0°C?

a) $40cm^3$ b) $33.80cm^3$ c) $57.32cm^3$ d) $640cm^3$

Solución:

Datos
$V_1 = 40\ cm^3$
$T_1 = 50°C = 50 + 273 = 323K$
$T_2 = 0°C = 0 + 273 = 273K$
$V_2 = ?$

Fórmula
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$
Despeje
$$V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1}$$

Sustitución
$$V_2 = \frac{(40cm^3) \cdot (273K)}{323K}$$
$$V_2 = 33.80\ cm^3$$

Resultado
$V_2 = 33.80cm^3$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

800 gramos de una masa se encuentra en las siguientes condiciones, temperatura de 35°C, presión 75atm y volumen de $60cm^3$. Si la temperatura se incrementa a 50°C y el volumen a $80cm^3$, ¿cuál es la nueva presión del gas?

a) 104.87atm b) 53.63atm c) 589.8atm d) 58.98atm

Solución:

Datos
$T_1 = 35°C = 35 + 273 = 308K$
$P_1 = 75atm$
$V_1 = 60cm^3$
$T_2 = 50°C = 50 + 273 = 323K$
$V_2 = 80cm^3$
$P_2 = ?$

Fórmula
$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$$
Despeje
$$P_2 = \frac{P_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2}$$

Sustitución
$$P_2 = \frac{(75atm) \cdot (60cm^3) \cdot (323K)}{(308K) \cdot (80cm^3)}$$
$$P_2 = 58.98\ atm$$

Resultado
$P_2 = 58.98atm$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejercicios

1. Al convertir 113°F a grados Celsius se obtiene:
   a) 45°C b) 49°C c) 113°C d) 235.4°C

2. Al convertir 65°C a escala Kelvin se obtiene:
   a) 149K b) 213K c) 228K d) 338K

3. Al convertir 50° C a grados Fahrenheit se obtiene:
   a) 10°F b) 122°F c) 147.6°F d) 323°F

4. Al convertir 325K a grados Celsius se obtiene:
   a) 40°C b) 52°C c) 173.8°C d) 300°C

5. Si se eleva la temperatura de una sustancia de 15° a 75ºC, determina el incremento de la temperatura en escala Kelvin.
   a) 333K b) 293K c) 283K d) 213K

6. Determina el equivalente de 45ºC a escala Fahrenheit.
   a) –7°F b) 49°F c) 57°F d) 113°F

7. ¿Cómo se llama la transferencia de energía debida a una diferencia de temperatura entre 2 o más cuerpos?
   a) Energía cinética b) Calor c) Energía potencial d) Energía interna

8. ¿Cómo se llama al proceso cuando el calor se transfiere mediante el movimiento real de un fluido?
   a) Radiación b) Conducción c) Convección d) Evaporación

9. Es la cantidad de calor necesario para elevar un grado centígrado la temperatura de un gramo de agua:
   a) 1 Joule b) 1 grado Celsius c) 1 grado Fahrenheit d) 1 caloría

10. ¿Qué cantidad de calor se debe aplicar a 1 500 gramos de agua para elevar la temperatura del líquido de 20ºC a 45ºC?
    a) 0.016Kcal b) 37.5Kcal c) 42.8Kcal d) 60Kcal

11. ¿Qué cantidad de calor se debe aplicar a 500 gr de agua para elevar su temperatura de 10°C a 120°C?
    a) 550cal b) 5 500cal c) 55 000cal d) 550 000cal

12. Se aplican 22.6 Kcal a una barra de hierro ($0.113\frac{cal}{gr°C}$) para que incremente su temperatura en 250°C. ¿Cuál es la masa de la barra?
    a) 800gr b) 100gr c) 88.5gr d) 80gr

13. A 400 gr de una sustancia se le aplican 13020 cal para elevar su temperatura de 50°C a 200°C. ¿Cuál es la sustancia?
    a) Hierro (0.113) b) Cobre (0.093) c) Aluminio (0.217) d) Mercurio (0.033)

14. ¿Qué cantidad de calor se debe aplicar a 1.5kg de mercurio ($0.033\frac{cal}{gr°C}$) para elevar su temperatura de 60°C a 150°C?

a) 41 580cal　b) 4 455cal　c) 415.8cal　d) 4.158cal

15. ¿Cuál es el incremento en la energía interna de un sistema si se le suministran 6000 calorías de calor para que realice un trabajo de 12 600J?

a) 9 000J　b) 10 600J　c) 12 600J　d) 126 000J

16. Se realiza un trabajo de 7000 cal sobre un sistema para incrementar su energía interna en 8000 cal. ¿Cuánto calor en Joules se le suministró?

a) 42 000J　b) 10 000J　c) 4 200J　d) 1 000J

17. ¿Cuál es la eficiencia de una máquina térmica a la cual se le suministran 10000 J de trabajo de entrada para obtener 6000 J de trabajo de salida?

a) 80%　b) 60%　c) 50%　d) 40%

18. ¿Cuál es la eficiencia de una máquina térmica a la cual se le suministran 150 cal de calor de entrada para obtener 60 cal de calor de salida?

a) 80%　b) 60%　c) 40%　d) 10%

19. Un proceso térmico es _______________ si el sistema no recibe ni cede calor.

a) isotérmico　b) isocórico　c) isobárico　d) adiabático

20. Relacione las siguientes columnas:

I Se define como la razón que existe entre la cantidad de calor que recibe un cuerpo y su incremento de temperatura.	a. Conducción
II Cantidad de calor necesario para elevar en un grado Celsius la temperatura de un gramo de agua.	b. Capacidad calorífica.
III Es la forma en que el calor se conduce o propaga en los sólidos	c. Calor específico.
IV Es la razón que existe entre la capacidad calorífica de una sustancia y su masa.	d. Caloría.

a) I–c, II–d , III–b, IV–a　b) I–a, II–b , III–d, IV–c　c) I–b, II–d , III–a, IV–c　d) I–b, II–d , III–c, IV–a

21. El enunciado "La temperatura a la cual un sólido comienza a licuarse, estando en contacto con el estado líquido resultante" corresponde a la definición de:

a) caloría　b) punto de ebullición　c) punto triple　d) punto de fusión

22. En el enunciado "Es imposible construir una máquina térmica que transforme en su totalidad el calor en energía y viceversa". ¿A qué ley de la termodinámica se refiere?

a) Ninguna　b) Ley cero　c) Primera ley　d) Segunda ley

23. El enunciado de la ley cero de la termodinámica afirma que:
I Para una masa de gas dada a temperatura constante, el volumen del gas varía de manera inversamente proporcional a la presión absoluta que recibe.
II El calor suministrado a un sistema es igual a la suma del incremento en la energía interna de éste y el trabajo realizado por el sistema sobre sus alrededores
III Es imposible construir una máquina térmica que transforme en su totalidad el calor en energía y viceversa.
IV Un sistema de cuerpos se encuentra en equilibrio térmico cuando el intercambio neto de energía entre sus elementos es cero.

a) I　b) II　c) III　d) IV

24. Se tiene un gas a una presión constante de 500 mm de Hg, el gas ocupa un volumen de 200 cm^3 a una temperatura de 40°C. ¿Qué volumen ocupará el gas a una temperatura de 0°C?

a) 174.44cm^3 b) 229.30cm^3 c) 1 744.4cm^3 d) 2 293.0cm^3

25. Un gas se encuentra a una temperatura constante de 20°C y bajo una presión de 450 mm de Hg ocupa un volumen de 50 cm^3. ¿Cuál será la nueva presión para que el gas ocupe un volumen de 30 cm^3?

a) 270 mm de Hg b) 750 mm de Hg c) 900 mm de Hg d) 2 700 mm de Hg

26. Un gas ocupa un volumen constante de 200 cm^3 y a una presión de 60 atmósferas su temperatura es de 30°C, ¿cuál es la temperatura del gas si la presión se duplica?

a) 60°C b) 333°C c) 600°C d) 606°C

27. El enunciado "Para una masa de gas dada a temperatura constante, el volumen del gas varia de manera inversamente proporcional a la presión absoluta que recibe" corresponde a la ley de:

a) Boyle b) Gay–Lussac c) Charles d) Ohm

28. Si en una masa de gas dada la presión es constante, el volumen de gas varía directamente proporcional a su temperatura absoluta, es el enunciado de la:

a) ley de los gases ideales b) ley de Gay-Lussac c) ley de Boyle d) ley de Charles

29. Una masa de 1 200 gramos de gas se encuentra a una temperatura de 20°C, con una presión de 5atm ocupa un volumen de 25cm^3. Si el gas se mantiene a temperatura constante pero el volumen se duplica, ¿qué sucede con la presión final del gas?

a) Se cuadriplica b) Se duplica c) Se mantiene constante d) Se reduce a la mitad

30. En un recipiente está contenido un gas a una presión constante de 2.5Atm, el gas ocupa un volumen de 80cm^3 a una temperatura de 30°C, ¿qué volumen ocupará el gas a una temperatura de 5°C?

a) 480cm^3 b) 87.19cm^3 c) 73.39cm^3 d) 13.33cm^3

31. Novecientos cincuenta gramos de gas se encuentran sometidos a una presión de 9Atm y a una temperatura de 15°C. Si el volumen del recipiente se mantiene constante, ¿cuál es la presión del gas si su temperatura de éste aumenta a 35°C?

a) 3.85Atm b) 8.415Atm c) 9.625Atm d) 21Atm

32. En un cilindro se encuentran 90cm^3 de un gas a una presión de 750mmHg y a 40°C de temperatura. ¿Cuál es la temperatura del gas si el volumen del cilindro se duplica y la presión se reduce a la tercera parte?

a) –64.33°C b) 26.66°C c) 60°C d) 208.66°C

8 Electromagnetismo

Propósito: el alumno resolverá problemas relacionados con la corriente eléctrica y los circuitos eléctricos.

Efectos cuantitativos entre cuerpos cargados eléctricamente

La materia en general está formada por átomos, que a su vez están constituidos por electrones, protones y neutrones. Los electrones y neutrones tienen una propiedad conocida como *carga eléctrica*. Los neutrones son partículas eléctricamente neutras, los electrones poseen una carga eléctrica negativa y la carga de los protones es positiva. La unidad fundamental de carga en el sistema internacional es el "coulomb [C]".

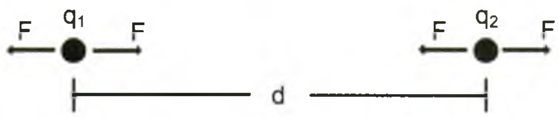
Carga del electrón $[e^-] = -1.6\times10^{-19}C$

Carga del protón $[e^+] = 1.6\times10^{-19}C$

Ley de Coulomb y campo eléctrico

a) Ley de Coulomb

La magnitud de la fuerza de atracción o repulsión que experimentan dos cargas eléctricas, es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Cuando las cargas eléctricas son del mimo signo, la fuerza es repulsiva, y cuando son de signos opuestos la fuerza es atractiva.



$$F = K\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}$$

Donde: q_1, q_2 = Cargas eléctricas [C]

K = Constante de Coulomb

$K = 9\times10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}$

d = Distancia [m]

F = Fuerza [N]

Ejemplo 1

Una carga de $6\times10^{-6}C$ se encuentra a 2m de una carga de $-4\times10^{-6}C$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de atracción entre las cargas?

a) 0.54N b) 0.054N c) 5.4N d) 54N

Solución:

Datos

$q_1 = 6\times10^{-6}C$

$q_2 = -4\times10^{-6}C$

d = 2 m

$K = 9\times10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}$

F = ?

Fórmula

$$F = K\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}$$

Sustitución

$$F = \left(9\times10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\cdot\frac{(6\times10^{-6}C)(4\times10^{-6}C)}{(2m)^2}$$

$$F = \left(9\times10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\cdot\frac{24\times10^{-12}C^2}{4m^2}$$

$$F = \left(9\times10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\cdot\left(6\times10^{-12}\frac{C^2}{m^2}\right)$$

$$F = 54\times10^{-3}N = 0.054N$$

Resultado

F = 0.054 N

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

b) Campo eléctrico
Región del espacio que rodea a una carga eléctrica.

La magnitud del campo eléctrico producido por un campo de fuerza **"F"** sobre una carga de prueba **"q"** se obtiene con la fórmula:

$$E = \frac{F}{q}$$

Donde: F = Magnitud del campo de fuerza [N]
q = Carga de prueba [C]
E = Magnitud del campo eléctrico $\left[\frac{N}{C}\right]$

Ejemplo:

Una carga de 4×10^{-6}C se introduce a una región donde actúa un campo de fuerza de 0.032N. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en esa región?

a) $80\frac{N}{C}$ b) $80\,000\frac{N}{C}$ c) $800\frac{N}{C}$ d) $8000\frac{N}{C}$

Solución:

Datos
$q = 4 \times 10^{-6}C$
$F = 0.032\ N$
$E = ?$

Fórmula
$$E = \frac{F}{q}$$

Sustitución
$$E = \frac{0.032N}{4 \times 10^{-6}C} = \frac{32 \times 10^{-3}N}{4 \times 10^{-6}C}$$
$$E = 8 \times 10^{-3-(-6)}\frac{N}{C}$$
$$E = 8 \times 10^{3}\frac{N}{C} = 8000\frac{N}{C}$$

Resultado
$$E = 8000\frac{N}{C}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

La magnitud del campo eléctrico producido por una carga puntual **"q"** a una distancia **"d"** de ella se obtiene con la fórmula:

$$E = K\frac{q}{d^2}$$

Donde: q = Carga eléctrica [C]
$K = 9 \times 10^{9}\frac{N \cdot m^2}{C^2}$
d = Distancia [m]
E = Campo eléctrico $\left[\frac{N}{C}\right]$

Ejemplo 2

La magnitud del campo eléctrico producido por una carga de 6×10^{-9}C a una distancia de 15cm de su centro es:

a) $240\frac{N}{C}$ b) $2\,400\frac{N}{C}$ c) $24\,000\frac{N}{C}$ d) $240\,000\frac{N}{C}$

Solución:

Datos
$q = 6 \times 10^{-9}C$
$d = 15cm = 15 \times 10^{-2}m$
$E = ?$

Fórmula
$$E = K\frac{q}{d^2}$$

Sustitución
$$E = \left(9 \times 10^{9}\frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)\frac{6 \times 10^{-9}C}{(15 \times 10^{-2}m)^2}$$
$$E = \left(9 \times 10^{9}\frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \cdot \frac{6 \times 10^{-9}C}{225 \times 10^{-4}m^2}$$
$$E = \frac{54 \times 10^{0}N \cdot m^2 \cdot C}{225 \times 10^{-4}C^2 \cdot m^2} = 24 \times 10^{2}\frac{N}{C}$$
$$E = 2400\frac{N}{C}$$

Resultado
$$E = 2400\frac{N}{C}$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ley de Ohm y potencia eléctrica

a) Ley de Ohm

La intensidad de corriente eléctrica que circula por un conductor es directamente proporcional al voltaje aplicado en sus extremos e inversamente proporcional a su resistencia.

$$I = \frac{V}{R} \quad \text{ó} \quad V = I \cdot R$$

Donde, I = Intensidad de corriente eléctrica [A]
V = Diferencia de potencial o voltaje [Volts]
R = Resistencia del conductor [Ω = Ohms]

Ejemplo 1

¿Cuál es la intensidad de corriente que circula por un conductor de 15Ω de resistencia cuando se aplica en sus extremos una diferencia de potencial de 60Volts?

a) 900A   b) 4A   c) 0.25A   d) 2.5A

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$R = 15\Omega$ $V = 60V$ $I = ?$	$I = \frac{V}{R}$	$I = \frac{60V}{15\Omega} = 4A$	$I = 4A$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

Ejemplo 2

¿Cuál es la ley que establece que la resistencia eléctrica de un dispositivo, está definida como la caída de voltaje que experimenta por unidad de corriente que pasa a través de él?

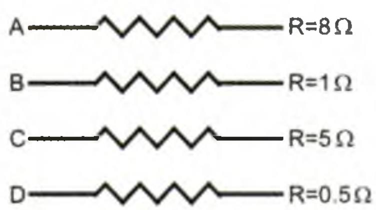
a) Ley de inducción de Faraday
b) Ley de Gauss
c) Ley de Lenz
d) Ley de Ohm

Solución:

La *ley de Ohm* establece que la intensidad de corriente que circula por un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial e inversamente proporcional a la resistencia de dicho conductor. Dicho de otra forma la resistencia eléctrica que presenta el conductor es el cociente de la caída de voltaje por la unidad de corriente que circula por él. La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Identificar por cuál de los circuitos pasa más corriente, suponiendo que en cada uno de los circuitos la f.e.m. (ε), es la misma



a) A   b) B   c) C   d) D

Solución:

La *ley de Ohm* establece que la intensidad de corriente que circula por un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial (en este caso la fuerza electromotriz), e inversamente proporcional a la resistencia de dicho conductor. Entonces, si la f.e.m. es la misma para todos, significa que a menor resistencia entonces circula una mayor cantidad de corriente eléctrica. La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 3

Una intensidad de corriente de 5.5A circula por un conductor de 20Ω. ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicado en los extremos del conductor?

a) 0.25 Volts b) 14.5Volts c) 3.63Volts d) 110Volts

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
I = 5.5A		$V=(5.5A)(20\Omega)$	
$R=20\Omega$	$V=I\cdot R$	$V=110Volts$	$V=110Volts$
V = ?			

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

b) Potencia eléctrica

Es la cantidad de energía que consume un dispositivo eléctrico por unidad de tiempo.

$$P=V\cdot I$$

Donde, V = Diferencia de potencial [Volts]
I = Intensidad de corriente [A]
P = Potencia eléctrica [watts]

En base a la ley de Ohm, se sabe que: $V=I\cdot R$ y $I=\frac{V}{R}$, con estas relaciones se obtienen otras fórmulas para la potencia eléctrica. $P=I^2\cdot R$ ó $P=\frac{V^2}{R}$

Ejemplo:

¿Qué potencia desarrolla un motor eléctrico si se conecta a una diferencia de potencial de 250Volts para que genere una intensidad de corriente de 8A?

a) 0.032watts b) 31.25watts c) 2 000watts d) 200watts

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
V = 250 Volts	$P=V\cdot I$	$P=(250\,Volts)\cdot(8\,A)$	
I = 8 A		$P=2000\,Watts$	$P=2000\;Watts$
P = ?			

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Circuitos

a) Circuitos de resistencias

Circuitos en serie

Todos los circuitos conectados en serie presentan las siguientes características:

I La intensidad de corriente en cada resistencia es la misma.

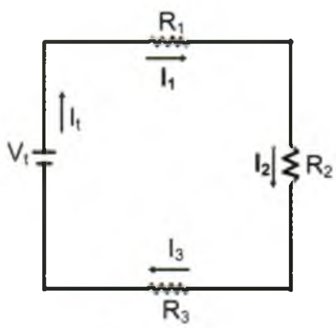
$$I_t=I_1=I_2=I_3=\ldots=I_n$$

II La resistencia total del circuito es igual a la suma de todas las resistencias.

$$R_t=R_1+R_2+R_3+\ldots+R_n$$

III La diferencia de potencial total es igual a la suma de las diferencias de potenciales de cada resistencia.

$$V_t=V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n$$



Ejemplo 1
Las resistencias de 7Ω, 9Ω y 14Ω se conectan en serie. ¿Cuál es la resistencia total del circuito?

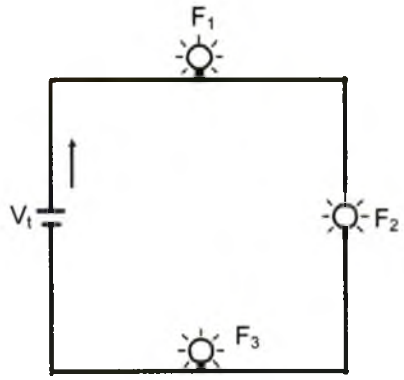
a) 2Ω b) 34Ω c) 30Ω d) 80Ω

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$R_1 = 7\Omega$		$R_t = 7\Omega + 9\Omega + 14\Omega$	
$R_2 = 9\Omega$	$R_t = R_1 + R_2 + R_3$	$R_t = 30\Omega$	$R_t = 30\Omega$
$R_3 = 14\Omega$			
$R_t = ?$			

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2
En el siguiente circuito:



Si el filamento del foco 2 se funde, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Todos los focos se apagan.
b) Se apagan F_2 y F_3 únicamente.
c) Permanece encendido F_3 únicamente.
d) Permanecen encendidos F_1 y F_3.

Solución:
Al interrumpirse la corriente en el filamento o resistencia de F_2 automáticamente F_1 y F_3 ya no encienden por estar conectados los focos en serie, por tanto, la respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Circuitos en paralelo

Todos los circuitos conectados en paralelo presentan las siguientes características:

I La intensidad de corriente total es igual a la suma de todas las intensidades en cada resistencia.

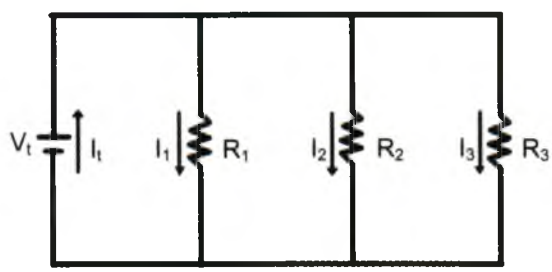
$$I_t = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$$

II La resistencia total del circuito se obtiene con la fórmula:

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

III La diferencia de potencial total es igual a la diferencias de potencial de cada resistencia.

$$V_t = V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_n$$



Ejemplo 1

Tres resistencias de 8Ω, 4Ω y 2Ω respectivamente se conectan en paralelo, y una corriente total de 21 A se distribuye entre las tres. ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada al circuito?

a) 294Volts b) 0.66Volts c) 400Volts d) 24Volts

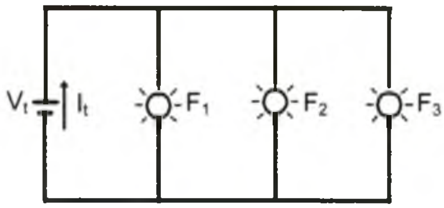
Solución:

Datos	Fórmulas	Sustituciones	Resultado
$R_1 = 8\Omega$		$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{8\Omega} + \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{2\Omega} = \frac{1+2+4}{8\Omega} = \frac{7}{8\Omega}$	
$R_2 = 4\Omega$			
$R_3 = 2\Omega$	$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$	$\frac{R_t}{1} = \frac{8\Omega}{7} \rightarrow R_t = \frac{8}{7}\Omega$	$V_t = 24\text{Volts}$
$I_t = 21\text{A}$			
$R_t = ?$	$V_t = I_t \cdot R_t$	$V_t = (21\text{A})\left(\frac{8}{7}\Omega\right) = 24\text{Volts}$	
$V_t = ?$			

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

El siguiente circuito se ilustra a 3 focos iguales conectados a una batería:



Si se funde el filamento del foco uno, ¿qué sucede con los focos restantes?

a) Los focos dos y tres dejan de encender.
b) Solo enciende el foco tres.
c) Permanecen encendidos los focos dos y tres.
d) Se apagan todos.

Solución:

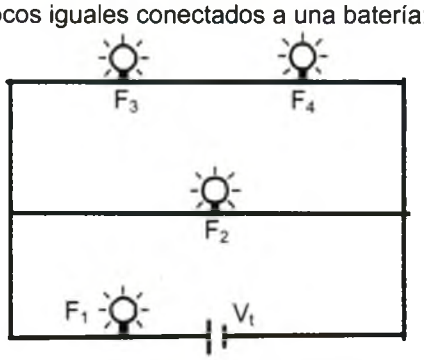
Los focos se encuentran conectados en paralelo, por tanto, al fundirse el filamento del foco, la corriente total se distribuye en los focos restantes en consecuencia estos permanecen encendidos. La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Circuitos mixtos

Estos circuitos se forman por la combinación de circuitos en serie y paralelo.

Ejemplo 1

El siguiente circuito se ilustra a tres focos iguales conectados a una batería:



Si el filamento del foco dos se funde, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

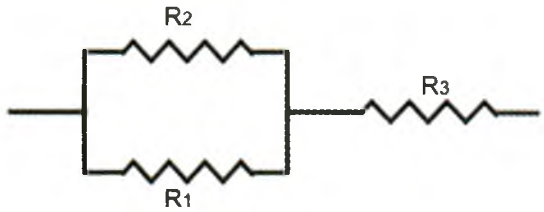
a) Sólo encienden los focos tres y cuatro.
b) Sólo enciende el foco uno.
c) Sólo enciende el foco tres.
d) Sólo encienden los focos uno, tres y cuatro.

Solución:

En el circuito los focos tres y cuatro se encuentran en serie, a su vez se encuentran en paralelo con los focos uno y dos, al interrumpirse la corriente en el foco dos, el circuito que forman los focos uno, tres y cuatro es un circuito en serie, por tanto estos focos permanecen encendidos y la respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

¿Cuál es la resistencia equivalente para el siguiente circuito, considerando que $R_3 = 4\Omega$, $R_2 = \frac{1}{2}R_3$ y $R_1 = \frac{1}{2}R_2$?



a) $\frac{13}{3}\Omega$ b) $\frac{14}{3}\Omega$ c) $\frac{15}{3}\Omega$ d) $\frac{16}{3}\Omega$

Solución:

Para determinar la resistencia equivalente del circuito es necesario considerar las resistencias R_1 y R_2 como un arreglo en paralelo, una vez determinada la resistencia equivalente de esta sección, el resultado junto con R_3 se consideran como un arreglo en serie.

Datos

$R_1 = \frac{1}{2}R_2 = 1\Omega$

$R_2 = \frac{1}{2}R_3 = 2\Omega$

$R_3 = 4\Omega$

$R_{eq} = ?$

Fórmulas

Arreglo en paralelo

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Arreglo en serie

$$R_{eq} = R_4 + R_3$$

Sustituciones

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega}$$

$$\frac{1}{R_4} = \frac{2+1}{2\Omega}$$

$$\frac{1}{R_4} = \frac{3}{2\Omega}$$

$$R_4 = \frac{2}{3}\Omega$$

Ahora se determina la resistencia equivalente del circuito.

$$R_{eq} = \frac{2}{3}\Omega + 4\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{14}{3}\Omega$$

Resultado

$$R_{eq} = \frac{14}{3}\Omega$$

La respuesta correcta corresponde al inciso "b".

b) Circuitos de capacitores o condensadores

Un **capacitor** es un dispositivo empleado para almacenar carga. La capacitancia se obtiene con la fórmula:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Donde: Q = Carga eléctrica [C]
V = Diferencia de potencial [Volts]
C = Capacitancia $\left[\frac{C}{Volts} = Farads\right]$

Circuito de capacitores en serie

Todos los circuitos conectados en serie presentan las siguientes características:

I La capacitancia total o equivalente del circuito es:

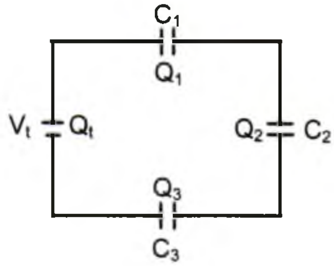
$$\frac{1}{C_t}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\ldots+\frac{1}{C_n}$$

II La carga total del circuito es la misma en cada capacitor.

$$Q_t=Q_1=Q_2=Q_3=\ldots=Q_n$$

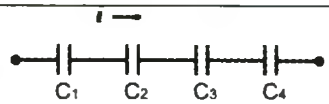
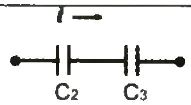
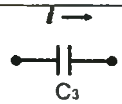
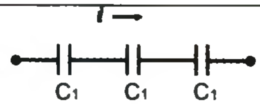
III La diferencia de potencial total es igual a la suma de las diferencias de potenciales de cada capacitor.

$$V_t=V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n$$



Ejemplo 1

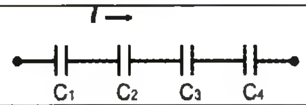
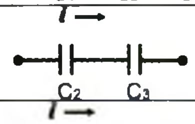
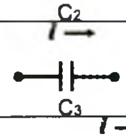
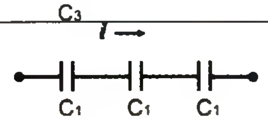
Los capacitores ordenados en serie tienen una capacitancia equivalente a $C_{eq}=\frac{1}{\sum_i^n \frac{1}{C_i}}$. Relaciona la capacitancia equivalente para los siguientes capacitores mostrados en la tabla en términos de las capacitancias dadas.

Capacitancia equivalente	Circuito
1) $C_{eq}=C_3$	A. 
2) $C_{eq}=\frac{C_1}{3}$	B 
3) $C_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}}$	C. 
4) $C_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$	D. 

a) 1C, 2D, 3A, 4B
b) 1C, 2A, 3D, 4B
c) 1C, 2B, 3A, 4D
d) 1C, 2A, 3B, 4D

Solución:

Para relacionar los circuitos con sus respectivas capacitancias equivalentes, es necesario realizar las operaciones empleando el modelo de capacitancias en serie de tal forma que:

Circuito	Capacitancia en función de C_1
A. 	$C_{eq}=\dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}}$
B. 	$C_{eq}=\dfrac{1}{\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$
C. 	$C_{eq}=\dfrac{1}{\frac{1}{C_3}}=\dfrac{C_3}{1}=C_3$
D. 	$C_{eq}=\dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}}=\dfrac{1}{\frac{3}{C_1}}=\dfrac{C_1}{3}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

Ejemplo 2

Los condensadores de $6f$, $3f$ y $2f$ se conectan en serie. ¿Cuál es la capacitancia total del circuito?

a) 0.025 f b) 0.5 f c) 11 f d) 1 f

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
$C_1=6f$ $C_2=3f$ $C_3=2f$ $C_t=?$	$\dfrac{1}{C_t}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}+\dfrac{1}{C_3}$	$\dfrac{1}{C_t}=\dfrac{1}{6f}+\dfrac{1}{3f}+\dfrac{1}{2f}$ $\dfrac{1}{C_t}=\dfrac{1+2+3}{6f}=\dfrac{6}{6f}$ $\dfrac{1}{C_t}=\dfrac{1}{1f}\rightarrow C_t=1f$	$C_t=1\ f$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Circuito de capacitores en paralelo

Todos los circuitos conectados en paralelo presentan las siguientes características:

I La capacitancia total o equivalente del circuito es:

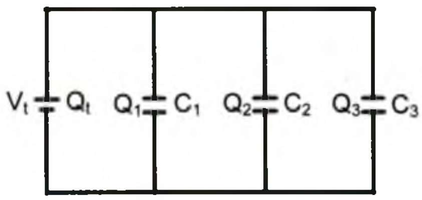
$$C_t=C_1+C_2+C_3+\ldots+C_n$$

II La carga total del circuito es la suma de las cargas de cada capacitor.

$$Q_t=Q_1+Q_2+Q_3+\ldots+Q_n$$

III La diferencia de potencial total es igual a las diferencias de potenciales de cada capacitor.

$$V_t=V_1=V_2=V_3=\ldots=V_n$$



Ejemplo 1

Tres capacitores de $3.5\times10^{-6}\text{f}$, $2.5\times10^{-6}\text{f}$ y $2\times10^{-6}\text{f}$ se conectan en paralelo a una diferencia de potencial de 25 Volts. ¿Cuál es la carga total del circuito?

a) $31.25\times10^{-4}\text{C}$ b) $2\times10^{-4}\text{C}$ c) $2\times10^{-6}\text{C}$ d) $31.25\times10^{-6}\text{C}$

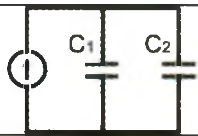
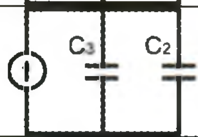
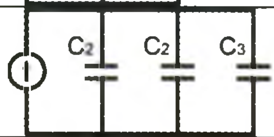
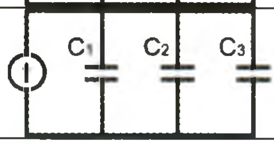
Solución:

Datos	Fórmulas	Sustitución	Resultado
$C_1 = 3.5\times10^{-6}\text{f}$	$C_t = C_1 + C_2 + C_3$	$C_t = 3.5\times10^{-6}\text{f} + 2.5\times10^{-6}\text{f} + 2\times10^{-6}\text{f}$	
$C_2 = 2.5\times10^{-6}\text{f}$	$C_t = \dfrac{Q_t}{V_t}$	$C_t = 8\times10^{-6}\text{f}$	
$C_3 = 2\times10^{-6}\text{f}$	Despeje	$Q_t = (8\times10^{-6}\text{f})(25\text{Volts})$	$Q_t = 2\times10^{-4}\text{C}$
$V_t = 25\text{Volts}$	$Q_t = C_t \cdot V_t$	$Q_t = 200\times10^{-6}\text{C} = 2\times10^{-4}\text{C}$	
$C_t = ?$; $Q_t = ?$			

La respuesta correcta corresponde al inciso “b”.

Ejemplo 2

La capacitancia equivalente de un conjunto de ***n*** capacitores en paralelo está dada por $C_{eq} = \sum_{i}^{n} C_i$, donde C_i es la capacitancia del i–ésimo capacitor. Se tienen 4 capacitores tales que $C_4 = 2C_3 = 4C_2 = 8C_1$. Relaciona la capacitancia equivalente para los siguientes capacitores en la tabla en términos de la capacitancia.

Capacitancia equivalente	Circuito
1) $6C_1$	A. 
2) $3C_1$	B. 
3) $8C_1$	C. 
4) $7C_1$	D. 

a) 1B, 2A, 3D, 4C
b) 1A, 2B, 3D, 4C
c) 1B, 2A, 3C, 4D
d) 1A, 2C, 3B, 4D

Solución:

La capacitancia equivalente de todos los circuitos está en función de C_1, entonces todas las capacitancias las vamos expresar precisamente en términos de C_1, de tal forma que $C_2 = 2C_1$, $C_3 = 4C_1$ y $C_4 = 8C_1$. Entonces:

Circuito	Capacitancia en función de C_1
A. $C_{eq} = C_1 + C_2$	$C_{eq} = C_1 + 2C_1 = 3C_1$
B. $C_{eq} = C_3 + C_2$	$C_{eq} = 4C_1 + 2C_1 = 6C_1$
C. $C_{eq} = C_2 + C_2 + C_3$	$C_{eq} = 2C_1 + 2C_1 + 4C_1 = 8C_1$
D. $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$	$C_{eq} = C_1 + 2C_1 + 4C_1 = 7C_1$

La respuesta correcta corresponde al inciso “c”.

Campo magnético
Se define como la región del espacio donde actúan las líneas de fuerza generadas por un imán.

Inducción electromagnética
En el año de 1831, el científico inglés Michael Faraday realizó experimentos con una bobina y un imán y descubrió las corrientes eléctricas inducidas.
La inducción electromagnética da como resultado la producción de una corriente inducida y de una fuerza electromotriz (*FEM*).

Relación entre el campo magnético y eléctrico
Un campo magnético variable produce un campo eléctrico y un campo eléctrico variable produce un campo magnético.
La magnitud de la fuerza, que actúa sobre una carga **"q"** que se mueve con una velocidad **"v"** producida por un campo magnético **"B"** perpendicular a la velocidad **"v"**, es de la misma magnitud que la producida por un campo eléctrico **"E"** perpendicular tanto a **"v"** y a **"B"**. Por tanto, los campos eléctricos y magnéticos se relacionan de la siguiente manera:

$$F = B \cdot q \cdot v \quad y \quad E = \frac{F}{q} \quad \rightarrow \quad E = B \cdot v$$

Donde, F = Fuerza sobre la carga eléctrica [N] v = Velocidad de la carga eléctrica $\left[\frac{m}{s}\right]$

B = Magnitud del campo magnético $\left[Teslas = \frac{Wb}{m^2}\right]$ E = Magnitud del campo eléctrico $\left[\frac{N}{C}\right]$

q = Carga eléctrica [C]

Inducción de campos

Campo magnético inducido por un conductor recto
La magnitud del campo magnético "**B**", inducido por un conductor recto por el que circula una intensidad de corriente **"I"** a una determinada distancia **"d"** del conductor, se obtiene con la fórmula:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot d}$$

Donde: I = Intensidad de corriente eléctrica [A] μ = Permeabilidad del medio $\left[\frac{Teslas \cdot m}{A}\right]$

d = Distancia [m] π = 3.1416

B = Magnitud del campo magnético [Teslas]

Si el medio que rodea al conductor es aire, entonces $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Teslas \cdot m}{A}$

Campo magnético inducido por una espira
Una espira se obtiene al doblar un conductor recto en forma circular. La intensidad del campo magnético **"B"** producido por la espira de radio **"r"** por la que circula una corriente eléctrica **"I"** es:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot r}$$

Donde, I = Intensidad de corriente eléctrica [A] μ = Permeabilidad del medio $\left[\frac{Teslas \cdot m}{A}\right]$

r = Radio de la espira [m] B = Magnitud del campo magnético [Teslas]

Campo magnético producido por una bobina
Una bobina se obtiene enrollando un alambre un cierto número de veces (vueltas), la intensidad de campo magnético **"B"** producido por una bobina de **"N"** vueltas y radio **"r"** por la que circula una intensidad de corriente **"I"** se obtiene con la fórmula:

$$B = \frac{N \cdot \mu \cdot I}{2 \cdot r}$$

Donde, N = Número de vueltas de la bobina.

Campo magnético inducido por un solenoide

Un solenoide se forma al enrollar un alambre en forma helicoidal. La intensidad de campo magnético **"B"** producido por un solenoide de **"N"** vueltas y longitud **"L"** por la que circula una intensidad de corriente **"I"** se obtiene con la fórmula:

$$B = \frac{N \cdot \mu \cdot I}{L}$$

Donde, L = Longitud del solenoide.

Ejemplo 1

Una bobina de 200 vueltas y radio de 30cm se encuentra rodeada de aire. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético inducido por la bobina si por ella circula una corriente eléctrica de 60A?

a) $8\pi \times 10^{-5}$ Teslas b) 8×10^{-3} Teslas c) $8\pi \times 10^{-3}$ Teslas d) $8\pi \times 10^{-4}$ Teslas

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
N = 200 Vueltas r = 30cm = 0.30 m I = 60A $\mu_0 = 4\pi x 10^{-7} \frac{Teslas \cdot m}{A}$ B = ?	$B = \frac{N \cdot \mu \cdot I}{2 \cdot r}$	$B = \frac{(200) \cdot \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{Teslas \cdot m}{A}\right) \cdot (60A)}{2(0.30m)}$ $B = 0.008\pi Teslas = 8\pi \times 10^{-3}$ Teslas	$B = 8\pi \times 10^{-3}$ Teslas

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Ejemplo 2

La intensidad del campo magnético inducido en el centro de una espira de 20cm de radio que se encuentra en aire y por la cual circula una intensidad de corriente de $\frac{25}{\pi}A$ es:

a) 2.5×10^{-5} Tesas b) 25×10^{-5} Teslas c) 2.5×10^{-4} Teslas d) 2.5×10^{-3} Teslas

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
r = 20cm = 0.20 m $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Teslas \cdot m}{A}$ $I = \frac{25}{\pi}A$ B = ?	$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot r}$	$B = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{Teslas \cdot m}{A}\right) \cdot \left(\frac{25}{\pi}A\right)}{2(0.20m)}$ $B = 2.5 \times 10^{-5}$ Teslas	$B = 2.5 \times 10^{-5}$ Teslas

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

La luz como onda electromagnética

James Clerk Maxwell en 1865 propuso que la luz estaba formada por ondas electromagnéticas. Esto permitía a la luz propagarse en el vacío a una velocidad de $300\,000 \frac{km}{s}$ ó $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$.

Espectro electromagnético

El espectro electromagnético está formado por los siguientes tipos de rayos:

Rayos infrarrojos

Son aquellos emitidos por cualquier cuerpo que esté a una temperatura mayor que los 0K, estos rayos también son conocidos como rayos térmicos. Un ejemplo de ellos son los emitidos por el Sol.

Luz visible

Son aquellos que pueden ser percibidos por el ojo humano, este tipo de rayos son sólo una porción de los distintos rayos que conforman el espectro electromagnético.

Rayos X

Este tipo de rayos se genera cuando un haz de electrones que viaja a gran velocidad, al alto vacío, se frena bruscamente al chocar con un obstáculo. Estos rayos son muy penetrantes por lo que son empleados para obtener radiografías.

Rayos ultravioleta

Este tipo de rayos también son conocidos como "luz negra" ya que el ojo humano no los advierte, solo algunos insectos los pueden distinguir.

Ondas de radio

Son las empleadas para transmitir señales a grandes distancias, esta ondas se crean por electrones que oscilan en una antena.

Rayos gamma

Son los producidos durante las transformaciones nucleares.

Espectro electromagnético

Tipo de radiación	Frecuencia en $\frac{\text{Ciclos}}{\text{s}}$	Longitud de onda en el vacío en $\frac{\text{m}}{\text{Ciclos}}$
Rayos Gamma	Mayor que 1×10^{18}	Menor que 1×10^{-10}
Rayos X	Mayor que 3×10^{16}	Menor que 1×10^{-8}
Rayos Ultravioleta	De $8\text{x}10^{14}$ a 3×10^{16}	De 1×10^{-8} a 3.8×10^{-7}
Rayos de luz visible	De $4\text{x}10^{14}$ a 8×10^{14}	De 3.8×10^{-7} a 7.5×10^{-7}
Rayos infrarrojos	De $3\text{x}10^{11}$ a 4×10^{14}	De 7.5×10^{-7} a 1×10^{-3}
Ondas de radio y microondas	Menor de 1×10^{13}	Varía de milímetros hasta miles de metros

Ley de Ampere

La corriente que circula por un conductor induce un campo magnético.

Ley de Faraday

En un circuito la fuerza electromotriz inducida por un conductor o una bobina es directamente proporcional a la rapidez con que cambia el flujo magnético.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Donde: ε = FEM inducida [Volts]
$\Delta\varphi$ = Flujo magnético [Webers]
Δt = Variación de tiempo [s]

Ejercicios

1. De acuerdo con la ley de Coulomb la magnitud de la fuerza electrostática entre 2 cargas eléctricas, es:
   a) directamente proporcional al producto de las cargas eléctricas e inversamente proporcional a la distancia que las separa.
   b) directamente proporcional a la distancia que separa las cargas e inversamente proporcional al producto de las mismas.
   c) directamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas e inversamente proporcional al producto de las mismas.
   d) directamente proporcional al producto de las cargas eléctricas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

2. ¿Cuál es la carga eléctrica de un neutrón?
   a) Negativa b) Positiva c) Cero d) Insignificante

3. Una carga eléctrica de 8μC, se encuentra a 2mm de otra de –4μC. Determina la magnitud de la fuerza de atracción entre dichas cargas.
   a) 72 000N b) 7 200N c) 1 400N d) 144N

4. Una carga de 6×10^{-6}C se encuentra a 4 metros de una carga de 8×10^{-6}C. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de repulsión entre las cargas?
   a) 27 N b) 2.7 N c) 0.27 N d) 0.027 N

5. Una carga de 5×10^{-6}C se encuentra a 0.5 cm de una carga de -6×10^{-6}C. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de atracción entre las cargas?
   a) 5400N b) 540N c) 54N d) 5.4N

6. Una carga de 6×10^{-6}C se introduce a una región donde actúa un campo de fuerza de 0.18 N. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en esa región?
   a) $300\,000\frac{N}{C}$ b) $30\,000\frac{N}{C}$ c) $3\,000\frac{N}{C}$ d) $300\frac{N}{C}$

7. Si el campo eléctrico en una cierta región es de $5 \times 10^{20}\frac{N}{C}$, ¿calcular la intensidad de la fuerza que actúa sobre un electrón inmerso en este campo?
   a) 800N b) 80N c) 8N d) 0.8N

8. La magnitud del campo eléctrico producido por una carga de 5×10^{-6}C a una distancia de 1.5 m de su centro es:
   a) $20\frac{N}{C}$ b) $200\frac{N}{C}$ c) $2\,000\frac{N}{C}$ d) $20\,000\frac{N}{C}$

9. Determina la magnitud del campo eléctrico que produce una carga eléctrica de 12μC a una distancia de 3mm.
   a) $4.8 \times 10^{9}\frac{N}{C}$ b) $2.4 \times 10^{8}\frac{N}{C}$ c) $3.6 \times 10^{7}\frac{N}{C}$ d) $1.2 \times 10^{10}\frac{N}{C}$

10. La capacitancia de un condensador es 85μf, si éste se encuentra conectado a una diferencia de potencial de 4000 volts. ¿Cuál es la carga eléctrica en el capacitor?

a) 340×10^{-3} f b) 34.0×10^{-3} f c) 3.4×10^{-3} f d) 0.34×10^{-3} f

11. La unidad de la capacitancia en el Sistema Internacional son los:

a) Weber b) Joule c) Farad d) Ampere

12. La capacitancia de un condensador es 25×10^{-6}farads, si éste se encuentra conectado a una diferencia de potencial de 120Volts, ¿cuál es valor de la carga eléctrica?

a) 8.4pC b) 4.8η c) 2.5μ d) 3mC

13. En un capacitor plano de $0.12m^2$ hay una diferencia de potencial de 220Volts, si la distancia entre las placas es de 1.0cm. ¿Cuáles es la carga eléctrica?

a) 0.233ηC b) 2.33μC c) 233pC d) 23.3ηC

14. ¿Cuáles es la energía acumulada en el capacitor, del problema anterior?

a) 2.53×10^{-6} J b) 2.53×10^{-5} J c) 2.53×10^{-8} J d) 2.53×10^{-12} J

15. ¿Cuál es la capacitancia de un condensador de placas paralelas cuya superficie es de $40cm^2$, si las placas se encuentran separadas 2mm?

a) 17.7×10^{-6}farad b) 17.7×10^{-9}farad c) 17.7×10^{-3}farad d) 17.7×10^{-12}farad

16. Determina la energía almacenada por un condensador de placas paralelas cuya capacitancia es 5.87×10^{-10}farads, si se aplica una diferencia de potencial de 220Volts.

a) 8.63×10^{-6}Joules b) 7.36×10^{-6}Joules c) 3.68×10^{-6}Joules d) 1.42×10^{-6}Joules

17. ¿Cuál es la intensidad de corriente que circula por un conductor de 25Ω de resistencia cuando se aplica en sus extremos una diferencia de potencial de 100 Volts?

a) 0.25A b) 2.5A c) 4A d) 40A

18. Una intensidad de corriente de 3A circula por un conductor de 35Ω. ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicado en los extremos del conductor?

a) 1 050 Volts b) 105 Volts c) 10.5 Volts d) 1.05 Volts

19. ¿Cuál es la resistencia de un conductor por el que circula una intensidad de corriente de 6A, cuando se conecta a una diferencia de potencial de 90 Volts?

a) 540Ω b) 96Ω c) 15Ω d) 0.066Ω

20. La unidad de la diferencia de potencial eléctrico en Sistema Internacional es:

a) Watt b) Amper c) Volts d) Ohm

21. ¿Cuál es la intensidad de corriente eléctrica que circula por un conductor de 40Ω, al cual se le aplica una diferencia de potencial de 240 Volts?

a) 6A b) 180A c) 300A d) 960A

22. ¿Cuál es la resistencia de un aparato que se encuentra conectado a un circuito por el cual circulan 2.5A, si se aplica una diferencia de potencial de 110 Volts?

a) 275Ω b) 44Ω c) 4.4Ω d) 0.022Ω

23. Por un conductor de 20 Ohm circula una corriente de 4.5A, ¿cuál es la diferencia de potencial aplicado en los extremos del conductor?

a) 9 Volts b) 24.5 Volts c) 90 Volts d) 225 Volts

24. ¿Qué potencia desarrolla un motor eléctrico si se conecta a una diferencia de potencial de 120 Volts para que genere una intensidad de corriente de 18A?

a) 2 160Watts b) 216Watts c) 138Watts d) 6.66Watts

25. ¿Cuál es la potencia desarrollada por un conductor de 25Ω de resistencia, por el que circula una corriente de 20A?

a) 10 000Kw b) 1 000Kw c) 100Kw d) 10Kw

26. ¿Cuál es la potencia que desarrolla un motor eléctrico si se conecta a una diferencia de potencial de 220Volts para que genere una intensidad de corriente de 15Ampers?

a) 3.3Kwatts b) 4.5Kwatts c) 14.66Kwatts d) 49.5Kwatts

27. Una lámpara de 20watts opera con una diferencia de potencial doméstica de 110Volts. Determina la corriente que circula por la lámpara.

a) 11A b) 5.5A c) 2.2A d) 0.18A

28. Las resistencias de 5Ω, 2Ω y 10Ω se conectan en serie. ¿Cuál es la resistencia total del circuito?

a) 17Ω b) 3Ω c) 1.25Ω d) 0.8Ω

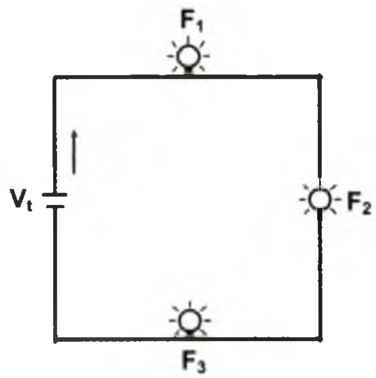
29. Dos resistencias de 8Ω y 4Ω se encuentran conectadas en serie a una diferencia de potencial de 96 Volts. ¿Cuál es la intensidad de corriente que circula por las resistencias?

a) 0.125A b) 8A c) 24A d) 256A

30. Tres resistencias de 3, 4 y 12 Ohm respectivamente se conectan en un circuito en paralelo y se hace circular por el circuito una corriente de 6A la cual se distribuye entre las 3. Determina la diferencia de potencial aplicada al circuito.

a) 4 Volts b) 9 Volts c) 66 Volts d) 114 Volts

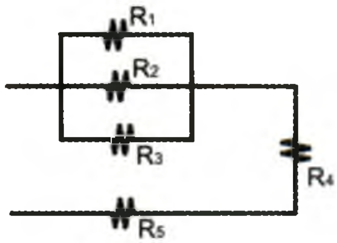
31. En el siguiente circuito:



Si el filamento del foco 3 se funde, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

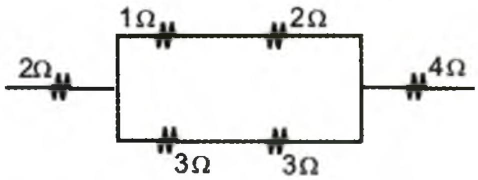
a) Todos los focos se apagan
b) Se apagan F_1 y F_2 únicamente
c) Permanecen encendidos F_1 y F_2 únicamente
d) Permanecen encendidos F_1, F_2 y F_3

32. En la siguiente figura, ¿qué posición guarda la resistencia equivalente de las resistencias R_1, R_2 y R_3, con respecto a R_4?



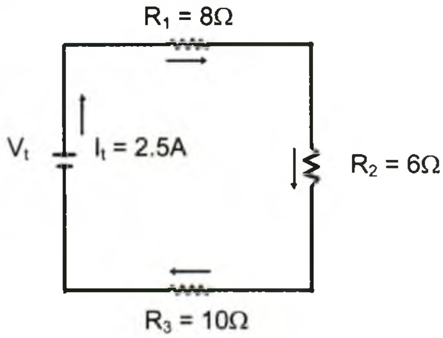
a) Paralelo b) Serie c) Paralelo–serie d) Serie–paralelo

33. En el siguiente arreglo, ¿cuál es la resistencia equivalente del circuito?



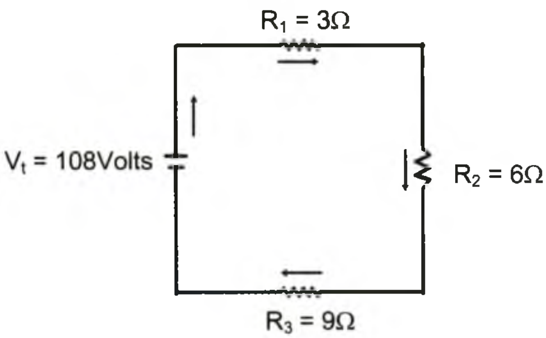
a) 6.5Ω b) 8Ω c) 15Ω d) 16Ω

34. ¿Cuál es el voltaje total aplicado al circuito?



a) 120 Volts b) 60 Volts c) 11.1 Volts d) 0.97 Volts

35. En el siguiente circuito, ¿cuál es la corriente en cada resistencia?



a) 0.16A b) 6A c) 66A d) 1 944A

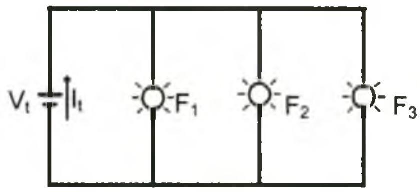
36. Una resistencia de 4Ω se conecta en paralelo con otra de 12Ω. ¿Cuál es la resistencia total o equivalente del circuito?

a) 9Ω b) 3Ω c) 2Ω d) 1Ω

37. Tres resistencias de 8Ω, 4Ω y 4Ω respectivamente se conectan en paralelo, y una corriente total de 20A se distribuye entre las tres. ¿Cuál es la diferencia de potencial aplicada al circuito?

a) 1.25 Volts
b) 12.5 Volts
c) 32 Volts
d) 320 Volts

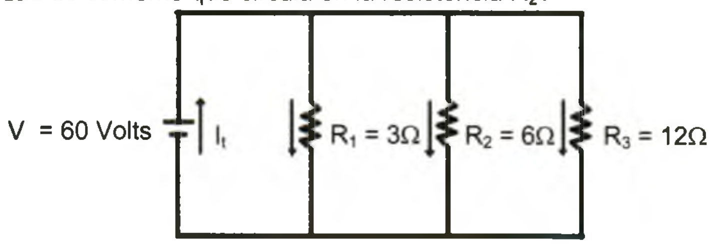
38. El siguiente circuito ilustra a 3 focos iguales conectados a una batería:



Si se funde el filamento del foco 3, ¿qué sucede con los focos restantes?

a) Los focos uno y dos dejan de encender
b) Sólo enciende el foco 1
c) Permanecen encendidos los focos 1 y 2
d) Se apagan todos

39. ¿Cuál es la intensidad de corriente que circula en la resistencia R_2?

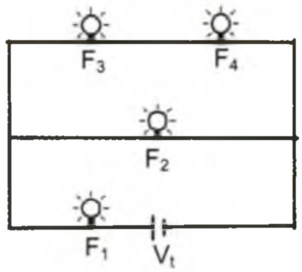


a) 20A
b) 10A
c) 5A
d) 2.9A

40. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) En un circuito de resistencias en paralelo, la corriente en cada resistencia es la misma.
b) El voltaje total de un circuito de resistencias en serie es el mismo en cada resistencia.
c) La resistencia total de un circuito en serie es igual a la suma de todas las resistencias.
d) La corriente total en un circuito en serie es igual a la suma de todas las corrientes.

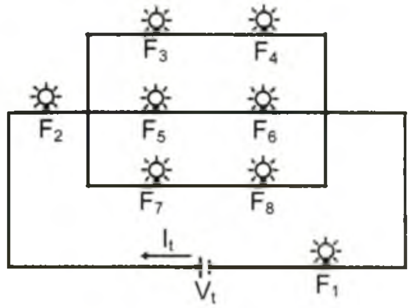
41. El siguiente circuito ilustra a 4 focos iguales conectados a una batería:



Si el filamento del foco 3 se funde, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Sólo encienden los focos 1, 2 y 4
b) Sólo encienden los focos 1 y 2
c) Sólo enciende el foco 4
d) Sólo enciende el foco 1

42. El siguiente dibujo ilustra focos iguales conectados a una batería, si los filamentos de los focos 7 y 8 se funden simultáneamente, ¿qué afirmaciones son verdaderas?



I Quedan encendidos los demás focos excepto los focos 7 y 8.
II Sólo queda encendido el foco 2.
III Sólo encienden los focos 1 y 2, los demás se apagan.
IV Los focos 3 y 4 se encuentran en paralelo con los focos 5 y 6.

a) I y II b) II y III c) III y IV d) I y IV

43. Los condensadores de 12f, 6f y 1f se conectan en serie. ¿Cuál es la capacitancia total del circuito?

a) 19f b) 1.25f c) 0.8f d) 0.05f

44. Se conectan los capacitores de 8 f, 6 f y 10 f en paralelo. ¿Cuál es la capacitancia total del circuito?

a) 0.041f b) 0.4f c) 2.5f d) 24f

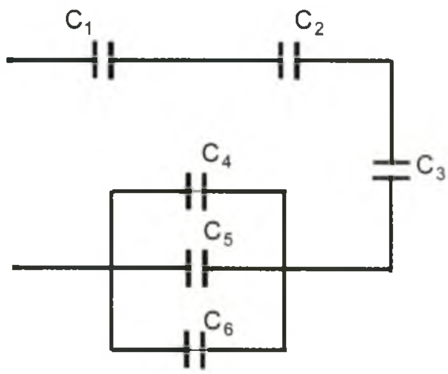
45. Tres capacitores de 3×10^{-6}f, 4×10^{-6}f y 1×10^{-6}f se conectan en paralelo a una diferencia de potencial de 0.2Volts. ¿Cuál es la carga total del circuito?

a) 1.6×10^{-3}C b) 1.6×10^{-6}C c) 1.6×10^{-5}C d) 1.6×10^{-4}C

46. En un circuito se encuentran conectados en paralelo 4 condensadores idénticos. Si la capacitancia del circuito es 32μF, ¿cuál es el valor de la capacitancia de cada condensador?

a) 128μF b) 16μF c) 8μF d) 0.125μF

47. En el arreglo que se ilustra, ¿qué posición relativa tienen los capacitores C_4, C_5 y C_6?



a) Paralelo b) Serie–paralelo c) Paralelo–serie d) Serie

48. ¿Cuál es la reactancia capacitiva de un condensador de 15μf, el cual está conectado a una corriente alterna de 45Hertz de frecuencia?

a) 105.28Ohm b) 156.92Ohm c) 235.78Ohm d) 1 481.48Ohm

49. ¿Cuál es la reactancia capacitiva de un condensador de 35μF el cual está conectado a una corriente alterna de 50Hertz frecuencia?

a) 57.14Ω b) 90.94Ω c) 571.4Ω d) 751.4Ω

50. Determina la reactancia capacitiva de un capacitor el cual está conectado a una corriente alterna máxima de 3.2A y cuya diferencia de potencial es de 80 Volts.

a) 0.04Ω b) 12.2Ω c) 25Ω d) 256Ω

51. El enunciado, "Es la región del espacio donde actúan las líneas de fuerza generadas por un imán", corresponde a la definición de:

a) campo eléctrico b) capacitancia c) diferencia de potencial d) campo magnético

52. Una bobina de 300 vueltas y radio de 20cm se encuentra rodeada de aire ¿Cuál es la intensidad del campo magnético inducido por la bobina si por ella circula una corriente eléctrica de 40A?

a) $12\pi \times 10^{-4}$Teslas b) $12\pi \times 10^{-5}$Teslas c) $1.2\pi \times 10^{-3}$Teslas d) $12\pi \times 10^{-3}$Teslas

53. La intensidad del campo magnético inducido en el centro de una espira de 10cm de radio que se encuentra en el aire y por la cual circula una intensidad de corriente de $\frac{8}{\pi}$ A es:

a) 16×10^{-5}Teslas b) 1.6×10^{-5}Teslas c) 1.6×10^{-4}Teslas d) 1.6×10^{-6}Teslas

54. El enunciado, "En un circuito la fuerza electromotriz inducida por un conductor o una bobina es directamente proporcional a la rapidez con que cambia el flujo magnético", corresponde a la ley de:

a) Amper b) Biot c) Maxwell d) Faraday

55. Una espira de 10cm de radio es hecha girar por un campo magnético uniforme de magnitud 4.2 Teslas. Determina el flujo magnético que atraviesa la espira cuando su plano es perpendicular al campo.

a) 42 Weber b) 1.23 Weber c) 0.132 Weber d) 0.032 Weber

56. Un solenoide cuya superficie es de 15cm^2 en su sección transversal, se enrolla con 800 vueltas de alambre que conduce una corriente de 2.0A. La permeabilidad relativa de su núcleo de hierro es de 600. ¿Cuál es el valor del flujo a través del solenoide?

a) 0.0415 Weber b) 0.060 Weber c) 0.152 Weber d) 0.120 Weber

57. ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa de forma perpendicular el plano de una espira de 25cm de radio, la cual es hecha girar por un campo magnético de magnitud 8 Teslas?

a) 0.5πWeber b) 0.75πWeber c) 1.5πWeber d) 2.25πWeber

9 Óptica

Propósito: el alumno resolverá problemas relacionados con las leyes de reflexión y la refracción.

Reflexión y refracción de la luz

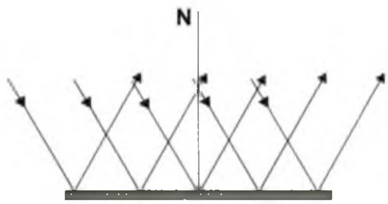
La Óptica es parte de la Física que estudia la luz y aquéllos fenómenos que impresionan el sentido de la vista.

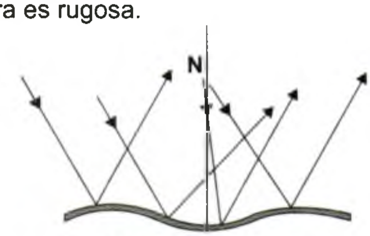
a) Reflexión de la luz

En este fenómeno un rayo luminoso experimenta un cambio de dirección y sentido al chocar contra la superficie de separación entre dos medios.

Una reflexión regular ocurre cuando la superficie reflectora es lisa.

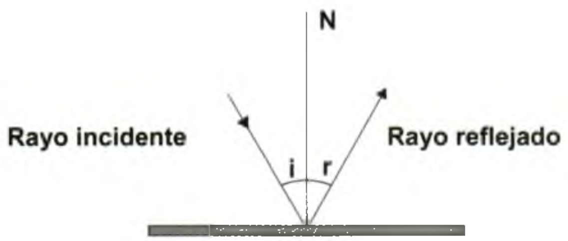
Una reflexión irregular ocurre cuando la superficie reflectora es rugosa.





Leyes de la reflexión

I El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado se encuentran en un mismo plano.
II El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión **i = r**.

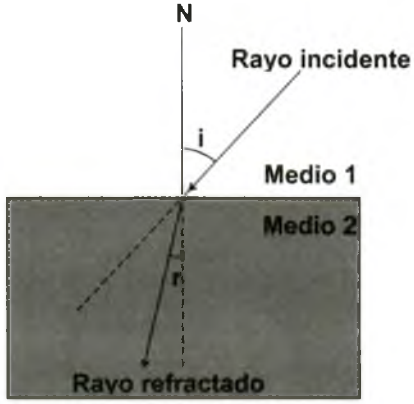


Donde:

i = Ángulo de incidencia
r = Ángulo de reflexión

b) Refracción de la luz

Un rayo luminoso experimenta un cambio de dirección cuando atraviesa oblicuamente la superficie entre dos medios de naturaleza diferente.



Leyes de la refracción

I El rayo incidente, la normal y el rayo refractado se encuentran en un mismo plano.
II (**Ley de Snell**) Para dos medios dados, la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante, esta razón es llamada "índice de refracción" entre los medios.

$$\eta = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}$$

c) Índice de refracción

El índice de refracción entre dos medios es la relación que existe entre la velocidad con la que viaja la luz en el vacío y la velocidad con que viaja en un medio.

$$\eta = \frac{c}{v}$$

Donde: η = Índice de refracción c = Velocidad de la luz en el vacío $\left[\frac{km}{s}, \frac{m}{s}\right]$

i = Ángulo de incidencia v = Velocidad de la luz en el medio $\left[\frac{km}{s}, \frac{m}{s}\right]$

r = Ángulo de refracción

Velocidad de la luz en el vacío = $300\,000 \frac{km}{s}$ ó $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$.

Índice de refracción de algunos medios.

Sustancia	Índice de refracción
Vidrio	1.5
Aire	1.003
Alcohol	1.36
Agua	1.33

Ejemplo 1

¿Cuál es el índice de refracción de un material si en él, la velocidad de la luz es de $240\,000 \frac{km}{s}$?

a) 0.8 b) 2.33 c) 1.66 d) 1.25

Solución:

Datos

$c = 300\,000 \frac{km}{s}$

$v = 240\,000 \frac{km}{s}$

$\eta = ?$

Fórmula

$$\eta = \frac{c}{v}$$

Sustitución

$$\eta = \frac{300000 \frac{km}{s}}{240000 \frac{km}{s}} = 1.25$$

Resultado

$\eta = 1.25$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplo 2

¿Cuál es la velocidad con que la luz se mueve en un medio si el índice de refracción de éste es de 1.2?

a) $360\,000 \frac{km}{s}$ b) $200\,000 \frac{km}{s}$ c) $300\,000 \frac{km}{s}$ d) $250\,000 \frac{km}{s}$

Solución:

Datos

$c = 300\,000 \frac{km}{s}$

$n = 1.2$

$v = ?$

Fórmula

$$\eta = \frac{c}{v}$$

Despeje

$$v = \frac{c}{\eta}$$

Sustitución

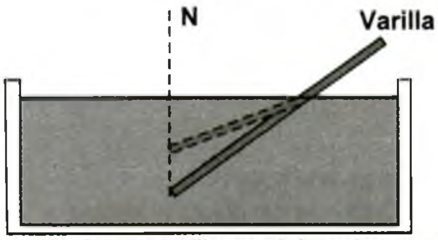
$$v = \frac{300\,000 \frac{km}{s}}{1.2} = 250\,000 \frac{km}{s}$$

Resultado

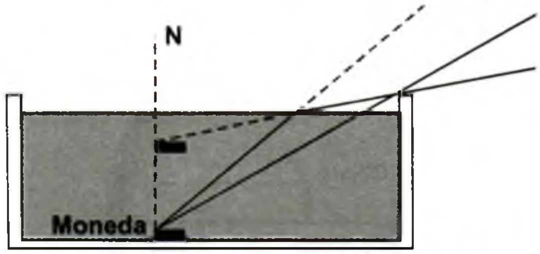
$v = 250\,000 \frac{km}{s}$

La respuesta correcta corresponde al inciso "d".

Ejemplos de ilusión óptica debido a la refracción



Al introducir una varilla parcialmente en agua, la parte sumergida parece estar flexionada hacia arriba.



Al dejar caer una moneda en el fondo de un recipiente con agua, la moneda aparenta estar a una profundidad menor.

Espejos planos y esféricos

Un **espejo** es una superficie lisa y pulida que refleja la luz.

Una **imagen** es la forma de un cuerpo producida por el cambio de dirección de los rayos luminosos.

a) Espejos planos

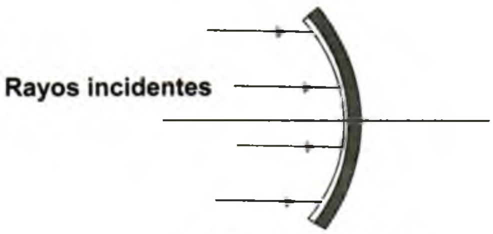
Son aquéllos cuya superficie reflejante es lisa.

b) Espejos esféricos

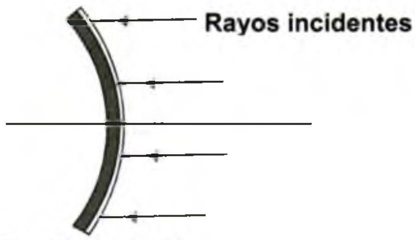
Son casquetes esféricos pulidos por una de sus caras.

Clasificación de los espejos esféricos

I Si la cara pulida es la interna el espejo es cóncavo.
II Si la cara pulida es la externa el espejo es convexo.

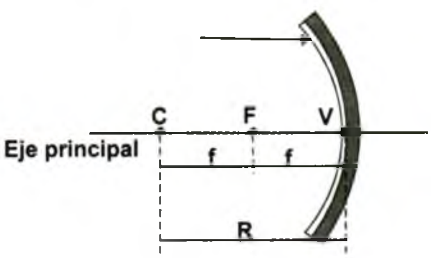


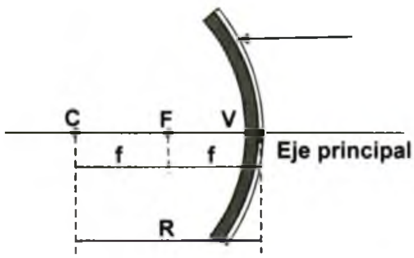
Espejo cóncavo



Espejo convexo

Elementos de los espejos esféricos

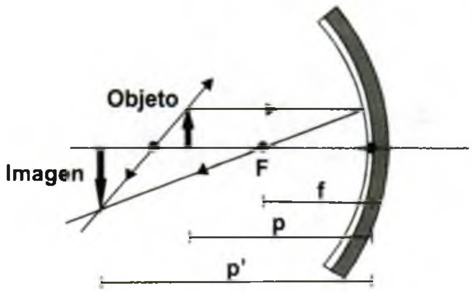




Donde: C = Centro de curvatura
V = Vértice
R = Radio de curvatura
F = Foco
f = Distancia focal

▶ **Ecuación de los espejos esféricos**

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$



Donde: f = Distancia focal [m, cm]
p = Distancia del objeto al espejo [m, cm]
p' = Distancia de la imagen al espejo [m, cm]

▶ **Signos de " p' ", " f " y " p "**

Si los espejos son cóncavos o convexos.
a) La distancia **"p"**, es siempre positiva.
b) La distancia **"p' "**, es negativa si la imagen es virtual y positiva si la imagen es real.
c) La distancia **"f"**, es positiva si el espejo esférico es cóncavo y es negativa si es convexo.

Ejemplo:
A 20cm de un espejo convexo de distancia focal igual a 12cm se coloca un objeto. ¿Cuál es la distancia a la que se forma la imagen?

a) –20cm b) 14.72cm c) –7.5cm d) 5.4cm

Solución:
La distancia focal del espejo es negativa por que el espejo es convexo.

Datos
$f = -12cm$
$p = 20cm$
$p' = ?$

Fórmula
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$
Despeje
$$p'=\frac{p\cdot f}{p-f}$$

Sustitución
$$p'=\frac{(20cm)(-12cm)}{(20cm)-(-12cm)}$$
$p' = -7.5cm$

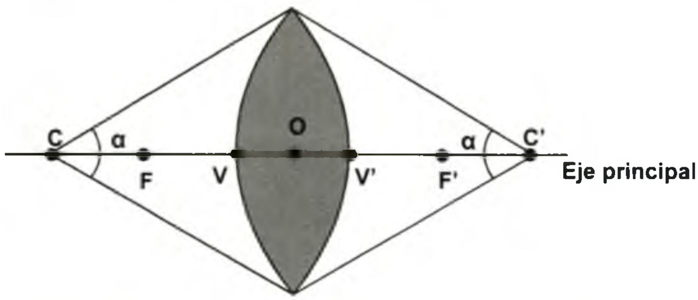
Resultado
$p' = -7.5cm$
El signo negativo indica que la imagen es virtual.

La respuesta correcta corresponde al inciso "c".

Lentes convergentes y lentes divergentes

Una **lente** es un cuerpo limitado por dos caras esféricas, o por una cara plana y otra esférica.

Elementos de una lente



Centros de curvatura (C, C'). Son aquellos centros de las esferas que limitan las caras de la lente.
Centro óptico (O). Centro de la lente.
Vértices (V, V'). Son aquellos puntos de intersección entre la lente y el eje principal.
Eje principal. Es aquella recta que pasa por los centros de curvatura.
Ángulo de abertura (α). Es el ángulo bajo el cual se ve la cara de la lente, desde el centro.
Foco (F). Es el punto que se encuentra entre el centro óptico y el centro de curvatura.

a) Lentes convergentes

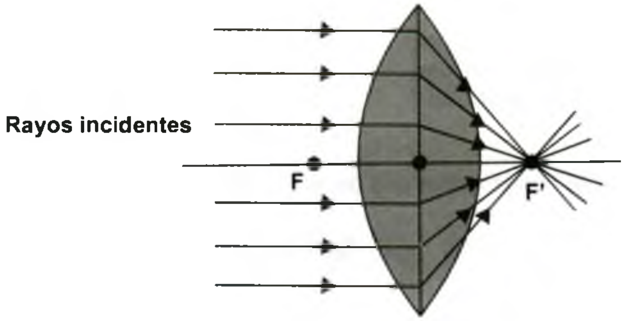
Son aquéllas que son más gruesas en el centro, que en los bordes.

Ejemplos:



Biconvexa **Plano convexa** **Menisco convergente**

Los rayos que llegan paralelos al eje de una lente convergente, se refractan y concurren en el foco.



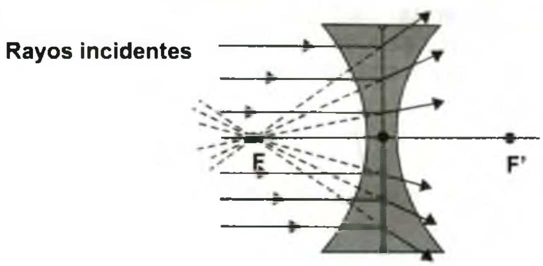
b) Lentes divergentes

Son aquéllas que son más gruesas en los bordes que en el centro.



Bicóncava **Plano cóncava** **Menisco divergente**

Los rayos que llegan a una lente divergente, se refractan, sus prolongaciones concurren en un foco.



Ecuación de las lentes

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$

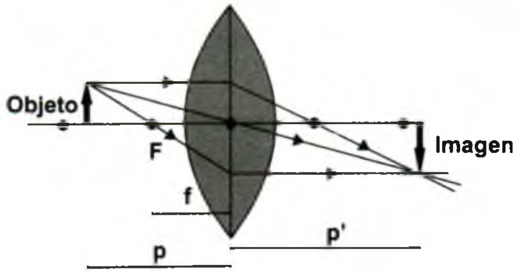
Cuando el foco está entre el objeto y la lente.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}$$

Cuando el objeto se encuentra entre la lente y el foco.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}$$

Cuando las lentes son divergentes.



Donde: f = Distancia focal [m, cm]
p = Distancia del objeto a la lente [m, cm]
p' = Distancia de la imagen a la lente [m, cm]

Ejemplo:
Un objeto se coloca a 40cm de una lente convergente que tiene una distancia focal de 25 cm. ¿A qué distancia de la lente se forma la imagen?

a) 66.6cm b) 50cm c) 30.5cm d) 25.41cm

Solución:

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
f = 25cm p = 40cm p' =?	$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$ Despeje $p'=\frac{p\cdot f}{p-f}$	$p'=\frac{(40cm)(25cm)}{(40cm)-(25cm)}$ p' = 66.6cm.	p' = 66.6cm

La respuesta correcta corresponde al inciso "a".

La luz. (Punto de vista contemporáneo)

a) Modelo corpuscular o de Newton

Según Newton, la luz está constituida por numerosos corpúsculos que se propagan en línea recta a gran velocidad y que al chocar con la retina, producen una sensación luminosa.
El modelo trata de explicar que al considerar un haz de luz formado por partículas, éstas se reflejan elásticamente en una superficie lisa y cuando el haz luminoso penetra el agua, se refracta, debido a que las partículas que forman el haz al aproximarse al agua son atraídas por una fuerza que provoca un cambio en la dirección del movimiento de estos corpúsculos.

b) Modelo ondulatorio de Cristian Huygens

Huygens afirmaba que la luz es un fenómeno ondulatorio semejante al sonido, y que tiene las mismas características de una onda mecánica. Huygens trató de explicar que una onda cualquiera se refleja y refracta cumpliendo con las leyes de la reflexión y refracción de un haz luminoso.
El principio de Huygens afirma que, "cada punto de un frente de ondas se puede considerar como una nueva fuente de ondas".

Ejercicios

1. Al observarnos frente a un espejo, que fenómeno óptico experimentamos.
   a) Refracción b) Reflexión c) Rotación d) Polarización

2. ¿Cuál es el índice de refracción de un medio si en él la velocidad de la luz es de 180 000$\frac{km}{s}$?
   a) 1.66 b) 1.066 c) 1.06 d) 0.66

3. ¿Cuál es la velocidad de la luz en el agua? (considera η = 1.3)
   a) 390 000$\frac{km}{s}$ b) 249 000$\frac{km}{s}$ c) 230 769$\frac{km}{s}$ d) 175 532$\frac{km}{s}$

4. Las velocidades de propagación de la luz en el agua y en vidrio son diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) El haz luminoso sigue la dirección de la normal al pasar del agua al vidrio.
   b) El haz luminoso se refracta al pasar del agua al vidrio.
   c) El haz luminoso desaparece.
   d) El haz luminoso sigue la misma dirección al pasar del agua al vidrio.

5. Son aquellos espejos esféricos cuya cara pulida es la externa.
   a) Cóncavos b) Planos c) Convexos d) Convergentes

6. Son aquellos cuerpos limitados por dos caras esféricas, o por una cara plana y la otra esférica.
   a) Espejos cóncavos b) Espejos convexos c) Binoculares d) Lentes

7. A 80 cm de un espejo convexo de distancia focal igual a 24cm se encuentra un objeto. ¿Cuál es la distancia a la que se forma la imagen?
   a) 34.28cm b) –18.46cm c) –22.70cm d) –30.12cm

8. Un objeto se coloca a 60cm de un espejo cóncavo de distancia focal igual a 20cm ¿Cuál es la distancia a la que se forma la imagen?
   a) 30cm b) – 30cm c) 15cm d) –15cm

9. Un objeto se coloca a 40cm de una lente convergente cuya distancia focal es de 8cm. ¿A qué distancia se forma la imagen?
   a) 48cm b) 32cm c) 10cm d) 5cm

10. ¿Cuál es la distancia a la que se forma la imagen de una lente divergente de distancia focal a 20cm, si un objeto se coloca a 60cm de su centro?
    a) 3cm b) 15cm c) 40cm d) 80cm

Respuestas de los ejercicios de Física

Unidad 1

1. b	2. a	3. c	4. d	5. c	6. a	7. c	8. d	9. a	10. b
11. c	12. a	13. b	14. d						

Unidad 2

1.a	2. c	3. d	4. b	5. b	6. c	7. b	8. d	9. b	10. c
11. a	12. c	13. c	14. a	15. d	16. c	17. b	18. a	19. d	20. b
21. a	22. c								

Unidad 3

1. a	2. c	3. c	4. d	5. d	6. c	7. a	8. a	9. b	10. a
11. b	12. a	13. d	14. d	15. b	16. a	17. d	18. d	19. a	20. c
21. d	22. b	23. d	24. a	25. b	26. c	27. c	28. b	29. d	30. a
31. b									

Unidad 4

1. a	2. b	3. b	4. d	5. d	6. d	7. c	8. a	9. b	10. c
11. b	12. d	13. a	14. c	15. c	16. d	17. b	18. c	19. d	20. a
21. c	22. b	23. a	24. b	25. c	26. d	27. d	28. a	29. d	30. d
31. b	32. c	33. d	34. b	35. a	36. c	37. a	38. c	39. d	40. a
41. b	42. c	43. a	44. c	45. a					

Unidad 5

1. b	2. d	3. a	4. c	5. c	6. b	7. d	8. b	9. c	10. a
11. c	12. b	13. b	14. b	15. c	16. d				

Unidad 6

1. a	2. b	3. c	4. d	5. d	6. a	7. d	8. b	9. c	10. a
11. b	12. b	13. d	14. b	15. d	16. b	17. c	18. b	19. d	20. c
21. c	22. a	23. d	24. a	25. d					

Unidad 7

1. a	2. d	3. b	4. b	5. a	6. d	7. b	8. c	9. d	10. b
11. c	12. a	13. c	14. b	15. c	16. c	17. d	18. b	19. d	20. c
21. d	22. d	23. d	24. a	25. b	26. d	27. a	28. d	29. d	30. c
31. c	32. a								

Unidad 8

1. d	2. c	3. a	4. d	5. a	6. b	7. b	8. d	9. d	10. a
11. c	12. d	13. d	14. a	15. d	16. d	17. c	18. b	19. c	20. c
21. a	22. b	23. c	24. a	25. d	26. a	27. d	28. a	29. b	30. b
31. a	32. b	33. a	34. b	35. b	36. b	37. c	38. c	39. b	40. c
41. b	42. d	43. c	44. d	45. b	46. c	47. a	48. c	49. b	50. c
51. d	52. d	53. b	54. d	55. c	56. a	57. a			

Unidad 9

1. b	2. a	3. c	4. b	5. c	6. d	7. b	8. a	9. c	10. b

Unidad 1 Estructura atómica
1. El átomo
2. Modelo cuántico
3. Configuración electrónica

Unidad 2 Tabla periódica
1. Historia
2. Familia
3. Periodo
4. Propiedades periódicas
5. Actividad química

Unidad 3 Nomenclatura de compuestos inorgánicos
1. Determinación del número de oxidación
2. Modelos de reacciones para la formación de compuestos inorgánicos
3. Nomenclatura de compuestos inorgánicos

Unidad 4 Reacciones y ecuaciones químicas, balanceo
1. Reacciones químicas
2. Balanceo por tanteo
3. Balanceo por óxido reducción

Unidad 5 Enlace químico
1. Estructuras de Lewis
2. Enlaces
3. Enlace iónico
4. Enlace covalente
5. Enlace por puente de hidrógeno
6. Enlace metálico
7. Enlace por fuerzas de Van der Waals
8. Tipos de enlaces de acuerdo con la diferencia de electronegatividades

Unidad 6 Química del carbono
1. Compuestos orgánicos
2. Hibridación
3. Clasificación de cadenas en compuestos orgánicos
4. Alcanos o parafinas
5. Alquenos u oleofinas
6. Alquinos o acetilenos
7. Cicloalcanos
8. Funciones orgánicas

Unidad 7 Termodinámica
1. Introducción
2. Entalpía
3. Energía libre y espontaneidad

Unidad 8 Electroquímica
1. Electroquímica
2. Celda electroquímica
3. Celdas voltaicas o galvánicas



Química

Estructura atómica 1

Propósito: el alumno conocerá la estructura del átomo a partir de los diferentes modelos que lo han representado.

El átomo

El **átomo** es la partícula más pequeña que conserva las propiedades del elemento al cual corresponde y tiene como característica principal ser eléctricamente neutro.

Por **elemento** entendemos una sustancia pura que contiene el mismo tipo de átomos y que no puede químicamente ser dividido en otras sustancias más sencillas.

a) Partículas subatómicas elementales

Electrón (e^-)

Descubierto por J.J. Thomson en 1897. La carga eléctrica se considera como la unidad de carga negativa, su masa de reposo es de 9.11×10^{-28} g, gira alrededor del núcleo a una velocidad aproximada de 2.182×10^{8} cm/s.

Protón (p^+)

Fue descubierto por Rutherford en 1920. Su carga eléctrica positiva es igual a la del electrón, esto significa que es la unidad de carga positiva, su masa es 1836 veces mayor a la del electrón e igual a 1.67×10^{-24} g.

Por tanto, para que un átomo permanezca eléctricamente neutro, es necesario que contenga el mismo número de protones (+) que de electrones (-).

Neutrón ($n\pm$)

Chadwick pudo demostrar su existencia en 1932. Su carga eléctrica es neutra (sin carga) y su masa es igual a la de los protones.

Modelo cuántico

Para Bohr, el electrón al moverse alrededor del núcleo está sujeto a fuerza de atracción coulombianas de acuerdo a la mecánica clásica. Al estar estudiando al átomo de hidrógeno encontró trayectorias definidas para el electrón, a las cuales llamó niveles energéticos. Propuso un modelo atómico que permitía explicar la aparición de las líneas de emisión espectrales al átomo de hidrógeno.

Bohr explica que cada nivel de energía está cuantizado energéticamente, fundamentándose en la Teoría del *Cuanto* propuesta por Planck y calculó la cantidad de energía requerida para que el electrón efectuara un salto cuántico, de un nivel energético a otro. Al experimentar el electrón estos saltos, observó su trayectoria por los niveles, encontrando siete diferentes niveles, antes de que se formara un ion de hidrógeno.

Mientras que los electrones describen una trayectoria no hay absorción ni emisión de energía, a estos estados donde no se pierde ni se gana energía se les denomina estados **basales o fundamentales** del átomo.

Normalmente los electrones se encuentran en el nivel de mínima energía, pero pueden absorber energía efectuando un salto cuántico, pasando a un nivel superior más alejado del núcleo y este estado es conocido como **excitado**, el cual es inestable y los electrones regresan a su nivel emitiendo un paquete de energía electromagnética.

Todo lo que explica Bohr funciona solo para el átomo de hidrógeno, pues no podía explicar los espectros de elementos polielectrónicos. En general en un nivel del modelo de Bohr caben $\mathbf{2n^2}$ electrones, donde n es el número del nivel de energía, cumpliéndose esto sólo hasta el cuarto nivel, puesto que el 5° nivel es igual al 4°, el 6° igual que el 3° y el 7° igual al 2°.

La imagen del modelo actual del átomo se debe a los científicos Dirac y Jordan, los cuales perfeccionaron los modelos anteriores.

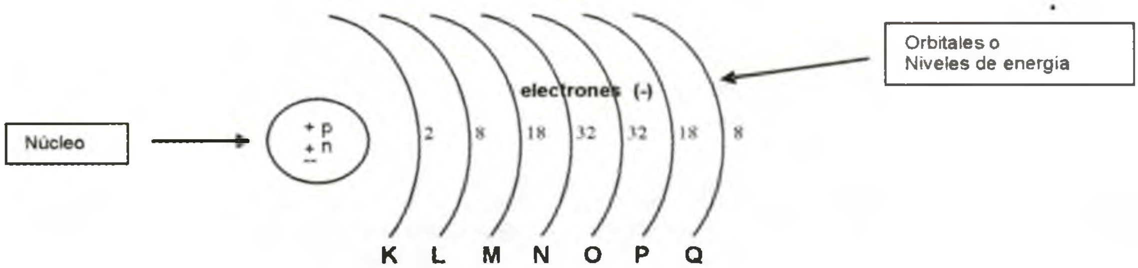
En la actualidad se determina la posición más probable del electrón alrededor del núcleo mediante cuatro parámetros o números cuánticos, a saber:

n: número cuántico principal

Representa la capa o nivel principal de máxima energía a la que está asociado el electrón, puede tomar valores enteros mayores que cero, del uno al siete. Hasta ahora suficientes para los elementos conocidos.

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ y } 7$$

n = 1 es la órbita del nivel más bajo de energía, conforme los electrones tienen más energía van ocupando niveles cuyo "n" es mayor y están más alejados del núcleo.



ℓ: número cuántico secundario

Sommerfeld sometió a los espectros de elementos a un campo eléctrico y encontró que los electrones no solo se movían en trayectorias circulares, sino también en trayectorias elípticas, al observar que los espectros se desdoblaban o se subdividían los niveles energéticos en otras nuevas líneas espectrales.

A estas subdivisiones se les denominaron subniveles energéticos, que representan el segundo número cuántico o secundario, que se conoce como número azimutal o de forma.

El número cuántico "ℓ" determina el tipo de subniveles posibles en donde se localiza el electrón y se relaciona con la nube electrónica así como la energía asociada con el movimiento del electrón alrededor del núcleo.

Los tipos de subniveles pueden ser:

- si el valor de "ℓ" es cero, lo representa el subnivel "s" (del inglés, sharp).
- si el valor de "ℓ" es uno, lo representa el subnivel "p" (del inglés, peanut, principal).
- si el valor de "ℓ" es dos, lo representa el subnivel "d" (del inglés, diffuse).
- si el valor de "ℓ" es tres, lo representa el subnivel "f" (de fundamental).

Los valores numéricos de "ℓ" son función del número principal "n" (sólo hasta el cuarto nivel).

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$$

Número cuántico "n"	Valores del número cuántico "ℓ"	Tipo de subnivel energético	Electrones por subnivel de energía
1(K) = 2e⁻	0	s	s = 2e⁻
2(L) = 8e⁻	0, 1	s, p	s = 2e⁻, p = 6e⁻
3(M) = 18e⁻	0, 1, 2	s, p, d	s = 2e⁻, p = 6e⁻, d = 10e⁻
4(N) = 32e⁻	0, 1, 2, 3	s, p, d, f	s = 2e⁻, p = 6e⁻, d = 10e⁻, f = 14e⁻
5(O) = 32e⁻	0, 1, 2, 3	s, p, d, f	s = 2e⁻, p = 6e⁻, d = 10e⁻, f = 14e⁻
6(P) = 18e⁻	0, 1, 2	s, p, d	s = 2e⁻, p = 6e⁻, d = 10e⁻
7(Q) = 8e	0, 1	s, p	s = 2e⁻, p = 6e⁻

En la tabla anterior tenemos los siete niveles energéticos con sus respectivos valores y subniveles.

Los espectros ahora son sometidos a un campo magnético, lográndose descubrir nuevas regiones energéticas llamadas orbitales o reempes.

En 1926 Heisenberg, después de haber diseñado varios experimentos hipotéticos, para determinar con precisión la posición y velocidad del electrón, llegó a la conclusión de que esa determinación era imposible. Proponiendo el siguiente principio: *"Es imposible determinar con precisión y simultáneamente la posición y velocidad de un electrón, ya que al precisar su velocidad, su posición se altera y viceversa"*.

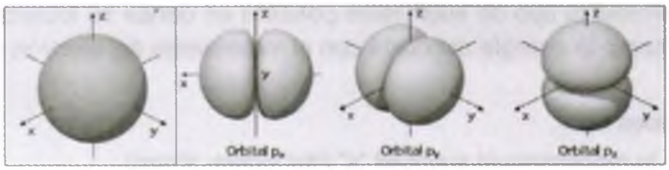
m: número cuántico magnético

Schrodinger, retomando las ideas sobre los niveles estacionarios de Bohr, la teoría dual de la materia de De Broglie y el principio de incertidumbre de Heisenberg, dedujo que para entender el comportamiento de los electrones, éstos pueden ser tratados como ondas materiales y compara su movimiento con el de una onda. Propone una ecuación para obtener las formas de los orbitales y así se obtiene el tercer número cuántico magnético.

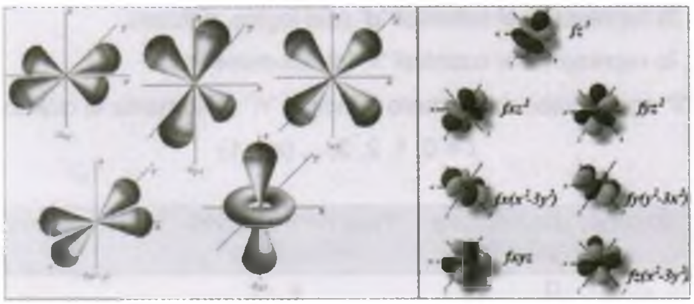
El número cuántico "m", representa la orientación espacial que pueden tener las nubes electrónicas alrededor del núcleo y se refiere a las posiciones, indica a los orbitales o reempes contenidos en los subniveles energéticos sometidos a un campo magnético.

El número de electrones por subnivel depende del valor de éste y está dado por la relación (2"ℓ" + 1) que puede ser desde $-\ell$ hasta $+\ell$, pasando por el cero.

Número cuántico "ℓ"	Valores del número cuántico "m"	Número de orbitales	Nombre del subnivel al que corresponden los orbitales	Nombre de los orbitales
0	0	1	s	s
1	−1, 0, +1	3	p	px, py, pz
2	−2, −1, 0, +1, +2	5	d	dz^2, dy^2,dx^2y^2,dxz,dxy
3	−3. −2. −1, 0, +1, +2	7	f	



Orbital *s* Orbitales *p*



Orbitales *d* Orbitales *f*

Como se puede apreciar en la representación espacial de los orbitales, se pueden mostrar gráficamente por un círculo o una pequeña línea horizontal, pero hay que resaltar la forma espacial de los mismos, la cual es difícil de representar en un solo plano.

s o m_s: número cuántico spin

Goudsmit y Uhleinbeck propusieron que el electrón gira sobre su eje de una manera cuantizada, con dos posibilidades o sentidos de rotación, con lo que aparece el cuarto número cuántico.

Éste se produce por el electrón al girar sobre su propio eje. Al girar un electrón crea un campo magnético con un determinado sentido, de ahí que en la reempe (orbital), se pueda colocar otro electrón con campo o spin contrario.

Solamente existen dos orientaciones posibles de spin cuyos valores son: ½ y – ½, que se representan con una media flecha hacia arriba ↑ para el primer valor y otra media flecha hacia abajo ↓ para el segundo valor, con lo cual se representan los electrones de los átomos de los diferentes elementos. Como máximo se pueden tener dos electrones por orbital y como mínimo uno.

Resumen de números cuánticos

Denominación	Representación	Valores permitidos	Relacionado con
1er parámetro cuántico espacio-energético fundamental (Principal)	"n"	Enteros y positivos del: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	Volumen ocupado por la región espacio-energético de manifestación probabilística electrónica orbital
2° parámetro cuántico por forma (secundario)	"ℓ"	Valores en literales s, p, d y f Valores numéricos 0 ... n – 1 Valores conjugados s(0), p(1), d(2), f(3)	Forma de los orbitales (subniveles)
3° parámetro cuántico por orientación (magnético)	"m"	Desde: – "ℓ", ... 0 ..., +"ℓ" (2"ℓ" + 1)	Número y posibilidades de orientación espacial de los orbitales
4° parámetro cuántico por giro (spin)	"s" o "m_s"	Dos valores: + ½ y – ½	Posibilidad de giro del electrón en sentido de las manecillas del reloj y en sentido contrario

Configuración electrónica

Se define como configuración electrónica a la distribución más probable y estable (la energía más baja) de los electrones entre los orbitales disponibles de un átomo.

Para expresar la configuración electrónica de un átomo en su estado de mínima energía, se requiere de un proceso que aplica las siguientes reglas:

a) Principio de exclusión de Wolfgang Pauli

"En un orbital puede haber hasta dos electrones de spin opuesto". Esto significa que no es posible la existencia de dos electrones en un mismo átomo que tengan sus cuatro números cuánticos iguales.

${}_1H^1$ $1s^1$ 1 $\uparrow$ s   n = 1 "ℓ" = 0 m = 0 m_s = + ½

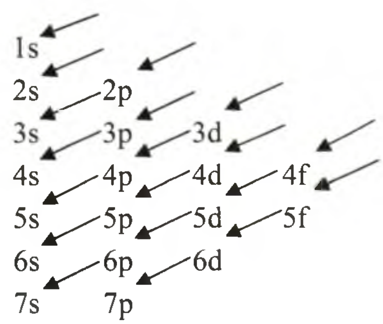
${}_2He^4$ $1s^1$ 1 $\uparrow\downarrow$ s   n = 1 "ℓ" = 0 m = 0 m_s = - ½

b) Principio de edificación progresiva

También se conoce como regla de Auf-Bau o regla de las diagonales

"Cada nuevo electrón añadido a un átomo entrará en el orbital disponible de mínima energía".

Se tendrá un cierto orden energético diagonal para la distribución electrónica, por los que el orden del llenado será:



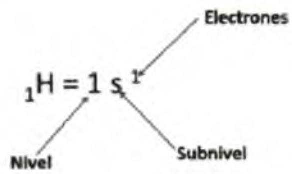
En este orden diagonal se observa que antes de terminar de llenar el tercer nivel se distribuyen electrones en el cuarto nivel, en el subnivel s, lo cual es denominado **traslape energético** o sea a la superposición energética de subniveles con diferentes valores de n.

c) Principio de máxima multiplicidad o regla de Hund

"Dentro de un subnivel, los primeros electrones ocupan orbitales separados y tienen spines paralelos". En otras palabras, los electrones entran uno a uno en los orbitales que contienen la misma energía, cuando estos orbitales se completan con un electrón, entonces cada uno de ellos se satura con dos electrones en el mismo orden.

Para el desarrollo de la configuración electrónica de un átomo se anota el nivel (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), el tipo de subnivel (s, p, d ó f) y como superíndice el número de electrones que cada subnivel contenga.

Ejemplo:



d) Diagrama energético

Se desglosa la configuración electrónica, esquematizando a los orbitales por medio de una pequeña línea horizontal, se aplica el principio de máxima multiplicidad y en lugar de exponentes para indicar a los electrones se utilizan medias flechas, las cuales representarán al spin o giro del electrón.

Ejemplos:

$_5B^{11}$ $1s^2\ 2s^2\ 2p^1$ |↑↓| |↑↓| |↑ ___ ___|

1s 2s 2p 2p 2p

e) Electrón diferencial

Se llama así al último electrón que entra a un átomo de acuerdo con las reglas de ocupación de orbitales; es decir, lo que distingue a un átomo de un elemento que lo precede en la clasificación periódica.

f) Kernel

El Kernel es una abreviación de las distribuciones electrónicas. Es la configuración de cualquier gas noble y lo podemos representar como:

$[_2He]$ $[_{10}Ne]$ $[_{18}Ar]$ $[_{36}Kr]$ $[_{54}Xe]$ $[_{86}Rn]$

Para simplificar una configuración electrónica o un diagrama energético, debe partirse del gas noble cuyo número de electrones sea el inmediato inferior al del átomo que se desea representar.

Ejemplos:

$_{16}S$ $[_{10}Ne]\ 3s^2\ 3p^4$

$_{23}V$ $[_{18}Ar]\ 4s^2\ 3d^3$

$_{38}Sr$ $[_{36}Kr]\ 5s^2$

Ejercicios

Ejercicio 1. Elige la respuesta correcta:

1. El elemento con número atómico 20 y configuración electrónica $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$, se clasifica en la familia:
   a) III A
   b) VI A
   c) III B
   d) II A

2. A continuación se muestra la configuración electrónica de un elemento "X". De acuerdo con ésta, ¿cuáles serán los valores de los cuatro números cuánticos para el electrón diferencial?

$$[_{18}Ar]\ 4s^2\ 3d^6$$

   a) n = 2, l = 2, m = -2, s = - ½
   b) n = 3, l = 2, m = -2, s = - ½
   c) n = 3, l = 1, m = -1, s = - ½
   d) n = 3, l = -2, m = 0, s = + ½

3. Partícula localizada en el núcleo atómico cuya carga eléctrica es positiva:
   a) neutrón
   b) quarks
   c) electrón
   d) protón

4. Es la partícula del átomo de carga negativa
   a) protón
   b) átomo
   c) neutrón
   d) electrón

5. El átomo está formado principalmente por:
   a) isótopos y electrones
   b) electrones, protones y neutrones
   c) partículas alfa y protones
   d) neutrones y protones

6. Qué nombre reciben las columnas verticales de la tabla periódica:
   a) periodos
   b) gases
   c) grupo de arriba a abajo
   d) grupos o familias

7. Señala la definición correcta de átomo:
   a) la parte más pequeña en que puede dividirse la materia
   b) la unidad elemental de una sustancia que puede intervenir en cualquier proceso químico
   c) la parte más pequeña en que puede dividirse un elemento por métodos químicos ordinarios
   d) la parte más pequeña en que puede dividirse un elemento por métodos físicos ordinarios

2 Tabla periódica

Propósitos: el alumno conocerá la historia de la Tabla periódica y el cómo y porqué los elementos fueron distribuidos como se presentan en ésta.

Historia

La clasificación periódica de los elementos que actualmente conocemos se desarrolló a consecuencia de tres necesidades básicas de la química en el siglo XIX, las cuales fueron:

- El intento de llegar a una clasificación natural y ordenada de los elementos conocidos.
- La aceptación (a raíz de la teoría atómica de Dalton), de que hay relación estrecha entre una cantidad fundamental y características de cada elemento (masa atómica) y ciertas propiedades de las mismas.
- El reconocimiento de que la periodicidad en las propiedades y en el comportamiento químico de los elementos depende de esa masa atómica.

Con tales necesidades los químicos de aquella época comenzaron a desarrollar paulatinamente y en forma independiente una serie de sistemas, siendo hasta el año de 1869 cuando se propuso la denominada **"Tabla Periódica de los Elementos"** expuesta por Lothar Meyer y Mendeleiev al mismo tiempo.

Sin embargo, diversos investigadores aportaron los fundamentos para la elaboración de la Tabla Periódica, destacándose principalmente Döbereiner y Newlands.

Al conocer las configuraciones electrónicas de los elementos se explican las propiedades periódicas de ellos, pues los elementos con propiedades semejantes tienen configuraciones semejantes.

Moseley en 1913 ordenó a los elementos en base al número atómico, en la actualidad está ordenación se denomina tabla periódica larga y es la que utilizamos.

Actualmente se conocen 118 elementos los cuales aun sin haber sido detectados ya tenían un lugar destinado en la tabla de Moseley.

Al ordenar los elementos de acuerdo con los números atómicos, se obtiene un sistema periódico más satisfactorio y se deriva una ley periódica que se conoce con el nombre de **Ley periódica de Moseley**, la cual dice: *"las propiedades de los elementos son función periódica de sus números atómicos".*

Las propiedades periódicas de los elementos como tamaño atómico, energía o potencial de ionización, afinidad electrónica, electronegatividad, etc., dependen del aumento regular de la carga nuclear de los átomos a medida que su tamaño y complejidad aumentan, y se repiten regularmente.

En la actualidad podemos decir que existen 92 elementos naturales y que los demás son artificiales, pues se han obtenido por bombardeo de elementos radiactivos. Algunos de los elementos artificiales tienen una vida media muy corta, la cual solo dura fracciones de segundo por la inestabilidad propia de su naturaleza.

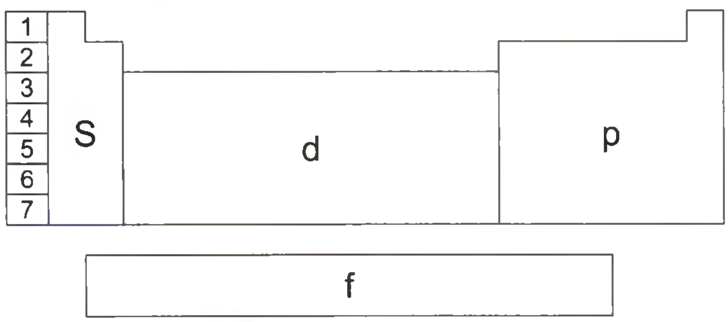
Encontramos en la clasificación periódica, que los elementos ordenados verticalmente forman a los grupos, y se tienen ocho grupos A y ochos grupos B, donde un grupo incluye una triada de elementos, en total dieciséis grupos, se emplean número romanos para numerarlos. La tendencia actual es contar con números ordinarios a los grupos de la tabla periódica, con lo cual se tiene 18 grupos de elementos.

Los elementos colocados horizontalmente en la tabla periódica forman a los periodos, son hasta ahora siete y cada uno de ellos termina con un gas noble.

	I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	VIII B	VIII B	VIII B	I B	II B	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	* La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	** Ac	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Mv	111 Pl	112 Da	113 Tf	114 Eo	115 Me	116 Nc	117 El	118 On

*	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
**	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

La tabla periódica larga también se puede clasificar en clases o bloques, donde los elementos tienen igual número cuántico "ℓ", para electrones diferenciales, correspondiendo a un determinado subnivel. Los bloques son el s, p, d y el f, como se representan en la siguiente tabla:



Familia

La tabla periódica clasifica a los elementos por grupos o familias (columnas verticales), se dividen en grupos **A** y **B.**

Los elementos que pertenecen a los grupos **A**, se denominan **elementos representativos**, y los pertenecientes a los grupos **B**, **elementos de transición**. Los grupos se designan con números romanos, que van del **I** al **VIII**.

Los grupos indican el número de electrones de valencia de un átomo, es decir, los del último nivel energético.

a) Elementos representativos

Localizamos a los elementos representativos en el bloque s y p de la tabla periódica, pertenecen al mismo grupo o familia porque poseen el mismo número de electrones de valencia y la misma configuración electrónica para el último nivel energético.

La suma de los electrones de valencia nos da el grupo de elementos representativos, el periodo nos lo da el último nivel energético ocupado.

Es importante considerar que los elementos representativos, grupos A de la tabla periódica (metales representativos, no metales y metaloides), también son denominados **familias**, por tener propiedades físicas y químicas muy similares; las cuales son:

Grupo	Nombre	Elementos
I A	Metales alcalinos.	H, Li, Na, K, Rb, Cs, Fr
II A	Metales alcalino-térreos.	Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra
III A	Metales térreos o familia del boro o boranos.	B, Al, Ga, In, Tl, Tf
IV A	Familia del carbono o carbonóides.	C, Si, Ge, Sn, Pb, Eo
V A	Familia del nitrógeno o nitrogenóides.	N, P, As, Sb, Bi, Me
VI A	Familia del oxígeno o calcógenos.	O, S, Se, Te, Po, Nc
VII A	Familia de los halógenos (formadores de sales).	F, Cl, Br, I, At, El
VIII A	Gases nobles, raros o inertes. También llamado grupo "cero".	He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn, On

b) Elementos de transición

Estos elementos los ubicamos en los grupos que llevan la letra **B**, los que se caracterizan por una estructura electrónica especial. Se localizan en la parte central de la tabla periódica larga, forman parte del bloque o clase "d" puesto que su electrón diferencial se localiza en el subnivel d.

En los elementos metálicos de transición, para localizar su grupo, debemos sumar también sus electrones de valencia, los cuales están en los subniveles s y d.

Para el grupo I B, se explica la atracción de los electrones del correspondiente subnivel d, junto con sus cinco orbitales y la influencia del traslape energético.

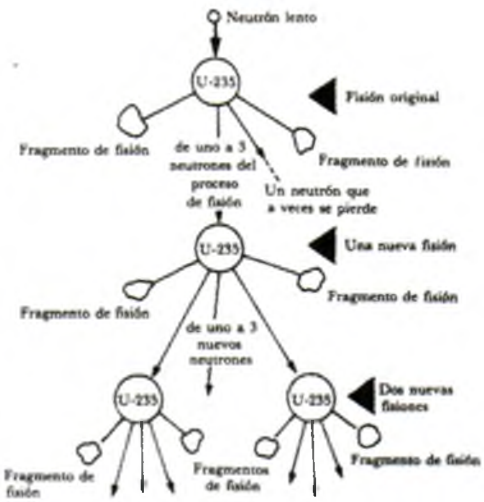
Por ser elementos no representativos, presentan todas las características metálicas y algunas propias como:

- Variabilidad en sus números de oxidación.
- Formación de iones y compuestos coloridos.
- Son utilizados como catalizadores.
- Propiedades magnéticas: paramagnéticas, diamagnéticas y ferromagnéticas.
- Formación de compuestos complejos.

Los elementos de transición tienen gran cantidad de electrones desapareados necesitando por ello más cantidad de electrones para parecerse a un gas noble, por lo tanto tienen la capacidad de reacomodar a sus electrones e hibridarse y poder poseer varios números de oxidación.

Dentro de los elementos de transición se consideran también a los **lantánidos** (de Z = 58 a Z = 71) y a los **actínidos** (de Z = 89 a Z = 103), a estos dos grupos también se les da el nombre de elementos de transición interna.

A su vez dentro de los actínidos podemos encontrar un subgrupo que comienza con el neptunio (Np) y termina con el laurencio (Lu), los que reciben el nombre de **metales transuránidos**, todos ellos artificiales y radiactivos.



c) Metales, no metales y metaloides

La tabla periódica se divide en tres bloques o grupos de gran importancia: metales, metaloides y no metales.

Sustancia	Propiedad física	Propiedad química
Metal	• Tienen brillo. • Son maleables. • Dúctiles. • Tenaces. • Conducen la electricidad y el calor. • Todos son sólidos menos el Hg, Cs, Fr y Ga, que son líquidos. • Se combinan entre sí formando aleaciones. • Altos puntos de fusión y de ebullición. • Alto peso específico.	• Se oxidan por pérdida de electrones (electropositivos). • Forman cationes. • + O_2 = óxido. • + H_2O = hidróxidos. • + Ácido = sal. • Moléculas monoatómicas. • Son agentes reductores. • Bajo potencial de ionización. • Alto peso específico. • En su último nivel de energía tienen de 1 a 3 electrones. • Los metales alcalinos son los más activos.

Sustancia	Propiedad física	Propiedad química
No metal	• No tienen brillo. • No son maleables, ni dúctiles, ni tenances. • No presentan resistencia mecánica. • Son malos conductores de la electricidad y el calor. • Son sólidos, gaseosos y líquido el Br. • Puntos de fusión y ebullición bajos. • Bajo peso específico.	• Se reducen por ganancia de electrones (electronegativos). • Forman aniones. • + O_2 = anhídridos. • + H_2O = ácidos. • + Base = Sal. • Forman moléculas diatómicas: Cl_2, O_2, N_2, ó poliatómicas: P_5, S_8. • Son agentes oxidantes. • Alto potencial de ionización. • Bajo peso específico. • Por regla general, en su último nivel de energía poseen de 4 a 7 electrones. • Varios de ellos presentan alotropía. • Los halógenos y el oxígeno son los más activos.

Alotropía

Se denomina así a la existencia de un elemento en dos o más forma bajo el mismo estado físico de agregación.

Las formas diferentes de estos elementos se llaman **alótropos**.

La alotropía se debe a algunas de las razones siguientes:

- Un elemento tiene dos o más clases de moléculas, cada una de las cuales contiene distintos números de átomos que existen en la misma fase o estado físico de agregación.
- Un elemento forma dos o más arreglos de átomos o moléculas en un cristal.

Este fenómeno se presenta sólo en los no metales.

Ejemplos:

Elemento	Símbolo	Alótropos
Carbono	C	Diamante (cristal duro) y grafito (sólido amorfo).
Azufre	S	Monoclínico, rómbico, triclínico, plástico (todos sólidos).
Fósforo	P	Blanco (venenoso y brillante), rojo (no venenoso y opaco), ambos son sólidos.
Oxígeno	O	Diatómico (O_2) y ozono (O_3) ambos son gases.
Selenio	Se	Metálico gris y monoclínico rojo (sólidos).
Silicio	Si	Sílice, cuarzo, pedernal, ópalo (sólidos).

Sustancia	Propiedad física	Propiedad química
Metaloide	• B, Si, Ge, As, Sb, Te, Po. • Sólidos. • Tienen brillo metálico. • Son semiconductores de la electricidad. • Son malos conductores de calor.	• Exhiben propiedades metálicas y no metálicas, dependiendo de las condiciones en las que reaccionan.

Periodo

Los periodos indican el número de niveles energéticos que tiene un átomo.

La tabla periódica de los elementos clasifica a éstos primeramente, en orden de acuerdo con sus números atómicos formando ***periodos*** (filas horizontales) y percibimos en la tabla siete:

- El primer periodo contiene dos elementos que son el hidrógeno (Z = 1) y el helio (Z = 2).
- El segundo periodo comprende a los elementos Li, Be, B, C, N, O, F, Ne; es decir, contiene ocho elementos.
- El tercer periodo contiene 8 elementos, que van del sodio (Na) al argón (Ar).
- El cuarto periodo está constituido por 18 elementos que inician con el potasio (K) y finalizan con el criptón (Kr).
- El quinto periodo también contiene 18 elementos, del rubidio (Rb) al xenón (Xe).
- El sexto periodo está formado por 32 elementos, que van del cesio (Cs) al radón (Rn). Este periodo incluye al grupo de los *lantánidos o tierras raras*; serie de elementos del lantano (La) al lutecio (Lu).
- El séptimo periodo, actualmente completo, consta de 32 elementos, los cuales incluyen del francio (Fr) al oberón (On), y a la serie de los *actínidos*, del actino (Ac) al laurencio (Lr).

Debido a la existencia de los periodos que contienen más de ocho elementos, la tabla actual suele denominarse también, como tabla de periodos largos.

Propiedades Periódicas

La colocación de los elementos dentro de la tabla periódica coincide con su estructura electrónica y si por ejemplo, se conoce la química del sodio, entonces será conocida la química del litio, potasio o rubidio, porque estos elementos se encuentran en el mismo grupo.

Muchas propiedades físicas y químicas de los elementos varían con regularidad periódica cuando se ordenan estos por orden creciente de su número atómico. Son propiedades periódicas: la configuración electrónica, la energía de ionización, la afinidad electrónica, etc.

Algunas de las propiedades que se pueden encontrar en la tabla periódica son:

a) Número atómico (Z)

Es el número progresivo de los átomos, ordenados de acuerdo con el número de cargas positivas que posean en su núcleo, es decir, del número de protones.

Nota: el número de electrones siempre es igual al número de protones en un átomo neutro, es decir, si éste no se ha ionizado.

$$Z = p^+ = e^-$$

b) La configuración electrónica

Los electrones están distribuidos en cada átomo en niveles o capas de energía. Los elementos de un mismo período tienen todos el mismo número de niveles electrónicos (completos o no), y este número coincide con el número del período. El número máximo de electrones que caben en un nivel es $2n^2$, siendo n el número de nivel.

c) Masa atómica o número de masa (A)

La masa atómica es la masa de un átomo en reposo. En otras palabras, la masa atómica puede ser considerada como la masa total de los protones y los neutrones en un átomo único en estado de reposo. En el Sistema Internacional, su unidad es la masa atómica unificada (u.m.a).

$$A = Z + n\pm \qquad A = p^+ + n\pm \qquad A = e^- + n\pm$$

La masa atómica también suele recibir el nombre de **peso atómico**, aunque esta denominación es inexacta, ya que la masa es una propiedad del cuerpo y el peso depende de la gravedad.

d) Número de neutrones

Neutrones = A - Z.

e) Peso atómico

Número asignado a cada elemento químico para especificar la masa promedio de sus isótopos. Puesto que un elemento puede tener dos o más isótopos cuyas masas difieren, el peso atómico de tal elemento dependerá de las proporciones relativas de sus isótopos. El cual se simboliza con las letras P.a.; es un número fraccionario que toma como referencia al átomo de carbono, porque sus isótopos son muy estables

La composición isotópica de los elementos que se encuentran en la naturaleza es casi constante, excepto en aquellos que ha producido la radiactividad natural. El peso atómico se refiere a esta mezcla natural. En 1960 se introdujo una unidad llamada masa nuclear relativa, definida como 1/12 de la masa de carbono-12. Se representa con el símbolo u; de este modo, $^{12}C = 12u$. La tabla de los pesos atómicos relativos se basa ahora en la masa atómica de $^{12}C = 12$.

Es común que las unidades del peso atómico estén dadas en unidades de masa atómica que son abreviadas con las letras **u.m.a.** o en **g/mol**; por ejemplo en el cloro:

Cl = 35.5 u.m.a o 35.5 g/mol

f) Isótopo

Es la forma en que se puede presentar un elemento con igual número atómico pero diferente masa atómica por contener diferente número de neutrones. Además un isótopo también lo podemos definir como los átomos de un elemento con el mismo número de protones o (electrones) pero número de masa diferente.

Por ejemplo, los isótopos del oxígeno son:

$_8O^{16}$ $\quad$ $_8O^{17}$ $\quad$ $_8O^{18}$

Si calculamos el número de partículas subatómicas que contiene cada uno tendremos lo siguiente:

Partículas	$_8O^{16}$	$_8O^{17}$	$_8O^{18}$
p^+	8	8	8
e^-	8	8	8
n±	8	9	10

Los isótopos del hidrógeno son denominados: Protio ($_1H^1$), con número de masa uno; Deuterio ($_1H^2$), con número de masa dos y Tritio ($_1H^3$), con número de masa tres; todos con el mismo número atómico uno. Los neutrones para cada isótopo respectivamente son: cero, uno y dos.

Beneficios y riesgos derivados del uso de los isótopos

Es necesario que consideremos dos proceso muy importantes que pueden sufrir los átomos, el primero es la fusión y el segundo la fisión.

La fusión generalmente la pueden sufrir los átomos pequeños, donde la reacción provoca que los núcleos pequeños se unan para formar otros más grandes.

La fisión suele ocurrir en átomos grandes. La desintegración radiactiva ocurre cuando el núcleo se divide en fragmentos grandes y varios pequeños (como neutrones).

Los isótopos se utilizan como rastreadores en diferentes reacciones químicas, por ejemplo: en la fotosíntesis, se conoce el camino del recorrido del carbono (C) y del fósforo. También son utilizados para el tratamiento de cáncer, registrar la edad de los fósiles, etc.

g) Radio atómico

Es la distancia que existe entre el núcleo y la capa de valencia; por medio del radio atómico es posible determinar el tamaño del átomo.

El tamaño de los átomos de un grupo aumenta con el número atómico, en un periodo disminuye de izquierda a derecha, debido a la contracción de la nube electrónica al ser atraída por el núcleo. El radio atómico se expresa en ángstrom (Å).

Se puede entender que el tamaño de un átomo es bastante impreciso, puesto que la nube electrónica que rodea al núcleo no posee un límite definido, porque no es posible aislar y medir un átomo solo, pero la distancia entre los núcleos de dos átomos que se encuentran entrelazados sí se puede medir, entonces se infieren los radios atómicos.

Cuando un elemento metálico pierde electrones, su radio se ve disminuido, y cuando un elemento no metálico gana electrones su radio se ve incrementado.

h) Potencial de ionización (energía de ionización)

Es la energía necesaria para separar un electrón de un átomo que está aislado, en estado gaseoso y en su estado base de energía, (proceso endotérmico). Mide la facilidad con la que un átomo cede electrones y puede adquirir una carga positiva. Por ejemplo, si se le suministra energía a un átomo de sodio, se le puede quitar un electrón de su capa de valencia y se transforma en un ion positivo o catión.

Para un átomo X, el proceso será:

$$\mathbf{X + E_i \rightarrow X^+ + e^-}$$

donde e^- es el electrón extraído.

Cuanto menor sea la energía de ionización de un elemento, tanto más fácilmente podrá perder un electrón y formar un ion positivo. Los elementos más metálicos (que son los situados más a la izquierda y hacia abajo del sistema periódico) son los que más fácilmente formarán iones positivos (son más electropositivos), mientras que los más no metálicos (los situados más arriba y a la derecha del sistema periódico) serán los que menos fácilmente pueden formar iones positivos.

Una particularidad destacable es que los valores máximos de las energías de ionización corresponden a los gases nobles. Ello es coherente con el hecho de que los gases nobles son muy estables o bastante inertes.

El potencial de ionización se mide en electrón-voltios o kcal por mol.

Ión: átomo con carga eléctrica, positiva (catión) o negativa (anión).

i) Afinidad electrónica

Se llama afinidad electrónica, AE (o electroafinidad), a la energía que libera (proceso exotérmico) un átomo en estado gaseoso cuando capta un electrón y se transforma en un ion con carga -1, también en estado gaseoso.

Si un átomo tiene baja energía de ionización, cede con facilidad un electrón (no tiende a ganarlo); por ello, su afinidad electrónica será baja. Cuando un átomo tiene alta su energía de ionización, no tiene tendencia a perder electrones y sí a ganarlos. La afinidad electrónica varía en el sistema periódico igual que la energía de ionización, es decir, es mayor para los no metales.

Por ejemplo, un átomo de cloro puede ganar un electrón si se transforma en un ion negativo o anión.

j) Electronegatividad

La electronegatividad es la fuerza de atracción con que los átomos de una molécula atraen a los electrones.

La electronegatividad se define como la tendencia que tienen los átomos para captar electrones. Se dice que un elemento es muy electronegativo cuando la energía de ionización y la afinidad electrónica son altas.

En un grupo o familia, la electronegatividad aumenta de abajo hacia arriba, es decir, es mayor cuando disminuye el número atómico.

En un periodo, la electronegatividad aumenta de izquierda a derecha.

El elemento más electronegativo es el flúor (4) y el menos electronegativo es el francio (0.7).

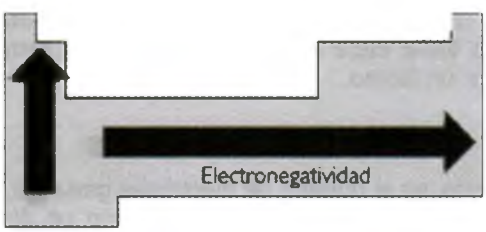
En general, la electronegatividad varía periódicamente, de forma que los elementos situados más arriba y a la derecha del sistema periódico son los más electronegativos y los situados más hacia abajo y a la izquierda son los menos electronegativos. El elemento más electronegativo (más no metálico) es el flúor, seguido del oxígeno y del cloro. El menos electronegativo (más metálico) es el cesio. Los gases nobles son muy inertes, no se habla de electronegatividad de estos elementos.

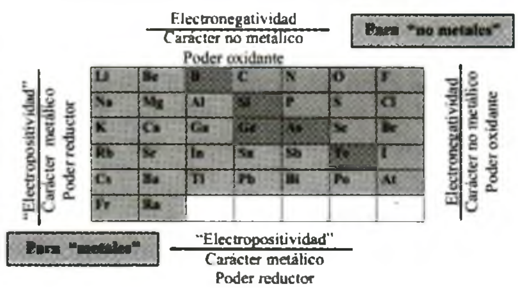
Tabla de electronegatividades de Pauli

I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	VIII B			I B	II B	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A
2.1 H																	He
1.0 Li	1.5 Be											2 B	2.5 C	3 N	3.5 O	4.0 F	Ne
0.9 Na	1.2 Mg											1.5 Al	1.8 Si	2.1 P	2.5 S	3.0 Cl	Ar
0.8 K	1.0 Ca	1.3 Sc	1.5 Ti	1.6 V	1.6 Cr	1.5 Mn	1.8 Fe	1.8 Co	1.8 Ni	1.9 Cu	1.6 Zn	1.6 Ga	1.8 Ge	3.9 As	2.4 Se	2.8 Br	3.0 Kr
0.7 Rb	1.0 Sr	1.2 Y	1.4 Zr	1.6 Nb	1.8 Mo	1.9 Tc	2.2 Ru	2.2 Rh	2.2 Pd	1.9 Ag	1.7 Cd	1.7 In	1.8 Sn	1.9 Sb	2.1 Te	2.9 I	2.6 Xe
0.7 Cs	0.9 Ba	* La	1.5 Hf	1.5 Ta	1.7 W	1.9 Re	2.2 Os	2.2 Ir	2.2 Pt	2.4 Au	1.9 Hg	1.8 Tl	1.8 Pb	1.9 Bi	2.0 Po	2.3 At	2.4 Rn
0.7 Fr	0.9 Ra	** Ac															

*	1.1 La	1.1 Ce	1.1 Pr	1.1 Nd	1.1 Pm	1.1 Sm	1.1 Eu	1.1 Gd	1.1 Tb	1.1 Dy	1.1 Ho	1.1 Er	1.1 Tm	1.1 Yb	1.2 Lu
**	1.1 Ac	1.3 Th	1.5 Pa	1.7 U	1.3 Np	1.3 Pu	1.3 Am	1.3 Cm	1.3 Bk	1.3 Cf	1.3 Es	1.3 Fm	1.3 Md	1.3 No	1.3 Lr

Referencia: Ocampo. "Fundamentos de química"





Al examinar los valores de electronegatividad en la tabla se denota que:

- Los valores más elevados de electronegatividad, la presentan los elementos no metálicos que tiene los potenciales de ionización más elevados, porque son los que atraen con más fuerza a los electrones de valencia y por tener menor radio atómico.
- Dentro de un grupo los elementos más electronegativos son los del grupo VII A (halógenos) y los menos electronegativos son los del grupo I A (metales alcalinos)
- En un grupo o familia la electronegatividad disminuye conforme aumenta el radio atómico.
- Dentro de un periodo el aumento de la electronegatividad va de izquierda a derecha de un átomo a otro, y se debe a que la fuerza de atracción del núcleo sobre los electrones de enlace es mayor al aumentar la carga nuclear efectiva y el número de electrones de valencia.

k) Volumen atómico

El volumen atómico fue definido por Meyer como el espacio que ocupa el átomo de un elemento, y lo calculó dividiendo la masa atómica del elemento entre su densidad. Pero como un mismo elemento químico puede presentar varias estructuras sólidas diferentes, tendrá varios volúmenes atómicos, según la definición de Meyer; de ahí que se caracterice ahora el tamaño de los átomos mediante el **radio atómico**, calculado en función de las distancias a que se sitúan los átomos cuando forman enlaces para unirse entre sí.

El radio atómico da una idea del volumen atómico y se mide en nanómetros, nm (1nm = 10^{-9}m).

La variación del volumen atómico de los elementos es paralela a la de los radios atómicos, y en un grupo del sistema periódico va creciendo a medida que aumenta su número atómico. En un período, el análisis de la variación resulta más complejo.

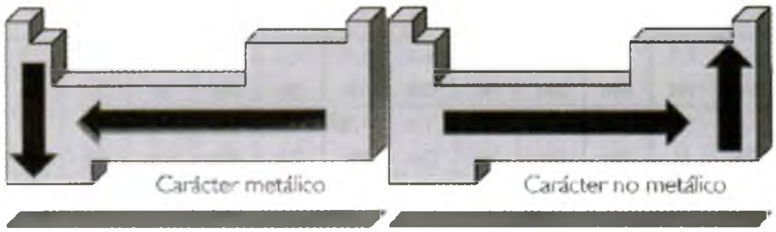
l) Carácter metálico

Un elemento se considera metal desde un punto de vista electrónico cuando cede fácilmente electrones y no tiene tendencia a ganarlos; es decir, los metales son muy poco electronegativos. Un no metal es todo elemento que difícilmente cede electrones y sí tiene tendencia a ganarlos; es muy electronegativo.

Los gases nobles no tienen ni carácter metálico ni no metálico.

La línea quebrada que empieza en el boro (B) y termina en el astato (At) marca la separación entre los metales, que se encuentran por debajo de ella, y los no metales, que se sitúan en la parte superior (ver tabla periódica).

Los semimetales son los elementos que no tienen muy definido su carácter metálico o no metálico y se sitúan bordeando esta línea divisoria.



m) Valencia

Es la capacidad que tiene un átomo para unirse con otro u otros átomos, depende del número de electrones ubicados en el nivel de energía más externo; a éste se le llama capa o nivel de valencia, de esta manera la valencia viene a ser el número de enlaces que puede formar un átomo.

n) Número de oxidación

También conocido como estado de oxidación de un elemento, es el número de electrones ganados, perdidos o compartidos por un átomo cuando se combina con otro para formar compuesto. Cuando un átomo pierde electrones, al número de oxidación se le antepone el signo (+), cuando los gana, el signo es (-).

El número de oxidación está íntimamente relacionado con la configuración electrónica. Por tanto, es razonable la periodicidad que se observa en el número de oxidación de los elementos. En el sistema periódico se puede resumir:

- En un mismo grupo, los elementos suelen presentar números de oxidación comunes.
- El número de oxidación más alto que presenta un elemento coincide con el número del grupo al que pertenece (desde 1 hasta 7).

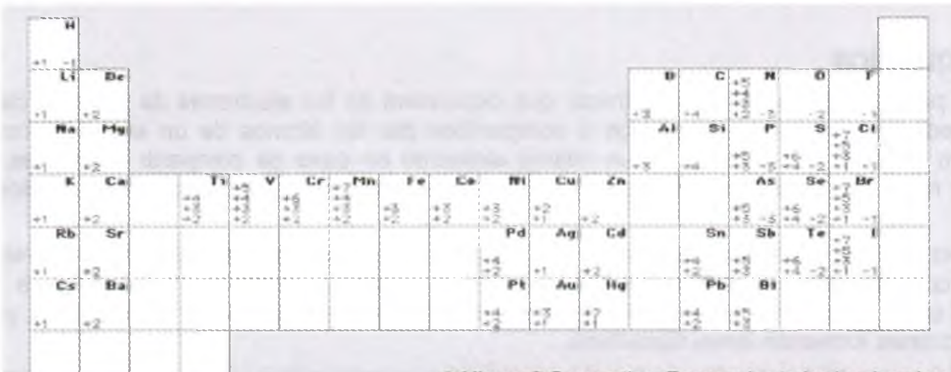
Por ejemplo:

  - Los elementos del grupo 1 (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) tienen número de oxidación +1.
  - Los elementos del grupo 2 (Be, Mg, Ca, Sr...) tienen número de oxidación +2.
  - Los elementos del grupo 4 (C, Si, Ge, Sn, Pb...) tienen varios números de oxidación, pero el más alto es +4.

El número de oxidación positivo máximo de los elementos representativos es igual al número de grupo al cual pertenece dicho elemento, y el número de oxidación mínimo se obtiene con la expresión:

$$-\ (\ 8 - \text{número de grupo del elemento}\ )$$

Para el caso del cloro, por ejemplo, que pertenece al grupo VII A tenemos: – (8 – 7) = – 1, el – 1 será el número de oxidación mínimo del cloro.



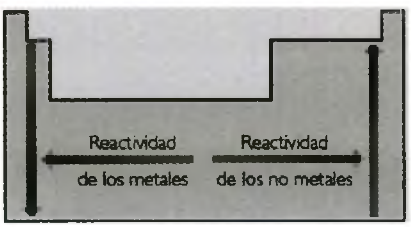
Regularidades en las propiedades periódicas

Los electrones del último nivel son los responsables de las propiedades de los elementos, fundamentalmente de la reactividad.

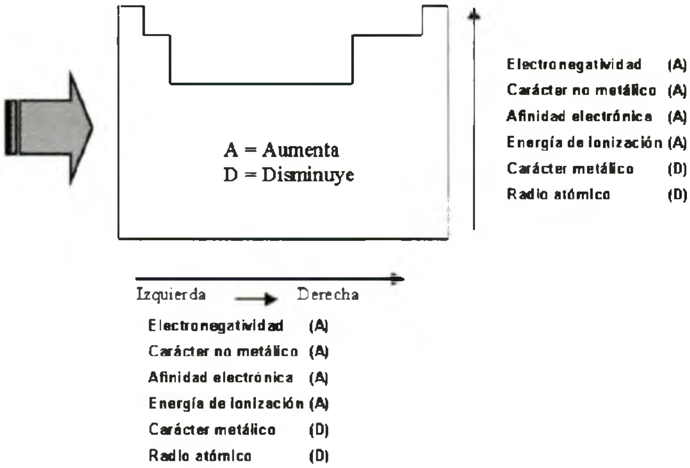
Los alcalinos son los metales más reactivos. Ceden con muchísima facilidad el electrón solitario que tienen en su último nivel y se combinan con otros elementos. Los alcalinotérreos son algo menos reactivos, ya que reaccionan cediendo sus dos electrones del último nivel, y esto es más complicado.

Entre los no metales, los más reactivos son los halógenos, grupo 17, con siete electrones externos. A continuación, el grupo 16 del oxígeno. Los primeros tienden a captar solo un electrón, y los segundos, dos.

Además de las ya nombradas, hay más propiedades que varían periódicamente. Por ejemplo: los puntos de fusión, de ebullición y la densidad.



En la siguiente figura se muestran como varían las diferentes propiedades periódicas en la Tabla periódica:



Actividad química

Una actividad periódica es la actividad química, que dependerá de los electrones de valencia de cada átomo, los cuales pueden ser donados, aceptados o compartidos por los átomos de un elemento con los de otro elemento, pero también con átomos de un mismo elemento en caso de compartir electrones. Tratando de cumplir con la regla del octeto o sea tener en el último nivel energético ocho electrones y parecerse a un gas noble.

Los metales por su baja energía de ionización y su también baja electronegatividad donan sus electrones para adquirir una configuración electrónica de gas noble; los metales alcalinos (s^1) tienden a formar iones unipositivos al ceder su electrón de valencia, los metales alcalinotérreos (s^2) son menos activos, pues tienden a ceder dos electrones formando iones dipositivos.

Los metales del grupo III A o familia de los térreos (s^2p^1) es menos activa, puesto que ceden tres electrones, formado iones tripositivos, también nos percatamos, que la actividad química metálica va disminuyendo, dentro de un periodo de izquierda a derecha, mientras que en un grupo, aumenta de arriba hacia abajo. Hacia la derecha de la tabla encontramos a los no metales.

Los no metales como los halógenos, no actúan todos como los metales cediendo electrones, éstos generalmente aceptan electrones, en su último nivel energético tienen siete electrones de valencia (s^2p^5), por lo cual, aceptan un electrón para completar su estructura de gas noble y cumplir con la regla del octeto. Pero algunos elementos de este grupo tienen capacidad para ceder sus electrones.

Ejercicios

Ejercicio 2. Elige la respuesta correcta:

1. Son elementos agentes reductores y electropositivos, nos referimos a las propiedades químicas de los:
   a) no metales.
   b) metales.
   c) metaloides.
   d) halógenos

2. Los elementos no metálicos presentan su electrón diferencial en el subnivel:
   a) s
   b) p
   c) d
   d) f

3. Relaciona las siguientes columnas:

Grupo	Elementos
A. II A	1. Ne, Ar, Kr
B. Halógenos	2. Mn, Tc, Re
C. VII B	3. K, Rb, Cs
D. Gases nobles	4. F, Cl, Br
E. IV A	5. Cr, Mo, W
F. Metales alcalinos	6. Mg, Ca, Sr
G. VI B	7. C, Si, Ge

   a) A1, B2, C3, D4, E5, F6, G7
   b) A4, B5, C1, D7, E6, F1, G3
   c) A6, B4, C2, D1, E7, F3, G5
   d) A3, B7, C5, D2, E1, F4, G6

4. Ordena en forma decreciente de electronegatividad los siguientes elementos: Na, F, Mg, Br.
   a) Na, Br, F, Mg
   b) Na, Mg, Br, F
   c) Na, Mg, F. Br
   d) F, Br, Mg, Na

5. Los isótopos son aquellos elementos que tienen el mismo número atómico, pero diferente ____________.
   a) número de neutrones
   b) número de protones
   c) número de electrones
   d) configuración electrónica

6. ¿Cuántos protones y neutrones posee el isótopo del Uranio $^{233}U_{92}$ que se utiliza como material combustible en los reactores nucleares?
   a) 92 protones y 233 neutrones
   b) 92 protones y 141 neutrones
   c) 233 protones y 92 neutrones
   d) 233 protones y 141 neutrones

3 Nomenclatura de compuestos inorgánicos

Propósito: el alumno identificará y nombrará a los compuestos inorgánicos por su fórmula.

Determinación del número de oxidación

Las fórmulas químicas son la representación de la constitución de un compuesto, por medio de sus elementos en relación definida.

Los compuestos son las sustancias cuyas moléculas están formadas por átomos diferentes, es decir, de varias clases, que al combinarse químicamente cada uno pierde sus propiedades características para formar otras nuevas, al unirse se desprende o absorbe energía, sus constituyentes solo pueden separarse por medios químicos y tienen composición definida en peso. Por ejemplo, la sal común, que puede ser descompuesta en un metal brillante y activo (sodio, Na) y un gas venenoso amarillo-verdoso (cloro, Cl). Las propiedades de las sustancias obtenidas por la descomposición de un compuesto no tienen la menor semejanza con las propiedades del compuesto.

Para poder escribir la fórmula correcta de un compuesto hay que considerar:

- Los números de oxidación de los elementos que constituyen al compuesto, tomándolo de la tabla periódica.
- En la fórmula de un compuesto, la suma de los números de oxidación positivos es igual a la de los negativos, o sea que la suma algebraica de los números de oxidación de un compuesto debe ser igual a cero, puesto que la molécula al igual que el átomo es eléctricamente neutra.
- El número de oxidación de un elemento combinado es cero.
- El número de oxidación del hidrógeno generalmente es +1, en los hidruros de –1.

a) Cálculo del número de oxidación

El número de oxidación indica la capacidad de combinación de los elementos, es decir, los electrones que se pueden perder, ganar o compartir al formar un compuesto. Para poder obtener el número de oxidación si no se cuenta con una tabla que dé esta información, se toman en cuenta las siguientes reglas:

Los elementos de la familia IA, IIA, IIIA, siempre trabajan con +1, +2, +3 respectivamente.

Recordar que los compuestos deben tener número de oxidación total cero.

El hidrógeno trabaja casi siempre con +1 y el oxígeno con –2.

Ejemplos:

$$\underline{+2\ \ +6\ \ -8} = 0$$

$$\overset{+1}{H_2}\ S\ \overset{-2}{O_4}$$

Por tanto, el S trabaja con +6

En el Al $(NO_3)_3$ (nitrato de aluminio), la valencia del ion nitrato es –1, la valencia del nitrógeno es +5.

En el $LiMnO_4$ (permanganato de litio), la valencia del Mn es de +7.

Para el sulfocianuro de potasio (KSCN), los número de oxidación son: K = +1, S = +6, C = –4 y para el N = –3.

Modelos de reacciones para la formación de compuestos inorgánicos

Como sabemos, los compuestos son las sustancias cuyas moléculas están formadas por átomos diferentes, es decir, de varias clases, que al combinarse químicamente cada uno pierde sus propiedades características para formar otras nuevas, al unirse se desprende o absorbe energía, sus constituyentes sólo pueden separarse por medios químicos y tienen composición definida en peso. Por ejemplo, la sal común, que puede ser descompuesta en un metal brillante y activo (sodio, Na) y un gas venenoso amarillo-verdoso (cloro, Cl). Las propiedades de las sustancias obtenidas por la descomposición de un compuesto no tienen la menor semejanza con las propiedades del compuesto.

$$\mathbf{Na^{+1} + Cl^{-1} \rightarrow NaCl}$$

Por lo anterior, cada uno de los compuestos que se forman en una reacción química tendrán propiedades diferentes a las de los elementos que los constituyen. Así, se pueden crear diferentes tipos de compuestos que presentan un modelo de reacción general, como:

- Metal + oxígeno → óxidos metálicos
- No metal + oxígeno → óxidos no metálicos (anhídridos)
- Metal + agua → hidróxido (base) + H_2
- Óxido metálico + agua → hidróxido (base)
- Anhídrido + agua → oxiácidos
- No metal + hidrógeno → hidrácidos
- Metal + no metal → sal binaria
- Metal + hidrácido → sal binaria + H_2
- Metal + oxiácido → oxisal + H_2
- Óxido metálico + hidrácido → sal binaria + H_2O
- Hidróxido + hidrácido → sal binaria + H_2O
- Hidróxido + oxiácido → oxisal + H_2O

En la nomenclatura inorgánica para nombrar de forma general a los compuestos independientemente de que tipo sean, se debe tomar en consideración que primero se menciona al anión (elemento más electronegativo) y después al catión (elemento más electropositivo) que lo forma, si es ácido primero va la palabra ácido y después el anión.
Sin embargo para escribir la fórmula se realiza lo contrario que para nombrarlos, es decir, primero se coloca el catión (elemento más electropositivo) y posteriormente el anión (elemento más electronegativo). Por ello, una forma sencilla de crear las formulas de los diferentes compuestos y nombrarlos es utilizando la siguiente tabla de aniones y cationes:

Cationes	Nombre Sistemático / IUPAQ	Aniones	Ácidos	Sales
H^+	ácido / hidrógeno	F^{-1}	fluorhídrico	fluoruro
Li^+	litio	Cl^{-1}	clorhídrico	cloruro
Na^+	sodio	Br^{-1}	bromhídrico	bromuro
K^+	potasio	OH^{-1}	hidróxido	hidróxido
Cu^+	cuproso / cobre I	CN^{-1}	cianhídrico	cianuro
Cu^{2+}	cúprico / cobre II	NO_2^{-1}	nitroso	nitrito
Ag^+	plata	NO_3^{-1}	nítrico	nitrato
Au^+	auroso / oro I	HSO_3^{-1}	--------------	sulfito ácido
Au^{2+}	áurico / oro II	HSO_4^{-1}	--------------	sulfato ácido
Hg^+	mercuroso / mercurio I	ClO^{-1}	hipocloroso	hipoclorito
Hg^{2+}	mercúrico / mercurio III	ClO_2^{-1}	cloroso	clorito
Mg^{2+}	magnesio	ClO_3^{-1}	clórico	clorato
Ca^{2+}	calcio	ClO_4^{-1}	perclórico	perclorato
Sr^{2+}	estroncio	HPO_3^{-2}	--------------	fosfito monoácido
Ba^{2+}	bario	HPO_4^{-2}	--------------	fosfato monoácido
Zn^{2+}	zinc	IO_4^{-1}	peryódico	peryodato
Cd^{2+}	cadmio	MnO_4^{-1}	permanganico	permanganato
Fe^{2+}	ferroso / fierro II	S^{-2}	sulfhídrico	sulfuro
Fe^{3+}	férrico / fierro III	CO_3^{-2}	carbónico	carbonato
Sn^{2+}	estanoso / estaño III	SO_3^{-2}	sulfuroso	sulfito
Sn^{3+}	estánico / estaño III	SO_4^{-2}	sulfúrico	sulfato
Pb^{2+}	plumboso / plomo II	$H_2PO_3^{-1}$	------------	fosfito diácido
Pb^{4+}	plúmbico / plomo IV	$H_2PO_4^{-1}$	------------	fosfato diácido
Ni^{2+}	niqueloso / níquel II	CrO_4^{-2}	crómico	cromato
Ni^{3+}	niquélico / níquel III	$Cr_2O_7^{-2}$	dicrómico	dicromato
As^{2+}	arsénico	CH_3COO^-	acético	acetato
Al^{3+}	aluminio	PO_3^{-3}	fosforoso	fosfito
NH_4^+	amonio	PO_4^{-3}	fosfórico	fosfato
Cr^{2+}	cromo II	BO_3^{-3}	bórico	borato
Cr^{3+}	cromo III	AsO_3^{-2}	arsenioso	arsenito
		AsO_4^{-2}	arsénico	arseniato
		O^{-2}	óxido	óxido
		H^{-1}	hidruro	hidruro
		HCO_3^{-1}	--------------	carbonato ácido (bicarbonato)

Por ejemplo:

$$Mg^{2+} + CH_3COO^- \rightarrow Mg(CH_3COO)_2$$

Ión magnesio + ión acético → acetato de magnesio

Nomenclatura de compuestos inorgánicos

La nomenclatura química es el conjunto de reglas adoptadas para nombrar los compuestos químicos, teniendo por objeto recordar, su composición y su función química principal.

Se manejan dos tipos de nomenclatura: la tradicional y la moderna. Y las dos son utilizadas en los libros de química, además algunos compuestos se siguen nombrando con sus nombres comerciales.

La nomenclatura moderna fue propuesta por la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (I.U.P.A.C.), en un congreso celebrado en los años cincuenta, a esta nomenclatura también se le conoce como Stock.

En general, en la fórmula molecular de un compuesto se coloca a la izquierda el elemento con carga o número de valencia positivo (elemento más electropositivo o menos electronegativo) y a la derecha el contenga el número de valencia negativo (elemento más electronegativo. Y al contario de esto, en nomenclatura se coloca primero el nombre genérico, que es el que designa al elemento de la derecha (elemento más electronegativo), y el nombre específico en segundo lugar, que el que designa al elemento de la izquierda (el menos electronegativo).

Ejemplo:

Na_2O

Óxido de sodio

Los compuestos inorgánicos se pueden clasificar como:

a) Hidruros

El hidrógeno es un elemento anfótero, porque se puede comportar como metal cediendo su electrón o como un no metal aceptando un electrón, en el primer caso su número de oxidación será de +1 y en el segundo de –1, por tal motivo en algunas tablas periódicas aparece tanto a la izquierda como a la derecha de la misma. Cuando el hidrógeno no metálico (H^{-1}) se une a un metal, se forman los hidruros metálicos.

Ejemplos:

LiH, CsH, CaH_2, AlH_3, etc.

Nomenclatura:

- Los metales representativos utilizan números de oxidación fijos y para nombrar a estos hidruros, se escribe la palabra hidruro seguida del nombre del metal representativo correspondiente; en la escritura de la fórmula primero se escribe el símbolo del metal y después el símbolo del hidrógeno.

  Ejemplo: Hidruro de litio (LiH), Hidruro de cesio (CsH), Hidruro de radio (RaH_2), etc.
- Algunos hidruros tienen nombres propios como: BH_3 se conoce como el borano, el SiH_4 es el silano, el CH_4 es el metano, el NH_3 es el amoniaco, el PH_3 es la fosfina y el AsH_3 es la arsina.
- Los metales de transición, se caracterizan por tener más de un número de oxidación. En algunos casos, otros elementos que no son de transición actúan de manera semejante (Sn, Sb, Pb, etc.).
- En la nomenclatura moderna también conocida como Stock, utilizamos la palabra hidruro después de la preposición "de" seguida del nombre del metal de transición y por último se utilizarán números romanos que indican los números de oxidación que emplean los metales de transición.

  Ejemplos:

Nomenclatura tradicional	Nomenclatura moderna Stock	Fórmula
Hidruro cromoso	Hidruro de cromo II	CrH_2
Hidruro crómico	Hidruro de cromo III	CrH_3
Hidruro ferroso	Hidruro de fierro II	FeH_2
Hidruro férrico	Hidruro de fierro III	FeH_3

b) Óxidos

Éstos provienen de la unión de un no metal con el oxígeno, también reciben el nombre de óxidos básicos.

Ejemplos:

metal + oxígeno = óxido metálico $4\ Na + O_2 \rightarrow 2\ Na_2O$ Na_2O

Nomenclatura:

- Cuando el metal trabaja con una sola clase de valencia, para nombrarlo se emplea la palabra óxido de ___ seguida del nombre del metal. *Ejemplo:* óxido de aluminio (Al_2O_3).
- Si el metal puede formar dos óxidos por poseer dos valencias diferentes, el metal lleva la terminación "oso", cuando trabaja con la menor valencia, y la terminación "ico" cuando trabaja con la mayor. *Ejemplo:* óxido cuproso (Cu_2O), cuando el cobre trabaja con valencia de +1; óxido cúprico (CuO), cuando el cobre trabaja con valencia de +2.
- Con la nomenclatura actual estos óxidos se nombran con la palabra óxido seguido de la preposición "de", el nombre del metal y el número romano que indica el número de oxidación empleado.
- También se puede indicar con prefijo la cantidad de átomos de oxígeno presentes en el caso de que el metal de transición use más de dos números de oxidación.

Ejemplos:

Nomenclatura tradicional	Nomenclatura moderna Stock	Nomenclatura por el número de oxígenos	Fórmula
Óxido cromoso	Óxido de cromo II	Monóxido de cromo	CrO
Óxido crómico	Óxido de cromo III	Trióxido de cromo	Cr_2O_3
Óxido ferroso	Óxido de fierro II	Monóxido de fierro	FeO
Óxido férrico	Óxido de fierro III	Trióxido de fierro	Fe_2O_3

c) Peróxidos

Son óxidos en los cuales la proporción de oxígeno es mayor que en los óxidos normales. También es necesaria la unión R—O—O—R.

Ejemplo:

Peróxido de hidrógeno (agua oxigenada) H_2O_2 H—O—O—H

d) Hidróxidos

Compuestos que resultan de la combinación de un óxido en agua.

Ejemplo:

óxido básico + agua = hidróxido $Na_2O + H_2O \rightarrow 2\ NaOH$ $NaOH$

Los hidróxidos son también llamados bases, ya que cuentan con un radical OH^- (radical hidróxido, oxhidrilo o hidroxilo) que es característico de las bases, cuyas propiedades comunes son:

- Sabor amargo.
- Algunas son fuertemente cáusticas.
- Jabonosas al tacto.
- Colorean de azul el papel tornasol rojo, de amarillo al anaranjado de metilo y de rojo a la fenolftaleína (indicadores ácido-base).
- Neutralizan a los ácidos para dar sales.
- Sus soluciones acuosas son electrolíticas (permiten el paso de la corriente eléctrica).
- Son sustancias que producen iones OH^- al disolverse en agua.

Nomenclatura:

- Cuando el metal trabaja con una sola clase de valencia, para nombrarlo se emplea la palabra hidróxido de ___ seguida del nombre del metal. *Ejemplo:* hidróxido de aluminio (Al $(OH)_3$).
- Si el metal puede formar dos hidróxidos por poseer dos valencias diferentes, el metal lleva la terminación "oso", cuando trabaja con la menor valencia, y la terminación "ico" cuando trabaja con la mayor. *Ejemplo*: hidróxido cuproso ($CuOH$), cuando el cobre trabaja con valencia de +1; hidróxido cúprico ($Cu(OH)_2$), cuando el cobre trabaja con valencia de +2.

e) Anhídridos u óxidos no metálicos

Estos anhídridos resultan de la combinación de un no metal con oxígeno.

Ejemplo:

$2\,S + 3\,O_2 \rightarrow 2\,SO_3$ no metal + oxígeno = óxido no metálico SO_3

Los no metales en estos compuestos utilizan números de oxidación positivos, de acuerdo con la siguiente tabla:

GRUPO IV A	GRUPO V A	GRUPO VI A	GRUPO VII A	NOMBRE
			+7	Per**no metál**ico
+4	+5	+6	+5	**No metál**ico
+2	+3	+4	+3	**No metal**oso
			+1	hipo**no metal**oso

Nomenclatura:

- Cuando el no metal trabaja con una sola clase de valencia, para nombrarlo se emplea la palabra anhídrido seguida del nombre del no metal con la terminación "ico". *Ejemplo*: CO_2, anhídrido carbónico.
- Si el no metal puede formar dos anhídridos por poseer dos valencias diferentes, el no metal lleva la terminación "oso", cuando trabaja con la menor valencia, y la terminación "ico" cuando trabaja con la mayor. *Ejemplo*: SO_2, anhídrido sulfuroso (S^{+4}); SO_3, anhídrido sulfúrico (S^{+6}).
- En caso de que el no metal forme más de dos anhídridos, se emplean los prefijos "hipo" para la menor valencia o de menos oxígenos, con la terminación "oso", y "per" para el de mayor valencia o mayor cantidad de oxígenos, con la terminación "ico", dejando para los dos intermedios la forma normal "oso" e "ico". *Ejemplo*: Cl_2O, anhídrido hipocloroso; Cl_2O_3, anhídrido cloroso; Cl_2O_5, anhídrido clórico; Cl_2O_7, anhídrido perclórico.
- También se pueden nombrar contando la cantidad de oxígenos, utilizando prefijos que lo indiquen junto a la palabra óxido.

Ejemplos:

Nombre	Fórmula
Anhídrido carbónico o bióxido de carbono	CO_2
Anhídrido carbonoso o monóxido de carbono	CO
Anhídrido nítrico o trióxido de dinitrógeno	N_2O_3
Anhídrido nitroso o pentóxido de dinitrógeno	N_2O_5
Anhídrido perclórico o heptóxido de dicloro	Cl_2O_7
Anhídrido clórico o pentóxido de dicloro	Cl_2O_5

f) Ácidos

Se caracterizan porque todos contienen en su molécula con H, el cual da las características comunes de todos los ácidos:

- Sabor agrio.
- Colorean de rojo al tornasol azul y al anaranjado de metilo.
- Decoloran a la fenolftaleína.
- Neutralizan las bases para dar sales.
- Son sustancias que en solución acuosa producen cationes H^+.

Los ácidos se dividen en dos categorías:

- **Hidrácidos**: se forman de la unión del hidrógeno con un no metal.

Ejemplo:

hidrógeno + no metal = hidrácido $H_2 + S \rightarrow H_2S$ H_2S

El nombre de los hidrácidos se forma colocando la terminación "hídrico" al no metal. *Ejemplo*: H_2S, hidrácido sulfhídrico.

- **Oxiácidos**: se forman al reaccionar un anhídrido con agua.

Ejemplo:

anhídrido + agua = oxiácido $SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$ H_2SO_4

Nomenclatura:

- Cuando el no metal forma un solo oxiácido, para nombrarlo se emplea la palabra oxiácido seguida del nombre del no metal con la terminación "ico". *Ejemplo*: H_2CO_3, oxiácido carbónico.
- Si el no metal puede formar dos oxiácidos por poseer dos valencias diferentes, el no metal lleva la terminación "oso", cuando trabaja con la menor valencia, y la terminación "ico" cuando trabaja con la mayor. *Ejemplo*: H_2SO_3, oxiácido sulfuroso (S^{+4}); H_2SO_4, oxiácido sulfúrico (S^{+6}).
- En caso de que el no metal forme más de dos oxiácidos, se emplean los prefijos "hipo" para la menor valencia o de menos oxígenos, con la terminación "oso" y "per" para el de mayor valencia o mayor cantidad de oxígenos, con la terminación "ico", dejando para los dos intermedios la forma normal "oso" e "ico". *Ejemplo*: HClO, oxiácido hipocloroso; $HClO_2$, oxiácido cloroso; $HClO_3$, oxiácido clórico; $HClO_4$, oxiácido perclórico.

g) Sales

Son los compuestos que resultan de la combinación de un ácido con una base o hidróxido.

Ejemplos:

- ácido + base = sal + agua — HCl + NaOH → NaCl + H2O — NaCl
- oxiácido + base = oxisal + agua — $H_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O$ — Na_2SO_4
- hidrácido + base = sal binaria + agua — $2\ HF + Ca(OH)_2 \rightarrow CaF_2 + 2\ H_2O$ — CaF_2

Nomenclatura:

El nombre de las oxisales es fácil de formar.

- Si el oxiácido termina en "oso", la sal termina en "ito", seguida del nombre del metal. *Ejemplo*. del HNO_2 oxiácido nitroso, su sal KNO_2 será nitr**ito** de potasio.
- Si el oxiácido termina en "ico", la sal termina en "ato", seguida del nombre del metal. *Ejemplo:* del HNO_3 oxiácido nítrico, su sal será el $NaNO_3$ nitr**ato** de sodio.

Ejemplos:

Nombre	Fórmula
Sulfato de litio	Li_2SO_4
Sulfato niqueloso o sulfato de níquel II	$NiSO_4$
Sulfato niquélico o sulfato de níquel III	$Ni_2(SO_4)_3$
Carbonato de sodio	Na_2CO_3
Sulfito de aluminio	$Al_2(SO_3)_3$
Hipoclorito cromoso o hipoclorito de cromo II	$Cr(ClO)_2$
Hipoclorito crómico o hipoclorito de cromo III	$Cr(ClO)_3$

El nombre de las sales binarias o haloideas, se forma:

Para los hidrácidos la terminación es "hídrico", en la sal el no metal cambiará a la terminación "uro", seguida del nombre del metal. *Ejemplo:* del HCl hidrácido clorhídrico, su sal será el AgCl clor**uro** de plata.

Ejemplos:

Nombre	Fórmula
Cloruro de rubidio	$RbCl$
Bromuro de magnesio	$MgBr_2$
Yoduro de aluminio	AlI_3
Fluoruro áurico o fluoruro de oro III	AuF_3
Fluoruro auroso o fluoruro de oro I	AuF

h) Sales ácidas

Éstas se forman por la sustitución parcial de los hidrógenos del ácido por un metal.

Ejemplo: $NaHCO_3$ (bicarbonato de sodio o carbonato ácido de sodio).

Al escribir las fórmulas de las sales ácidas hay que considerar los números de oxidación de los metales y de los radicales terciarios ácidos, por ejemplo, para la sal ácida formada por el sodio y el radical sulfato o bisulfato, escribimos primero el símbolo del sodio, seguido del radical ácido: $NaHSO_4$.

Para nombrarla se utiliza el nombre del radical ácido y después el nombre del metal, para un metal de transición, este terminará en "oso" cuando use su menor número de oxidación y en "ico" cuando use el mayor número de oxidación.

Ejemplos:

Nombre	Fórmula
Sulfato ácido de sodio o bisulfato de sodio	$NaHSO_4$
Sulfato ácido ferroso o bisulfato ferroso o Sulfato ácido de fierro II o bisulfato de fierro II	$Fe(HSO_4)_2$
Sulfato ácido férrico o bisulfato férrico o Sulfato ácido de fierro III o bisulfato de fierro III	$Fe(HSO_4)_3$

i) Sales básicas

Son aquéllas en las que los oxhidrilos (OH^{-1}), no han sido reemplazados en su totalidad por radicales ácidos.

Ejemplos:

Nombre	Fórmula
Sulfato monobásico de aluminio	$Al\,(OH)\,SO_4$
Nitrato dibásico de bismuto	$Bi(OH)_2NO_3$

Ejercicios

Ejercicio 3. Elige la respuesta correcta:

1. El número de oxidación del oxígeno en H_2O_2 es:
   a) –2.
   b) –1.
   c) +2.
   d) +1.

2. Relaciona las columnas:

Compuesto	Función
1. CaF_2	A. Oxiácido
2. $Al(OH)_3$	B. Sal ácida
3. $NaHCO_3$	C. Hidrácido
4. H_3PO_4	D. Sal
5. Li_2O	E. Anhídrido
6. HF	F. Hidróxido
7. SO_3	G. Óxido

   a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E, 6F, 7G
   b) 1G, 2A, 3F, 4B, 5D, 6E, 7C
   c) 1D, 2F, 3B, 4A, 5G, 6C, 7E
   d) 1C, 2E, 3D, 4G, 5B, 6A, 7D

3. El número de oxidación del fierro en $FeSO_4$ es:
   a) +1
   b) +2
   c) +3
   d) +4

4. En el deportivo, para desinfectar las albercas y hacer que el agua se vea más clara, se utiliza una sustancia llamada, hipoclorito de calcio ($Ca(ClO)_2$), este compuesto pertenece al grupo de:
   a) los óxidos
   b) las oxisales
   c) los hidróxidos
   d) los oxiácidos

5. Tipo de óxido formado por el oxígeno y un elemento metálico.
   a) básico
   b) ácido
   c) neutro
   d) anhídrido

6. ¿Cuál de las siguientes opciones indica la carga del cloro (Cl) en el compuesto $KClO_4$, si la carga del potasio es +1 ya que este elemento esta en el grupo IA; y la de el oxigeno es –2 y está en el grupo 6 (VI A)?
   a) –9
   b) –7
   c) +5
   d) +7

4 Reacciones y ecuaciones químicas, balanceo

Propósito: el alumno identificará las partes de una reacción, sus tipos y la forma de balancearlas por los métodos de tanteo y óxido-reducción.

Reacciones químicas

Las reacciones químicas son las transformaciones de la materia que producen cambios en una sustancia para obtener otras diferentes.

En estas transformaciones, se parte de sustancias en el estado inicial, llamadas reactivos, y se obtienen otras diferentes en el estado final, llamadas productos.

Para que la reacción química tenga lugar es necesario que las sustancias iniciales se encuentren en condiciones favorables.

Las reacciones se representan mediante ecuaciones químicas. Una ecuación química es una descripción simbólica de una reacción química real. Muestra las sustancias que reaccionan (reactivos ó reactantes) y las sustancias o productos que se obtienen. También nos indican las cantidades relativas de las sustancias que intervienen en la reacción.

En una ecuación química hay dos términos que se utilizan para describir lo que sucede en una reacción química en sus estados inicial y final. En el primero, a la izquierda, son los símbolos o fórmulas de los reactantes, reaccionantes o reactivos separados por un signo de más y en el segundo, a la derecha, los símbolos o fórmulas de los productos y con signos más (+) entre ellos. Para separar ambos miembros se utiliza una flecha que generalmente se dirige hacia la derecha indicando el sentido de la reacción.

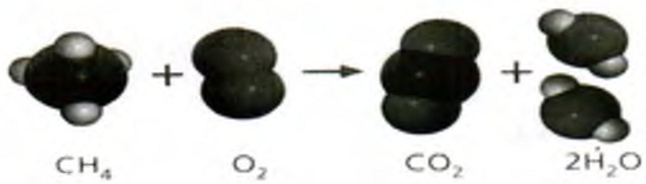
$$\text{Reactivo 1} + \text{Reactivo 2} \rightarrow \text{Productos}$$

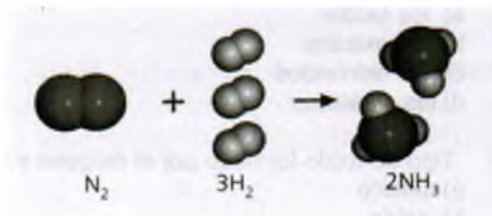
$$\mathbf{A + B \rightarrow C + D}$$

reactivos productos

Reactivos: son las sustancias que reaccionan. Están colocadas antes de la flecha.
Productos: son las sustancias que se forman. Están colocadas después de la flecha.

Las reacciones químicas también pueden ser representadas mediante modelos moleculares, dibujando las moléculas que intervienen en la reacción.





Los símbolos auxiliares o convenciones se utilizan para que una ecuación química represente lo más exactamente posible una reacción, el sentido y las condiciones en que se realiza. Entre estos se encuentran los siguientes:

Convención o símbolo	Significado
G o g	Gas
L o l	Líquido
S o s	Sólido.
ac o aq	Solución acuosa.
E	Energía.
$\xrightarrow{\Delta}$	La reacción sólo se realizará si se le suministra calor
Hv	Energía de radiación electromagnética.
$\uparrow$	Gas que se desprende.
$\downarrow$	Sólido que se precipita.
$\rightarrow$	Reacción en un sólo sentido (Irreversible)
$\leftrightarrow$	Reacción en ambos sentidos (reversible), la reacción puede realizarse de izquierda a derecha y viceversa, es decir los productos pueden regresar a su estado original.

El número de átomos de cada elemento en los reactivos debe ser igual al que existe en los productos (balanceo).

a) Clasificación

Pretender hacer una clasificación de las reacciones químicas es algo muy difícil dada la complejidad que éstas tienen. La clasificación más sencilla que podemos encontrar es la siguiente:

Reacciones de descomposición o análisis: en las cuales un solo cuerpo da lugar a dos o más sustancias diferentes.

Ejemplo: la descomposición térmica del óxido de mercurio.

$$2\,HgO \xrightarrow{\Delta} 2\,Hg + O_2$$

Reacciones de síntesis o unión: dos o más cuerpos se unen para formar una sola sustancia.

Ejemplo: la combustión del carbón en el aire.

$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$

Reacciones de desplazamiento o de sustitución simple: aquéllas en las cuales un elemento reemplaza a otro en el seno del compuesto.

Ejemplo: al reaccionar el sodio en agua para formar el hidróxido de sodio, el sodio reemplaza al hidrógeno del agua.

$$2\,Na + 2\,H_2O \rightarrow 2\,NaOH + H_2$$

Reacciones de sustitución doble o metátesis: se caracterizan por efectuarse en ellas un intercambio de elementos en los compuestos que reaccionan.

Ejemplo: en la reacción del cloruro de sodio y el nitrato de plata, el sodio reemplaza a la plata y ésta entra en el lugar del sodio, formando cloruro de plata y nitrato de sodio.

$$NaCl + AgNO_3 \rightarrow AgCl + NaNO_3$$

Reacciones de transferencia de electrones o redox: aquí se lleva a cabo una oxidación y una reducción cuando al pasar un elemento de un miembro a otro, cambia su valencia.

La **oxidación** consiste en un aumento de valencia por pérdida de electrones.

La **reducción** al contrario, disminuye la valencia por ganancia de electrones.

Agente reductor

→ Oxidación →

-3	-2	-1	0	+1	+2	+3

← Reducción ←

Agente oxidante

Ejemplo: en la síntesis para formar el dióxido de azufre, a partir de azufre y oxígeno, observamos una reacción de óxido-reducción.

$$S^0 + O_2^{\,0} \rightarrow S^{+4}O_2^{\,-2}$$

Para identificar una reacción de óxido-reducción (redox), es necesario verificar si existe un cambio en los estados de oxidación de las especies involucradas en la reacción.

En una reacción redox, se deben identificar las especies que intercambian su número de oxidación, es decir, quien se oxida (agente reductor) o se reduce (agente oxidante).

Concepto	Número de oxidación	Electrones
Oxida Agente reductor	Aumenta	Pierde
Reduce Agente Oxidante	Disminuye	Gana

Reacciones iónicas: todos los electrolitos al disolverse en agua, dan lugar a ecuaciones iónicas. Si hacemos reaccionar dos electrolitos, cada uno se descompone en sus iones y serán ellos los que reaccionen y den los nuevos productos. La ecuación o reacción iónica indicará los iones que reaccionan y los productos obtenidos.

Ejemplo: si hacemos reaccionar una solución de ácido clorhídrico con una solución de nitrato argéntico, se forman los iones: H^+, Cl^-, Ag^+, NO_3^-, la ecuación iónica será:

$$Ag^+ + Cl^- \rightarrow AgCl\downarrow$$

Los demás iones no aparecen porque quedan libres dentro de la solución, depositándose únicamente el AgCl.

Reacciones de neutralización: en éstas reaccionan un ácido y una base para obtener como resultado una sal cuyo pH es neutro y agua.

Ejemplo: al reaccionar el ácido clorhídrico con el hidróxido de sodio, obtenemos el cloruro de sodio y agua.

$$HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$$

Reacciones reversibles: son aquéllas que pueden efectuarse en un sentido o en otro, es decir, los reactivos pueden ser productos y los productos reactivos.

Ejemplo: la descomposición electrolítica del agua y a altas temperaturas.

$$2\,H_2O \leftrightarrow 2\,H_2 + O_2$$

Reacciones exotérmicas: cuando hay desprendimiento de calor durante la reacción química.

Ejemplos: La combustión o al unir hidróxido de sodio junto con azul de metileno y ácido acético igualmente ligado con azul de metileno. Al ir uniendo poco a poco la dos disoluciones irá creándose una especie de humo y poco a poco el vaso de precipitados se va poniendo algo caliente.



Reacciones endotérmicas: cuando hay absorción de calor para que se lleve a cabo la reacción.

Ejemplo: Reacción entre el cloruro de cobalto y el cloruro de tionilo, el agua de la cristalización del cloruro de cobalto reacciona con el cloruro de tionilo y produce ácido clorhídrico y dióxido de azufre. La reacción ocurre espontáneamente dada la gran cantidad de productos generadores de gas y por lo tanto el desorden del sistema se incrementa.



Balanceo por tanteo

En una ecuación o reacción química ha de haber el mismo número de átomos del mismo elemento en ambos lados, según la ley de Lavoisier que dice: "*En toda reacción química el peso de un compuesto es igual al peso de todos sus componentes*".

La operación por la cual se buscan coeficientes necesarios en la ecuación se llama **Balanceo de Ecuación**.

Para el balanceo por tanteo, se deben colocar coeficientes de tal forma que, se obtengan la misma cantidad de elementos en reactivos y productos.

Para facilitar el balanceo por tanteo se recomienda acomodar y balancear primero a los metales, enseguida a los no metales y al final el hidrógeno y el oxígeno.

Ejemplo 1:

$$H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$$

Se obtiene la cantidad de elementos tanto de reactivos como de productos.

2 – H – 2
2 – O – 1

El oxígeno no está balanceado, por lo tanto se busca un coeficiente que pueda igualar la reacción.

$$H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

Se verifica si la reacción está balanceada.

2 – H – 4
2 – O – 2

Ahora el hidrógeno es el que necesita igualarse, nuevamente se coloca un coeficiente.

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

Se verifica si la reacción está balanceada.

4 – H – 4
2 – O – 2

La ecuación está balanceada.

Ejemplo 2:

$$H_2O + K \rightarrow KOH + H_2$$

Se obtiene la cantidad de elementos tanto de reactivos como de productos.

1 – K – 1
2 – H – 3
1 – O – 1

El hidrógeno no está balanceado, por lo tanto se busca un coeficiente que pueda igualar la reacción.

$$2H_2O + K \rightarrow 2KOH + H_2$$

Se verifica si la reacción está balanceada.

1 – K – 2
4 – H – 4
1 – O – 1

Ahora el potasio es el que necesita igualarse, nuevamente se coloca un coeficiente.

$$2H_2O + 2K \rightarrow 2KOH + H_2$$

Se verifica si la reacción está balanceada.

2 – K – 2
4 – H – 4
1 – O – 1

La ecuación está balanceada.

Balanceo por óxido reducción

Se puede aplicar únicamente a reacciones en las cuales hay elementos que cambian de número de oxidación, al pasar de un miembro a otro, o sea, que se oxidan o que se reducen.

Al utilizar este método se seguirán los siguientes pasos:

Paso 1. Se coloca encima de cada elemento su número de oxidación:

$$\overset{+1}{K}\overset{+5}{Cl}\overset{-2}{O_3} \rightarrow \overset{+1}{K}\overset{-1}{Cl} + \overset{0}{O_2}$$

Para colocar el número de oxidación se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Todo elemento que está solo tiene número de oxidación 0.
- El oxígeno se considerará siempre con número de oxidación de –2 y en los peróxidos con –1.
- El hidrógeno con número de oxidación de +1 y el los hidruros con –1.
- Un elemento que reemplaza al hidrógeno tiene número de oxidación de +1.

Paso 2. Se dejan los números de oxidación de los elementos que se han oxidado y reducido, eliminado las demás:

$$K\overset{+5}{Cl}\overset{-2}{O_3} \rightarrow K\overset{-1}{Cl} + \overset{0}{O_2}$$

Paso 3. Se escoge uno de los miembros para trabajar. Este debe cumplir las condiciones siguientes:

- Tener dos elementos con valencia cambiadas.
- Que estos elementos estén en compuestos diferentes.

En caso de que ninguno de los dos miembros tenga estas condiciones no conviene emplear este método.

En el caso presente, tomaremos al segundo miembro que tiene a los elementos oxidados y reducidos, subrayándolos.

$$K\overset{+5}{Cl}\overset{-2}{O_3} \rightarrow \underline{K\overset{-1}{Cl}} + \underline{\overset{0}{O_2}}$$

$$\overset{+5}{Cl} \xrightarrow{+6 \text{ electrones}} \overset{-1}{Cl}$$

$$\overset{-2}{O} \xrightarrow{-2 \text{ electrones}} \overset{0}{O}$$

Paso 4. Se pone debajo de cada compuesto subrayado, el número de electrones ganados o perdidos, multiplicados por el índice del elemento en cuestión:

$$KClO_3 \rightarrow \underset{6}{\underline{KCl}} + \underset{4}{\underline{O_2}}$$

El Cl pasa de +5 a –1; se oxida perdiendo 6 electrones.

El O pasa de –2 a 0; se reduce ganando 4 electrones en total porque gana dos electrones por cada átomo de oxígeno, es decir 2 x 2 = 4.

Paso 5. Se simplifica si es posible dividiendo entre una misma cantidad.

$$KClO_3 \rightarrow \underset{3}{\underline{KCl}} + \underset{2}{\underline{O_2}}$$

Paso 6. Se coloca cada número que está debajo de cada compuesto como coeficiente del contrario.

$$KClO_3 \rightarrow 2KCl + 3O_2$$

Paso 7. Se termina el balanceo por la Ley de Lavoisier, tomando en particular cada elemento y arreglando para que tenga el mismo número de átomos en cada miembro; se recomienda comenzar por los elementos que estén repetidos en la ecuación.

$$2KClO_3 \rightarrow 2KCl + 3O_2$$

Otros ejemplos:

1. $\overset{0}{Al} + \overset{+1}{Na}\overset{-2}{O}\overset{+1}{H} \rightarrow \overset{+1}{Na_3}\overset{+3}{Al}\overset{-2}{O_3} + \overset{0}{H_2}$
2. $\overset{0}{Al} + \overset{+1}{Na}OH \rightarrow Na_3\overset{+3}{Al}O_3 + \overset{0}{H_2}$
3. $Al + NaOH \rightarrow \underline{Na_3AlO_3} + \underline{H_2}$

   $\overset{0}{Al} \xrightarrow{-3\ electrones} \overset{+3}{Al}$

   $\overset{+1}{H} \xrightarrow{+1\ electrón} \overset{0}{H}$
4. $Al + NaOH \rightarrow \underset{3}{\underline{Na_3AlO_3}} + \underset{1 \times 2}{\underline{H_2}}$
5. ....
6. $Al + NaOH \rightarrow 2Na_3AlO_3 + 3H_2$
7. $2Al + 6NaOH \rightarrow 2Na_3AlO_3 + 3H_2$

1. $\overset{+1}{H}\overset{-1}{I} + \overset{+1}{H}\overset{+5}{I}\overset{-2}{O_3} \rightarrow \overset{0}{I_2} + \overset{+1}{H_2}\overset{-2}{O}$
2. $H\overset{-1}{I} + H\overset{+5}{I}O_3 \rightarrow \overset{0}{I_2} + H_2O$
3. $\underline{H\overset{-1}{I}} + \underline{H\overset{+5}{I}O_3} \rightarrow \overset{0}{I_2} + H_2O$

   $\overset{-1}{I} \xrightarrow{-1\ electrones} \overset{0}{I}$

   $\overset{+5}{I} \xrightarrow{+5\ electrones} \overset{0}{I}$
4. $\underset{1}{\underline{HI}} + \underset{5}{\underline{HIO_3}} \rightarrow I_2 + H_2O$
5. ....
6. $5HI + HIO_3 \rightarrow I_2 + H_2O$
7. $5HI + HIO_3 \rightarrow 3\ I_2 + H_2O$

Ejercicios

Ejercicio 4. Elige la respuesta correcta:

1. La expresión 2 $Ca_3(PO_4)_2$, indica que hay:
   a) 6 átomos de calcio y 2 radicales fosfito
   b) 3 átomos de calcio, 2 átomos de fósforo y 8 átomos de oxígeno
   c) 6 átomos de calcio, 4 átomos de fósforo y 16 átomos de oxígeno
   d) 3 átomos de calcio, 1 átomo de fósforo y 4 átomos de oxígeno

2. El agente oxidante siempre es aquél que:
   a) pierde electrones
   b) gana protones
   c) gana electrones
   d) está del lado de los reactivos

3. La reducción es la_______ de electrones.
   a) ganancia
   b) pérdida
   c) transferencia
   d) comparación

4. Para que una reacción sea de tipo REDOX es necesario:
   a) que el oxígeno participe
   b) que algún elemento comparta electrones
   c) que una especie química ceda electrones y otra los acepte
   d) que todas las especies químicas cedan electrones

5. Identifica una reacción que no es de óxido-reducción entre las siguientes:
   a) $5\ HI + HIO_3 \rightarrow 3\ I_2 + 3\ H_2O$
   b) $SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$
   c) $2\ Al + 6\ NaOH \rightarrow 2\ Na_3AlO_3 + 3\ H_2$
   d) $2\ KClO_3 \rightarrow 2\ KCl + 3\ O_2$

6. Los coeficientes que balancean a la siguiente reacción son respectivamente:

   $$___\ KMnO_4 + ___\ HCl \rightarrow ___\ Cl_2 + ___\ KCl + ___\ MnCl_2 + ___\ H_2O$$

   a) 2, 8 → 5, 2, 2, 16
   b) 2, 16 → 5, 2, 2, 8
   c) 1, 8 → 5, 2, 2, 4
   d) 1, 16 → 5, 1, 1, 8

7. En la siguiente reacción química indica cuál de los elementos actúa como agente reductor:

   $$Cu + 2\ AgNO_3 \rightarrow Cu\ (NO_3)_2 + 2\ Ag$$

   a) Cu
   b) Ag
   c) N
   d) O

5 Enlace químico

Propósito: el alumno distinguirá los diferentes enlaces químicos por sus propiedades y la forma de representarlos por medio de las estructuras de Lewis.

Estructuras de Lewis

Éstas son un diagrama, donde el símbolo del átomo es rodeado por puntos, aspas o círculos que correspondan al número de electrones de valencia del elemento.

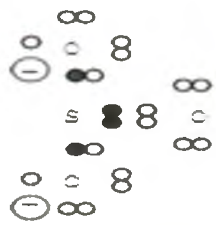
Los símbolos de puntos de Lewis muestran los electrones de valencia que tiene un átomo de un elemento dado.

Ejemplos:



Estructura de Lewis para el enlace iónico

En la figura se muestra un ejemplo de enlace iónico representado por la estructura de Lewis, en este caso el cloro presenta siete electrones en su capa externa, le falta un electrón para tener una estructura electrónica como la del gas noble argón. El sodio le faltan siete electrones para tener en la capa externa ocho (como el argón) o le sobra uno para quedar con los ocho de la capa anterior (como el neón). Por esta razón, el sodio le cede el electrón sobrante al cloro para que ambos queden con ocho electrones en su capa exterior, manteniéndose unidos por un enlace iónico al atraerse los iones de distintas cargas que se forman.



Estructura de Lewis para el enlace covalente polar del SO_3 (anhídrido sulfúrico)



Estructura de Lewis para el enlace covalente no polar

Como se observa en la figura, cada átomo de Cl (cloro) se rodea de siete puntos que son los electrones de valencia, es decir, los electrones de la capa externa. Al unirse los átomos se ve que cumplan con la regla del octeto, rodeados por ocho puntos que representan los electrones. En este caso, cada enlace lo forman dos electrones, formándose un enlace sencillo de tipo covalente no polar.



Estructura de Lewis para el enlace covalente

En esta estructura de Lewis se aprecia como el átomo de azufre comparte totalmente sus electrones de valencia para formar un par de electrones que comparten tanto el azufre como el oxígeno.

Enlaces

Fuerza que mantiene juntos a dos grupos de dos o más átomos y hacen que funcionen como una unidad.

Las sustancias en la naturaleza se mantienen unidas a través de fuerza de atracción entre los iones o átomos formando las respectivas moléculas o cristales; tal fuerza se denomina enlace químico y fundamentalmente tal fuerza es de naturaleza eléctrica, los cuales son responsables en gran medida de las propiedades físicas y químicas de dichas sustancias o compuestos.

Los enlaces son también responsables de la atracción que ejerce una sustancia sobre otra; por ejemplo la sal se disuelve mejor en agua que en aceite, debido a las diferencias en los enlaces y otras muchas propiedades.

Un **compuesto**, como ya se había mencionado, es toda sustancia formada por átomos de distinto tipo, generalmente pura, donde dichos átomos se encuentran enlazados en una combinación química en proporción fija y constante entre los elementos que lo conforman, los cuales han perdido sus propiedades originales y han adquirido nuevas propiedades del compuesto que han producido.

Una **molécula**, es la parte más pequeña que se puede encontrar de un compuesto, que aún conserva sus propiedades y está formada por átomos y se representa con fórmulas químicas. Eléctricamente neutra que se comporta como una sola partícula; a una sustancia compuesta de moléculas se le llama sustancia molecular.

Los coeficientes antes de una fórmula química indican la cantidad de moles (moléculas) de un compuesto, y los subíndices de una fórmula química indican la cantidad de átomos presentes en dicha fórmula.

a) Clasificación de los diferentes tipos de enlaces químicos

- Enlace iónico, electrovalente o salino.
- Enlace covalente: polar, no polar o puro, coordinado y múltiple.
- Enlace por puente de hidrógeno.
- Enlace metálico.
- Enlace por fuerzas de Van der Waals.

Enlace Iónico

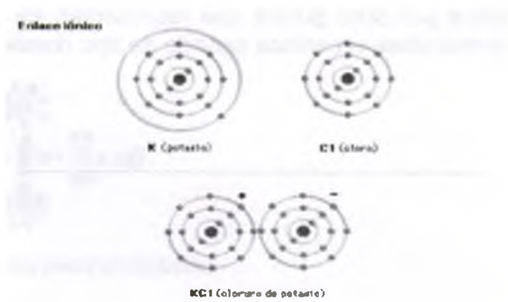
Se forma al unir un metal con un no metal, donde el metal transfiere sus electrones al no metal. Se forman compuestos con las siguientes características:

- Sólidos cristalinos, duros o frágiles.
- Solubles en agua, en solución conducen la electricidad y el calor.
- Si son insolubles pero fusionables, conducen la electricidad.
- Insolubles en solventes orgánicos solubles en compuestos polares.
- Los puntos de fusión y de ebullición son elevados.
- Son inflamables, en solución son químicamente activos
- Fuerzas de enlace altas así como las fuerzas intermoleculares.

Ejemplo: Sales (NaCl, BaS), óxidos metálicos, carbonatos y bicarbonatos.







Enlace covalente

Se realiza entre no metales, compartiendo electrones. Los compuestos covalentes tienen las siguientes características:

- Se encuentran en los tres estados de agregación, únicamente serán gaseosos cuando el enlace es de tipo no polar.
- Son insolubles en agua, la solución acuosa cuando algunos son solubles no permite la conducción de la electricidad.
- Casi todos son combustibles.
- Puntos de fusión intermedios y variables para los compuestos polares, para los no polares son muy bajos.
- Incluye prácticamente todos los compuestos orgánicos.
- Fuerzas de enlace e intermoleculares intermedias cuando el enlace es polar y muy bajas cuando el enlace es no polar.

Ejemplo: agua, alcoholes, azúcares, grasas, aceites, perfumes, la mayor parte de las drogas y colorantes.

a) Polaridad

Una molécula polar o dipolo es aquélla donde la distribución de la carga eléctrica que presenta no es uniforme y por lo cual una región de la misma manifiesta carga negativa, mientras la otra presenta carga positiva, esta molécula puede presentar enlace covalente polar o no polar.

Ejemplo: H_2O, HCl, NaCl.

La molécula no polar es aquélla donde la distribución de la carga eléctrica es uniforme y por tanto, no hay formación de polos.

Ejemplo: CCl_4, Cl_2, I_2.

Se debe considerar en la polaridad de una molécula: la forma espacial de la molécula y el tipo de enlace entre átomo y átomo.

b) Enlace covalente polar (Heteropolar)

Es realizado entre elementos no metálicos diferentes en el cual los electrones se comparten de manera desigual entre átomos con distintas electronegatividades. Son solubles en agua, tienen gran actividad química, solubles en solventes polares, sus puntos de fusión y de ebullición son bajos, pero más altos que las sustancias no polares y conducen la electricidad.

Ejemplo: agua (H_2O), ácido clorhídrico (HCl), anhídrido sulfuroso (SO_2), etc.

c) Enlace covalente no polar (Homopolar)

Se realiza entre elementos no metálicos idénticos compartiendo electrones. Sus compuestos no son solubles en agua, su actividad química es media, forman moléculas verdaderas y diatómicas, no son conductores del calor y la electricidad y no forman estructuras cristalinas.

Ejemplo: F_2, Br_2, I_2, Cl_2, etc.



Enlace covalente polar - HCl

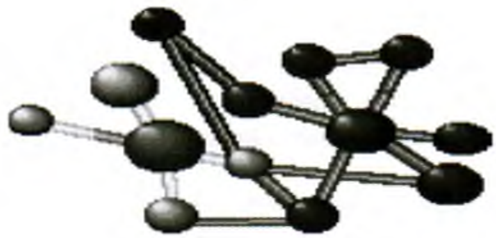


Enlace covalente apolar - H_2

d) Enlace covalente coordinado o dativo

Es la unión entre dos átomos mediante un par de electrones cedidos por uno solo de los átomos y compartidos por los dos. No existe una diferencia real entre el enlace covalente y el covalente coordinado, más bien es una manera diferente de visualizar su formación.

Ejemplo: ácido sulfúrico (H_2SO_4), cloruro de amonio (NH_4Cl).



e) Enlaces covalentes múltiples

Cuando se presenta una simple covalencia entre dos átomos es por compartir un par de electrones, pero si son dos pares de electrones los que se comparte, entonces será una doble covalencia y se puede presentar hasta una triple covalencia.

Ejemplo:

Metano H – C – H (con H unido al C por debajo) Etileno $H_2C = CH_2$ Acetileno $HC \equiv CH$

Donde: – es una simple covalencia (enlace simple)

= es una doble covalencia (doble enlace)

≡ es una triple covalencia (triple enlace)

Enlace por puente de hidrógeno

Se trata de la atracción electrostática entre el protón combinado y el otro átomo de gran electronegatividad y volumen pequeño. El hidrógeno da lugar a enlaces covalentes de alta polaridad, implicando que cuando dos moléculas de éstas interactúan lo hacen de manera selectiva, colocándose las cargas parciales de una molécula opuesta a las otras.

H – F ······ H – F ······ H – F

Donde la línea punteada representa la interacción, denominada enlace por puente de hidrógeno. Este tipo de enlace proporciona características espectaculares, por ejemplo, al tratar de separar las moléculas (como en la evaporación) hay que proporcionar más energía, y la transición ocurre a temperaturas más elevadas que cuando no se presenta este tipo de enlace.

Las sustancias con este tipo de enlace tienen puntos de fusión y de ebullición elevados, son líquidos de alto poder de disociación de los cristales iónicos.

Ejemplo: agua (H_2O), ácido fluorhídrico (HF), metanol (CH_3OH), ácido desoxirribonucleico (ADN).

Enlace metálico

Éste se presenta en los metales y aleaciones al constituir cristales metálicos. Se forma una red cristalina de iones metálicos (elementos muy electropositivos) y en ella los electrones de valencia se intercambian rápidamente. Se acepta actualmente que en los metales el enlace no es entre átomo, sino más bien entre cationes metálicos y lo que fueron sus electrones, donde el compartimento de electrones ocurre entre todos los núcleos metálicos, que poseen valores iguales de electronegatividad.

El hecho de que los electrones estén deslocalizados explica por qué estos elementos son buenos conductores de calor y la electricidad, ya que ambos fenómenos están asociados al libre movimiento de los electrones.

Cuando un pedazo de metal se somete a presión externa, los cationes metálicos pueden "resbalar" unos sobre otros, debido a la capa de electrones que los separa; deformándose pero no rompiéndose, con lo cual se explica la maleabilidad y la ductilidad.

Prácticamente todos los átomos metálicos se agrupan en diferentes estructuras metálicas. Se presenta la celda unitaria.

Presentan puntos de fusión y ebullición generalmente elevados, brillo metálico, tenacidad, dureza, maleabilidad (laminados, estiraje, doblado), ductilidad (hilos, alambres), alta conductividad térmica y eléctrica.

Ejemplo: Na, Au, Cu-Zn, aleaciones metálicas como bronce y latón.

Enlace por fuerzas de Van der Waals

En átomos o moléculas simétricas, la distribución de los electrones alrededor del núcleo o núcleos es homogénea. Sin embargo, esta homogeneidad es únicamente temporal, ya que los electrones no están quietos en un determinado lugar y además los núcleos vibran. Estos movimientos generan en un momento dado, la aparición de zonas con un exceso de carga negativa y otras con un defecto, o sea, la presencia de dipolos instantáneos.

Estos dipolos hacen que una molécula simétrica distorsione también la distribución de las cargas eléctricas en las moléculas vecinas. Gracias a las fuerzas de Van der Waals, especies cuyos átomos o moléculas interactúan débilmente entre sí (como es el caso de los gases nobles, el O_2 y el N_2) pueden reunirse y condensarse como líquidos, aunque ello ocurra a temperaturas muy por debajo de 0°C.

Debido a su origen las fuerzas de Van der Waals, aumentan generalmente con el número de electrones presentes y con su movilidad.

Tipos de enlaces de acuerdo con la diferencia de electronegatividades

Se puede obtener el tipo de enlace de los compuestos a través de la escala de electronegatividades de Pauli:

$$\textbf{Tipo de enlace} = \left\{\begin{array}{c}\text{Electronegatividad del elemento}\\ \text{más electronegativo}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Electronegatividad del elemento}\\ \text{menos electronegativo}\end{array}\right\}$$

Por tanto,

- **Es un enlace iónico** sí la diferencia es **mayor de 1.7.**
- Una diferencia **entre 0.4 y 1.7 es un enlace covalente polar.**
- Si **hay poca diferencia es un enlace covalente no polar de 0 a 0.3.**

Ejercicios

Ejercicio 5. Elige la respuesta correcta:

1. ¿En cuál de las siguientes opciones no hay compuestos iónicos?
   a) H_2O, CCl_4
   b) NaCl, H_2O
   c) CO_2, benceno
   d) NaCl, alcohol

2. La unión entre dos átomos que recibe el nombre de enlace iónico o electrovalente, se define como:
   a) la transferencia de uno o más electrones de un átomo al otro
   b) un par de electrones compartidos entre los dos átomos
   c) una nube electrónica alrededor de los átomos
   d) un puente entre moléculas polares

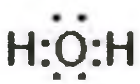
3. El tipo de enlace que presentan los átomos que constituyen a la molécula del agua es:
   a) iónico
   b) covalente polar
   c) covalente no polar
   d) covalente coordinado

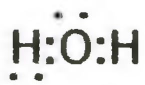
4. Un enlace químico…
   a) siempre es covalente
   b) solamente ocurre entre dos átomos iguales
   c) se da entre iones con cargas del mismo signo
   d) se establece con los electrones de valencia de los átomos

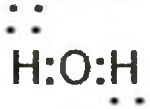
5. ¿Qué tipo de enlace debe tener el compuesto que disolverá Martha en agua para obtener una solución que conduzca la electricidad?
   a) Coordinado
   b) Covalente
   c) Metálico
   d) Iónico

6. El agua (H_2O) tiene un enlace covalente en su molécula. ¿Cuál es la estructura de Lewis que representa correctamente ese enlace?

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

Química del carbono 6

Propósito: el alumno conocerá el campo de estudio de la Química del carbono, las características y propiedades de los hidrocarburos y otras funciones orgánicas y las reacciones que se realizan en ellas.

Compuestos orgánicos

La Química Orgánica es una rama de la Química en la que se estudia el carbono, sus compuestos y reacciones. Existe una amplia gama de sustancias (medicamentos, vitaminas, plásticos, fibras sintéticas y naturales, hidratos de carbono, proteínas y grasas) formadas por moléculas orgánicas. Esta rama de la química ha afectado profundamente a la vida en el siglo XX perfeccionando los materiales naturales y sintetizando sustancias naturales y artificiales que, a su vez, han mejorado la salud, aumentando el bienestar y favorecido la utilidad de casi todos los productos empleados en la actualidad.

La aparición de la química orgánica se asocia a menudo al descubrimiento, en 1828, por el químico alemán Friedrich Wöhler, que afirmó que la sustancia inorgánica cianato de amonio podía convertirse en urea ($CO(NH_2)_2$), una sustancia orgánica que se encuentra en la orina de muchos animales. Antes de este descubrimiento, los químicos creían que para sintetizar sustancias orgánicas, era necesaria la intervención de lo que llamaban "la fuerza vital", es decir, los organismos vivos. El experimento de Wöhler rompió la barrera entre sustancias orgánicas e inorgánicas. Los químicos modernos consideran compuestos orgánicos a aquéllos que contienen carbono y otros elementos (que pueden ser uno o más), siendo los más comunes: hidrógeno, oxígeno, nitrógeno, azufre y los halógenos. Por ello, en la actualidad, la química orgánica tiende a denominarse química del carbono.

a) El carbono, estructura tetraédrica

El átomo de carbono es el constituyente de los compuestos orgánicos, se localiza en el grupo IV A, 2° periodo de la tabla periódica, número atómico 6, masa atómica 12 uma, su configuración en el estado basal es:

$$^{12}C_6 \qquad 1s^2 2s^2 2p^2 \qquad \underset{1s}{\uparrow\downarrow}\ \underset{2s}{\uparrow\downarrow}\ \underset{2p_x}{\uparrow}\ \underset{2p_y}{\uparrow}\ \underset{2p_z}{}$$

Sus números de oxidación son +4, -2, -4. Si el carbono mantuviera esta configuración se podrían formar sólo compuestos divalentes, pero no explica la formación de los compuestos orgánicos donde el carbono es tetravalente.

La formación de los cuatro enlaces covalentes se explica con los siguientes conceptos.

- La promoción de electrones apareados a orbitales vacíos.
- La hibridación de orbitales.

El carbono es un elemento representativo y es el único que sufre los tres tipos de hibridación que hay sp^3, sp^2, sp; originando así la simple, doble y triple covalencia respectivamente.

Hibridación

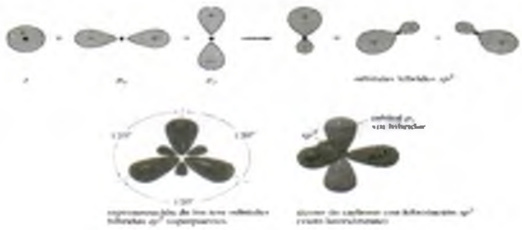
El orbital híbrido es aquel orbital que perteneciendo a un nivel de energía tiene la capacidad de mezclarse con otro cuando uno de sus electrones describe una órbita tanto dentro del campo perteneciente a un orbital como a otro orbital. La hibridación de orbitales da como resultado, orbitales de enlace que son combinación lineal de sus componentes. Los orbitales híbridos más generalizados son los siguientes: ***sp, sp²***, ***sp³*** y ***spd***. Los orbitales moleculares, que representan la distribución espacial de los electrones de enlace en una molécula, son, fundamentalmente, orbitales híbridos.

Las formas de las moléculas enlazadas por hibridaciones de sus orbitales son forzadas por los ángulos entre sus átomos:

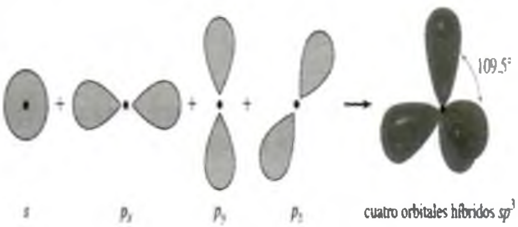
- **Hibridación sp.** La adición de un orbital s a un orbital p da lugar a un orbital atómico híbrido sp, con la mayoría de la densidad electrónica a un lado del núcleo y cuya energía es intermedia entre la de los orbitales s y p. Presentan forma lineal con ángulos de 180°, son lineales, por ejemplo, el dióxido de carbono (CO_2), el cloruro de berilio ($BeCl_2$), etcétera.



- **Hibridación sp^2.** La hibridación de un orbital s con dos orbitales p da un conjunto de tres orbitales híbridos sp^2. Los ángulos de enlace asociados a esta disposición trigonal son aproximadamente de 120°. El orbital p que sobra es perpendicular al plano que forman los tres orbitales híbridos. Por ejemplo, el etileno $H_2C=CH_2$ el tricloruro de boro, (BCl_3), el trifluoruro de boro (BF_3), etcétera.



- **Hibridación sp^3.** La hibridación de un orbital s con los tres orbitales p da lugar a cuatro orbitales híbridos sp^3 con geometría tetraédrica, cada orbital híbrido sp^3 se orienta hacia las esquinas del tetraedro en un ángulo de 109.5° uno respecto al otro. Por ejemplo, el amoniaco (NH_3), el carbono en la molécula de tetracloruro de carbono (CCl_4).



Otros tipos de hibridación son:

- **Hibridación sp^3d.** Es la combinación de un orbital s, un orbital d y tres orbitales p, dando como resultado cinco orbitales híbridos sp^3d, tienen forma trigonal bipiramidal con ángulos de 90° y 120°. Por ejemplo, el átomo de fósforo en las moléculas del pentacloruro de fósforo (PCl_5) y del pentafluoruro de fósforo (PF_5).



➤ **Hibridación sp^3d^2.** Es la combinación de un orbital s, dos orbitales d y 3 orbitales p, para dar seis orbitales híbridos sp^3d^2. Ejemplo: el átomo de azufre en el SF_6, donde forma 6 enlaces con cada átomo de F, gracias a los 6 orbitales híbridos sp^3d^2.



En general, cuando un átomo recibe energía, puede cambiar del estado basal al estado excitado, y si la energía es de baja intensidad, se pueden combinar los orbitales atómicos y se produce el fenómeno de hibridación, formándose otros orbitales nuevos y diferentes denominados orbitales híbridos. En la siguiente tabla se resumen los elementos representativos con los orbitales híbridos que forman:

GRUPO	I A	II A	III A	IV, V, VI Y VII A	VIII A
tipo de orbitales híbridos	solo hay excitación	sp	sp^2	sp^3	sp^3 compleja
forma espacial		lineal	triangular plana	tetraédrica	esférica
ángulo entre orbitales		180°	120°	109°	α

Clasificación de cadenas en compuestos orgánicos

El átomo de carbono debido a su tetravalencia puede formar moléculas grandes, se puede combinar con otros átomos de carbono. La longitud de la cadena de carbono determina la mayoría de sus propiedades físicas. Los compuestos con cadenas cortas son gases o líquidos con bajo punto de ebullición, los compuestos de cadenas medianas son líquidos y sólidos los que tienen cadenas largas.

De acuerdo con la estructura de los esqueletos que constituyen los compuestos orgánicos, se clasifican en:

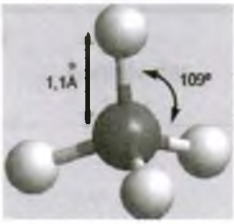
- **Acíclico**: esqueleto de cadena abierta.
- **Cíclico**: esqueleto de cadena cerrada.
- **Saturado**: indica un enlace simple entre átomos de carbono, se refiere a los hidrocarburos saturados o alcanos.
- **No saturado**: indica un doble o triple enlace entre átomos de carbono. Se refiere a los alquenos y alquinos respectivamente.
- **Homocíclico**: indica un esqueleto cerrado, formado únicamente con átomos carbono.
- **Heterocíclico**: indica un esqueleto cerrado, formado con algún átomo diferente al carbono (O, N, S, P, etc.).
- **Lineal**: esqueleto sin arborescencias o ramificaciones.
- **Arborescente**: esqueleto con ramificaciones (radicales unidos a la cadena principal).
- **Alicíclico**: se deriva de compuestos alifáticos cíclicos o esqueleto cíclico que no contiene un anillo bencénico.
- **Aromático**: esqueleto cíclico de seis carbonos unidos mediante dobles y simples ligaduras alternadamente (benceno).
- **Cíclicos simples**: se refiere a los esqueletos cíclicos sin arborescencias.

Alcanos o parafinas

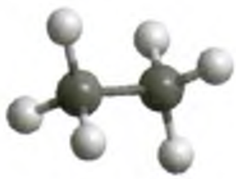
Hidrocarburos saturados de cadena abierta con enlace sencillo C-C. Son inertes no reaccionan fácilmente a temperaturas ordinarias como los ácidos, álcalis u oxidantes. Fórmula general C_nH_{2n+2}. Los primeros cuatro alcanos llevan nombres comunes, a partir del quinto hidrocarburo se nombran de acuerdo a las reglas de la IUPAC (Unión Internacional de Química Pura y Aplicada).

Número de átomos de carbono	Alcano	Nombre
1	CH_4	Metano
2	CH_3- CH_3	Etano
3	CH_3- CH_2- CH_3	Propano
4	CH_3- CH_2- CH_2- CH_3	n-Butano
5	CH_3- CH_2- CH_2- CH_2- CH_3	n-Pentano
6	CH_3- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_3	n-Hexano
7	CH_3- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_3	n-Heptano
8	CH_3- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2-CH_3	n-Octano
9	CH_3- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2- CH_2-CH_3	n-Nonano
10	CH_3- $(CH_2)_8$- CH_3	n-Decano
15	CH_3- $(CH_2)_{13}$- CH_3	n-Pentadecano
20	CH_3- $(CH_2)_{18}$- CH_3	n-Eicosano

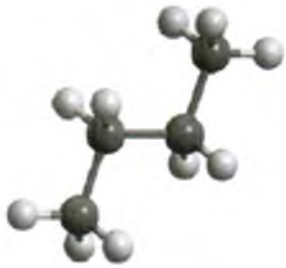
Ejemplo: moléculas del metano, etano y butano respectivamente.



Metano



Etano



Butano

Isomería

Isomería es un fenómeno o propiedad donde dos o más moléculas (sustancias) con composición química idéntica (misma fórmula molecular), difieren en la disposición de los átomos, provocando con ello que presenten diferentes propiedades físicas, químicas y biológicas.

Básicamente se pueden distinguir dos tipos de isomería:

- **Isomería estructural:** se caracteriza por el hecho de que los átomos de los respectivos compuestos están enlazados de distinta forma, es decir, tienen distinta forma estructural. Este tipo de isomería puede ser de cadena, de posición, de enlace o funcional.

Ejemplos:

Isómeros con fórmula molecular C_4H_{10}

n-butano $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_3$ 2-metil-propano (*iso*butano) $CH_3 - CH - CH_3$
| (en CH)
CH_3

Isómeros con fórmula molecular C_3OH_8

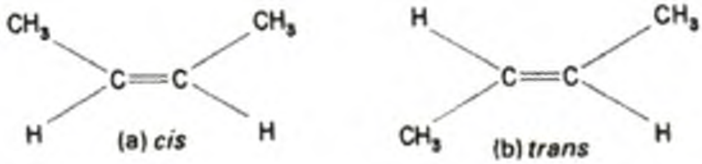
1-propanol $CH_3 - CH_2 - CH_2 - OH$ 2-propanol $CH_3 - CH_2 - CH_3$
| (en CH_2)
OH

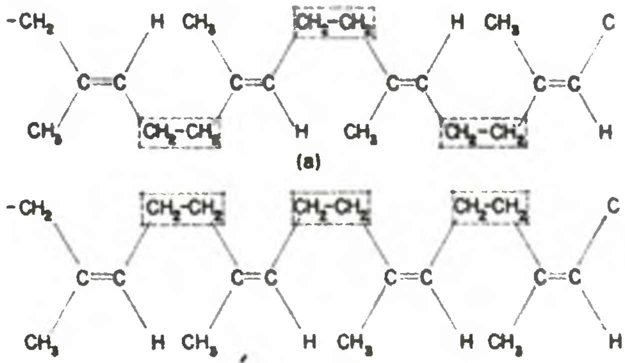
- **Isomería espacial o estereoisomería**: se da en compuestos cuyos átomos están dispuestos en la misma secuencia, pero en distinta orientación espacial; puede ser geométrica u óptica.

La Isomería espacial o estereoisomería es la que depende de la posición en el espacio de los átomos de la sustancia.

La isomería geométrica o cis-trans se debe a la existencia de un doble enlace.

En la isomería óptica o enantioisomería, los isómeros (enantiómeros) se comportan como imágenes especulares no superponibles, para lo cual es indispensable la existencia de un carbono asimétrico (o carbono quiral) en la molécula.

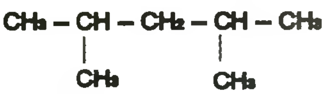




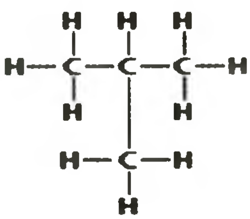
(b) Éste es el hule natural

Alcanos arborescentes

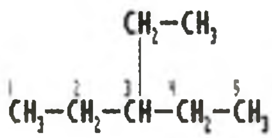
- Busca la cadena más larga de carbonos, la cual dará el nombre principal del alcano.
- Numera la cadena principal empezando por el extremo que tenga las arborescencias o ramificaciones más próximas.
- Nombra cada sustituyente o arborescencia indicando su posición con el número que corresponda al átomo de carbono al que se encuentra unido.
- Nombra el compuesto con una sola palabra, y separa los nombres de los números con guiones y los números entre sí con comas. Agrega los nombres de los sustituyentes o arborescencias como prefijos al nombre básico.
- Si en una molécula se encuentra presente el mismo radical alquil dos o más veces, se indica con los prefijos di, tri, tetra, etc. unido al nombre de los sustituyentes.
- Nombra los radicales por orden alfabético o por su complejidad estructural.



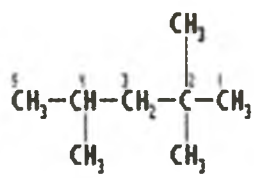
2, 4-dimetilpentano



2-metilpropano



3-etilpentano



2, 2,4-trimetilpentano

Obtención

- Por hidrogenación catalítica de hidrocarburos alifáticos no saturado (alquenos y alquinos).

$$CH_2 = CH_2 + H_2 \rightarrow CH_3 - CH_3$$

$$CH \equiv CH + 2H_2 \rightarrow CH_3 - CH_3$$

- Por hidrogenación de derivados alifáticos: alcoholes, derivados halogenados, aldehídos y cetonas. (Método de Berthelot).
  - Alcoholes: $R - OH + H_2 \rightarrow RH + H_2O_2$

    $CH_3 - CHOH - CH_{3\,(-H2O)} \rightarrow CH_3 - CH = CH_2 + H_2 \rightarrow CH_3 - CH_2 - CH_3$
  - Derivados yodados o bromados: $R - Br + Mg \rightarrow R - MgBr + H_2O \rightarrow RH + MgBrOH$
  - Hidrogenación de aldeheidos y cetonas:

    $CH_3 - CO - (CH_2)_8 - CH_3 + 4H_{\ (-H2O)} \rightarrow CH_3 - (CH_2)_9 - CH_3$
- Método de Wurtz, adición del sodio sobre los monohalogenuros de alcohilos.

$$RI + 2Na + IR \rightarrow R - R + 2NaI$$

$$2CH_3I + 2Na \rightarrow CH_3 - CH_3 + 2NaI$$

- Método de la síntesis de Kolbe, electrólisis de sales alcalinas de ácidos grasos:

$$2R - CO.K \rightarrow 2R - CO.O^- + 2K^+ \rightarrow 2e^- + 2CO_2 + R - R$$

- Método por desacarboxilación de ácidos.

$$R - CO.OH \rightarrow CO_2 + RH$$

Alquenos u olefinas

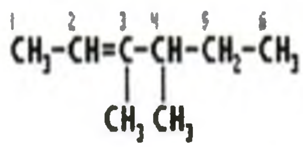
Hidrocarburos insaturados de cadena abierta, doble enlace C = C. Son más reactivos químicamente, reaccionan con los halógenos. Fórmula general C_nH_{2n}.

Los nombres de estos compuestos terminan en **eno**.

Número de átomos de carbono	Alqueno	Nombre
2	$CH_2 = CH_2$	Eteno
3	$CH_2 = CH - CH_3$	Propeno
4	$CH_2 = CH - CH_2 - CH_3$	Buteno
5	$CH_2 = CH - CH_2 - CH_2 - CH_3$	Penteno

Cuando un alqueno presenta una arborescencia y una doble ligadura, tiene preferencia la doble ligadura.

Si existen 2 ó 3 dobles ligaduras en la cadena principal, la terminación **eno** cambia por **dieno** o **trieno** respectivamente y se indica con números la posición de esas dobles ligaduras.



3,4-dimetil-2-hexeno

Obtención

- Deshidratación de alcoholes:

$$CH_3 - CH_2OH \rightarrow CH_2 = CH_2$$

- A partir de un derivado monohalogenado:

$$CH_3 - CH_2X \rightarrow CH_2 = CH_2$$

- Por deshalogenación de un derivado α-dihalogenado:

$$XCH_2 - CH_2X + Zn \rightarrow CH_2 = CH_2 + ZnX_2$$

- Semihidrogenación de alquinos:

$$R - C \equiv C - R' \rightarrow R - CH = CH - R'$$

- Método de síntesis por acción de un compuesto organomagnésico mixto sobre un derivado halogenado etilénico:

$$R' - CH = CH - CH_2Br + BrMg - R \rightarrow R' - CH = CH - CH_2 - R + MgBr_2$$

Alquinos o acetilenos

Hidrocarburos que contienen triple enlace C ≡ C. Son muy activos químicamente y no se presentan libres en la naturaleza. Fórmula general C_nH_{2n-2}.

Los nombres de estos compuestos terminan en **ino.**

Número de átomos de carbonos	Alquino	Nombre
2	$CH \equiv CH$	Etino
3	$CH \equiv C - CH_3$	Propino
4	$CH \equiv C - CH_2 - CH_3$	Butino
5	$CH \equiv C - CH_2 - CH_2 - CH_3$	Pentino

Butino 1



Butino2



Obtención

- A partir de un aldehido o cetona:

$$-CH_2 - C-_{(PCl5)} \rightarrow -CH_2 - CCl_2-_{(+2KOH\ alcohólica\ -H2O\ -2KCl)} \rightarrow -C{\equiv}C-$$

- A partir de alquenos:

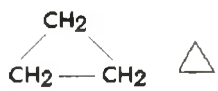
$$-CH = CH-_{(Br2)} \rightarrow -CHBr - CHBr-_{(+2KOH\ alcohólica\ -H2O\ -2KCl)} \rightarrow -C{\equiv}C-$$

Cicloalcanos

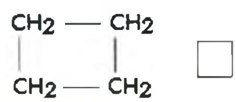
Son aquellos compuestos de cadena cerrada, que poseen enlaces simples entre cada átomo de carbono, también se llaman alicíclicos. Los cicloalcanos se representan por medio de figuras geométricas.

Número de carbonos del anillo	Cicloalcanos
3	Ciclopropano
4	Ciclobutano
5	Ciclopentano
6	Ciclohexano
7	Cicloheptano
8	Ciclooctano

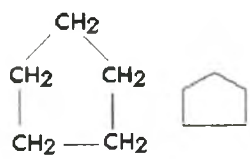
Ejemplo:



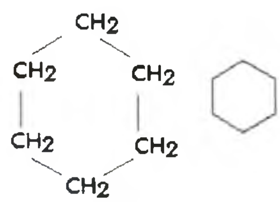
Ciclopropano



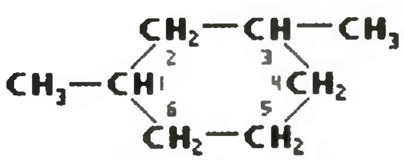
Ciclobutano



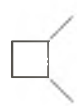
Ciclopentano



Ciclohexano



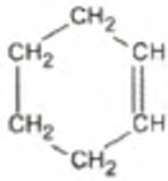
1,3 dimetilciclohexano



1,2 dimetil ciclobutano

También se pueden encontrar enlaces dobles en los compuestos cíclicos.

Ejemplo:



Ciclohexeno

Funciones orgánicas

Para el estudio de los muy numerosos productos que abarca la química orgánica, estos se dividen en series o grupos, basándose en semejanzas comunes, a estas semejanzas se les da el nombre de función. En cada una de las series hay grupos de átomos iguales que causan las propiedades específicas de estas funciones, a estos grupos se les denomina grupo funcional.

Las principales funciones de la química orgánica son las siguientes:

Función orgánica	Grupo funcional	Fórmula general	Sufijo	Propiedades	Ejemplo
Alcoholes	—OH	R—OH	—ol	Los alcoholes que contienen de 1 a 10 carbonos, son líquidos. Los que contienen de 11 en adelante son sólidos. Su solubilidad disminuye conforme aumenta el número de átomos de carbono.	CH_3OH (metanol o alcohol metílico, alcohol de madera).
Aldehídos	H | —C=O	R—CHO	—al	Son el primer producto de la oxidación de los alcoholes primarios.	H | H—C=O (metanal, formol o formaldehído).
Aminas	$-NH_2$	$R-NH_2$	—amina	Son compuestos amoniacales que resultan de sustituir los átomos de H del amonio (NH_3) por radicales alquilo.	CH_3NH_2 (metilamina).
Amidas	NH_2 | —C=O	$R\text{-}CONH_2$	—amida	Se puede considerar como un derivado de un ácido carboxílico por sustitución de grupo oxidrilo (–OH) del ácido por un grupo $-NH_2$.	CH_3CONH_2 (etanamida).
Nitrilos	—C≡N	R—C≡N	—nitrilo	Resultan de la sustitución de los tres hidrógenos de un mismo átomo de carbono de un hidrocarburo por un nitrógeno trivalente.	$CH_3-C\equiv N$ (etanonitrilo)

Función orgánica	Grupo funcional	Fórmula general	Sufijo	Propiedades	Ejemplo
Ácidos carboxílicos	OH —C=O	R—COOH	ácido —oíco	Son derivados de los aldehídos por adición de un oxígeno; son el último término de la oxidación de los alcoholes primarios.	CH_3COOH (ácido etanóico, ácido acético).
Sales carboxílicas	OM —C=O	R—COOM	Se sustituye la terminación –ico del ácido por la terminación **–ato**	Los ácidos carboxílicos reaccionan con las bases para formar sales iónicas	CH_3COONa (acetato de sodio)
Ésteres	O ‖ —C—O—	R—COO—R´	—ato de alquilo	Resultan de la reacción del grupo carboxilo de los ácidos con el grupo oxhidrílico de los alcoholes.	CH_3COOCH_3 (acetato de metilo)
Éteres	—O—	R—O—R´	alquil--- éter	Se forman sustituyendo los dos hidrógenos del agua por dos radicales orgánicos.	CH_3OCH_3 (dimetiléter o metoximetano)
Cetonas	—C=O	R—CO—R´	—ona	Provienen de la oxidación de los alcoholes secundarios o de la deshidrogenación de los mismos.	CH_3COCH_3 (propanona o acetona)
Halogenuros de alquilo	—X X = F, Cl, Br, I.	R—X	no metal (uro) de alquil	Resultan de sustituir en un hidrocarburo uno o varios hidrógenos por halógenos.	CH_3Cl (cloro metano o cloruro de metilo)

Ejercicios

Ejercicio 6. Elige la respuesta correcta:

1. ¿Cuál es el nombre del siguiente compuesto?

$$CH \equiv C - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}} - CH_2 - CH_3$$

a) 2-metil-3-pentino.
b) 3-metil-1-pentino.
c) 3-metil-4-pentino.
d) metil-3-pentino.

2. El whisky es una bebida alcohólica que se obtiene de la fermentación del mosto de la cebada, trigo, maíz, etc. Al comercializarse contiene una concentración de alcohol entre el 40 y 62%.
¿Cuál es la función orgánica que representa al grupo alcohol?
a) $-COOH$
b) $-COO$
c) $-CHO$
d) $-OH$

3. Un ___________ es aquel que perteneciendo a un nivel de energía tiene la capacidad de mezclarse con otro cuando uno de sus electrones describe una órbita tanto dentro del campo perteneciente a un orbital como a otro orbital.
a) orbital híbrido
b) orbital simple
c) campo eléctrico
d) campo magnético

4. La conversión de etileno a polietileno, mostrada en la siguiente ecuación ilustra…

$$\mathbf{CH_2 = CH_2 \longrightarrow (-CH_2 - CH_2 -)_N}$$

a) Polimerización por condensación
b) Polimerización por eliminación
c) Polimerización de sustitución
d) Polimerización por adición

5. Las letras sp, sp^2 y sp^3, representan a:
a) los niveles de energía
b) los orbitales híbridos
c) los orbitales simples
d) el giro del electrón

6. Son características de los compuestos orgánicos.
   I. la mayoría presentan isómeros
   II. se forman ordinariamente por la acción de las fuerzas fisicoquímicas y reacciones químicas a diversas temperaturas
   III. generalmente no presentan isómeros
   IV. están formados por enlace covalentes
   V. están formados por enlaces iónicos y covalentes
   VI. en disolventes no polares son solubles

a) I, III, V
b) I, IV, VI
c) II, III, V
d) II, IV, VI

7 Termodinámica

Propósito: el alumno definirá y hará cálculos de entalpía, entropía, energía libre, velocidad y equilibrio de reacciones químicas.

Introducción

Cuando una reacción química ocurre, generalmente hay un cambio en la temperatura de los compuestos químicos y del recipiente donde se efectúa la reacción. Si la temperatura aumenta, se dice que la reacción es exotérmica (la energía se libera como calor); si la temperatura disminuye, la reacción es endotérmica (la energía se absorbe como calor). La termoquímica es el estudio y medida de la energía transferida como calor cuando ocurre una reacción química.

Entalpía

a) Concepto

Casi todos los cambios físicos y químicos van acompañados por un desprendimiento o consumo de energía y generalmente esta energía se encuentra en forma de calor. La ganancia o pérdida de calor se puede atribuir a un cambio en el "contenido calorífico" de las sustancias que toman parte en el proceso. El "contenido calorífico se llama **entalpía** y se simboliza con una letra "H". Mientras que la entalpía no se puede medir directamente, sí se puede medir el calor producido o consumido en una reacción química, que es la diferencia entre la entalpía de los productos y la entalpía de los reactivos. A este cambio de entalpía se le simboliza con ΔH, (Δ significa "cambio en") el cual se define como la entalpía de los productos menos la entalpía de los reactivos:

$$\Delta H_{reacción} = \Delta H_{productos} - \Delta H_{reactivos} = \text{calor de reacción}$$

En una reacción donde se absorbe calor, el contenido de calor o entalpía de los productos es mayor que el de los reactivos; en consecuencia, el signo ΔH es positivo, este tipo de reacción se denomina endotérmica.

$$\Delta H > 0 \qquad \Delta H = + \text{ Reacción endotérmica}$$

El caso más común es cuando se libera el calor en una reacción química en donde la entalpía de los productos es menor que la de los reactivos y ΔH tiene un signo negativo. Una reacción de este tipo se denomina exotérmica.

$$\Delta H < 0 \qquad \Delta H = - \text{ Reacción exotérmica}$$

Otra definición es la cantidad de calor involucrado en una reacción química a presión constante.

$$\Delta H = \Delta E + P\Delta V$$

ΔE: Variación de energía interna

Donde: P = Presión, ΔV = Variación de volumen

b) Entalpía de formación

La **entalpía de formación** (o calor de formación de una sustancia), ΔH_f, es la cantidad de calor que se libera o absorbe cuando se forma un mol de un compuesto a partir de sus elementos en una reacción química.

c) Entalpía o calor de reacción

Si se conocen las entalpías de formación de todas las sustancias que participan en una reacción química se puede calcular la variación de la entalpía de la reacción. Esta se deduce de la ley de la conservación de la energía, ya que el calor de la reacción es simplemente la diferencia en el contenido calorífico de los productos y los reactivos.

$$\Delta H_{reacción} = \Sigma\, \Delta H_f^{\circ}{}_{(productos)} - \Sigma\, \Delta H_f^{\circ}{}_{(reaccionantes)}$$

Ejemplo:

Determine el calor de la siguiente reacción:

$$\mathbf{PCl_{5(g)} + H_2O_{(g)} \rightarrow POCl_{3(g)} + 2\ HCl_{(g)}}$$

Sustancia	H°f (Kcal/mol)
$PCl_{5(g)}$	–95.4
$POCl_{3(g)}$	–141.5
$H_2O_{(g)}$	–57.8
$HCl_{(g)}$	–22.1

ΔH_R = (–141.5 + 2(–22.1)) – (–95.4 – 57.8) = –185.7 + 153.2 = **–32.5Kcal/mol** (exotérmica)

d) Ley de Hess

El calor de una reacción es independiente al número de etapas en la cual se lleva a cabo. "La variación de la entalpía de una determinada reacción es siempre igual e independiente del hecho de que la reacción sea directa o que se verifique indirectamente por medio de varias etapas".

Ejemplo:

Si consideramos las reacciones del azufre para obtener trióxido de azufre o anhídrido sulfúrico, tenemos:

$S_{(s)} + O_{2\,(g)} \rightarrow SO_{2\,(g)}$ ΔH = –70.96kcal/mol (exotérmica)

$SO_{2\,(g)} + \frac{1}{2} O_{2\,(g)} \rightarrow SO_{3\,(g)}$ ΔH = –23.49kcal/mol (exotérmica)

Sí sumamos ambas ecuaciones:

$S_{(S)} + 1\frac{1}{2} O_{2\,(g)} \rightarrow SO_{3\,(g)}$ **ΔH = –94.45kcal/mol (exotérmica)**

Energía libre y espontaneidad

a) Energía libre de Gibbs (espontaneidad)

Es la energía útil disponible para efectuar un trabajo.

$$\mathbf{\Delta G = \Delta H - T\Delta S}$$

Donde, ΔG = Variación de la energía libre de Gibbs, ΔH= Variación de Entalpía, T = Temperatura,
ΔS = Variación de la entropía.

Sí, ΔG = – Proceso espontáneo.
ΔG = + Proceso no espontáneo.
ΔG = 0 Proceso en equilibrio.

Ejemplo:

Calcula la ΔG de un sistema con ΔH= –365.72kcal, ΔS= –0.13922kcal, a 25°C; indica si la reacción se lleva a cabo.

ΔG = (–365.72) – (298) (–0.13922) = **–324.30kcal**

Como ΔH es negativa la reacción es exotérmica y ΔG es negativo el proceso es espontáneo, por tanto, se lleva a cabo la reacción.

Ejercicios

Ejercicio 7. Elige la respuesta correcta:

1. Se tiene ΔH – y ΔG –, ¿qué está ocurriendo en ese sistema?
   a) Es una reacción de tipo endotérmica y espontánea.
   b) Es una reacción de tipo endotérmica y no espontánea.
   c) Es una reacción de tipo exotérmica y espontánea.
   d) Es una reacción de tipo exotérmica y no espontánea.

2. Dadas las entalpías estándar de formación: $\Delta H^{o}_{f}[CO_{(g)}] = -110.5kJ$; $\Delta H^{o}_{f}[CO_{2(g)}] = -393.5kJ$. Hallar la entalpía de la siguiente reacción: $CO_{(g)} + \frac{1}{2} O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)}$
   a) 566kJ
   b) 283kJ
   c) –283kJ
   d) –566kJ

3. Las reacciones, donde se libera calor al medio ambiente, y el ΔH del sistema es negativo, se llaman:
   a) endotérmicas
   b) isocóricas
   c) exotérmicas
   d) isobáricas

4. De acuerdo a la siguiente reacción: $H_{2(g)} + I_{2(g)} \rightarrow 2HI_{(g)}$ ΔH = +83cal. ¿Cómo se favorece la reacción?
   a) aumentando la temperatura de la reacción
   b) disminuyendo la temperatura de la reacción
   c) aumentando el área de contacto
   d) disminuyendo la presión

5. Determina la variación de entalpía para la combustión del etanol: $C_2H_5OH_{(l)} + 3O_{2(g)} \rightarrow 2CO_{2(g)} + 3H_2O_{(l)}$.
   Datos: ΔH^{0}_{f}(kJ/mol): $C_2H_5OH_{(l)}$ =–277.7; $CO_{2(g)}$ =–393.5; $H_2O_{(l)}$ =–285.8.
   a) –1366.7kJ/mol
   b) –401.6kJ/mol
   c) 401.6kJ/mol
   d) 1366.7kJ/mol

6. Dada la reacción $BaSO_{3(s)} + \frac{1}{2} O_{2(g)} \rightarrow BaSO_{4(s)}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta respecto al ΔH de reacción, tomando en cuenta los siguientes valores.

Sustancia	ΔH_f (kJ/mol)
$BaSO_3$	1182.4
$BaSO_4$	–1465.2
O_2	0

   a) ΔH = –282.8kJ, reacción endotérmica
   b) ΔH = –282.8kJ, reacción exotérmica
   c) ΔH = 282.8kJ, reacción endotérmica
   d) ΔH = 282.8kJ, reacción exotérmica

8 Electroquímica

Propósito: el alumno identificará los componentes de una celda electrolítica y de una pila de Daniell y determinará que sustancias actúan como ánodos, cátodos, agentes oxidantes y agentes reductores

Electroquímica

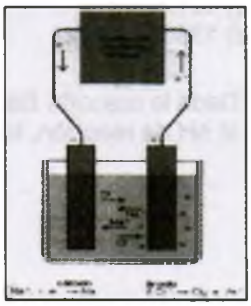
La Electroquímica trata de la interrelación de los fenómenos químicos y eléctricos, así como del estudio de las propiedades eléctricas de las soluciones de los electrolitos, estableciendo una relación entre la acción química y eléctrica de tales sistemas. Es por ello, que el campo de la electroquímica ha sido dividido en dos grandes secciones. La primera de ellas es la Electrólisis, la cual se refiere a las reacciones químicas que se producen por acción de una corriente eléctrica. La otra sección se refiere a aquellas reacciones químicas que generan una corriente eléctrica, éste proceso se lleva a cabo en una celda o pila galvánica.

Celda electroquímica

La energía eléctrica puede utilizarse para realizar transformaciones químicas (en pilas electrolíticas). Una celda electroquímica simple contiene un par de electrodos de material inerte, por ejemplo platino, conectados a una fuente de corriente y sumergidos en una solución acuosa de un conductor de segunda especie.

El electrodo conectado al lado negativo de la fuente se denomina cátodo y es aquel por el cual entran los electrones a la solución procedentes de la fuente, por ejemplo, una batería. Al mismo tiempo, el electrodo conectado al lado positivo de la batería se denomina ánodo, por el cual salen los electrones de la solución y regresan a la batería.

Al cerrar el circuito, los iones negativos o aniones, emigran hacia el ánodo en donde se oxidan, mientras que los iones positivos o cationes van hacia el cátodo en donde se reducen. Como estas partículas están cargadas, su movimiento constituye una comente eléctrica. Los aniones se mueven hacia el ánodo y de aquí que los electrones son transportados por estos iones desde el cátodo. De nuevo, como el transporte de electricidad positiva hacia el cátodo puede considerarse un flujo de electricidad negativa hacia el ánodo, la migración de los cationes hacia el cátodo es equivalente al flujo de electrones en dirección opuesta. En consecuencia, el resultado neto de la migración es un desplazamiento de los electrones por la solución en la dirección de la corriente y cada ión transporta una parte de la comente total de electricidad a través de la solución. El proceso del paso de corriente por un conductor electrolítico con todos los cambios químicos y migratorios asociados, se denomina electrólisis.

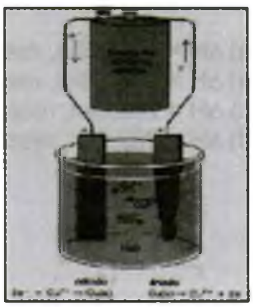


Ejemplo 1: En la pila del diagrama, los iones sodio se reducen en el cátodo: $Na^+ + e \rightarrow Na$ y los iones cloruro se oxidan en el ánodo $2Cl \rightarrow Cl_2 + 2e^-$. La suma adecuada de estas dos ecuaciones parciales de la reacción para toda la pila es: $2NaCl_{(l)}$ electrólisis$\rightarrow 2Na_{(l)} + Cl_{2(G)}$

Ejemplo 2: En la electrólisis de una solución de $CuSO_4$ entre electrodos de cobre, la corriente es transportada por los iones Cu^{2+} y SO_4^{2-}.

Los iones Cu^{2+} se reducen en el cátodo: $2e^- + Cu^{2+} \rightarrow Cu$, pero de las tres posibles oxidaciones anódicas:

$$2SO_4^{2-} \rightarrow 2S_2O_4^{2-} + 2\,e^-$$
$$2H_2O \rightarrow O_{2(g)} + 4H^+ + 4e^-$$
$$Cu_{(s)} \rightarrow Cu^{2+} + 2e^-$$



Se observa que ocurre la oxidación del cobre metálico del electrodo.

Por esto, en el ánodo, el cobre del electrodo va a la solución como iones Cu^{2+} y, en el cátodo, los iones Cu^{2+} se depositan como $Cu_{(S)}$ sobre el electrodo. Este proceso se usa para refinar cobre. El cobre contaminado se utiliza como el ánodo de una pila electrolítica y la solución de $CuSO_4$ está electrolizada. El cobre puro se deposita sobre el cátodo.

Celdas voltaicas o galvánicas

Las relaciones químicas pueden utilizarse para producir energía eléctrica (en pilas que se llaman pilas voltaicas o galvánicas en honor de Alessandro G. Volta (1800) o Luigi Galvani (1780)). Son celdas electroquímicas en las cuales las reacciones espontáneas de óxido-reducción producen energía eléctrica. Las dos mitades de la reacción de óxido reducción, se encuentran separadas, por lo que la transferencia de electrones debe efectuarse a través de un circuito externo.

En todas las reacciones electroquímicas hay transferencia de electrones y por tanto, son reacciones de óxido reducción (redox).soluciones electrolíticas.

Ejemplo: La reacción entre cinc metálico e iones de cobre (II) en solución ilustra un cambio espontáneo en el cual se transfieren los electrones:

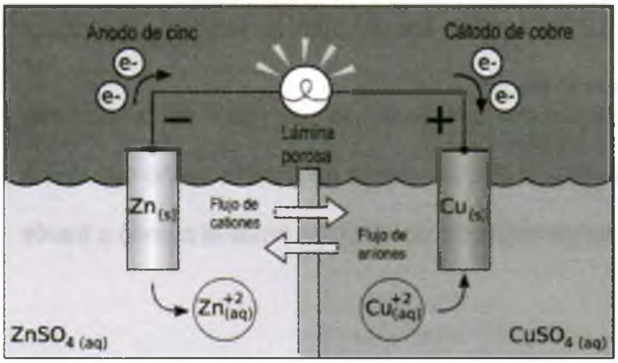
$$Zn_{(S)} + Cu^{2+}_{(AC)} \rightarrow Zn^{2+}_{(AC)} + Cu_{(S)}$$

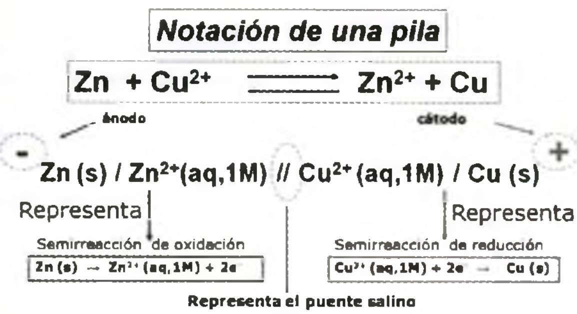
No se conoce el mecanismo exacto mediante el cual ocurre la transferencia de electrones. Sin embargo, podemos representar la reacción anterior como una combinación de dos medias reacciones:

$$Zn_{(S)} \rightarrow Zn^{2+}_{(AC)} + 2e^- \quad y \quad 2e^- + Cu^{2+}_{(AC)} \rightarrow Cu_{(S)}$$

En una pila voltaica, estas medias reacciones se realizan en electrodos diferentes de forma tal que la transferencia de electrones tiene lugar a través de un circuito eléctrico externo más bien que entre el cinc metálico y los iones de cobre (II).

La pila que se muestra en la imagen está diseñada para usar esta reacción para producir una corriente eléctrica. La media pila de la izquierda contiene un electrodo de cinc metálico y solución de $ZnSO_4$. La media pila de la derecha consiste en un electrodo de cobre metálico en solución de $CuSO_4$. Las medias pilas están separadas por separador poroso que evita la mezcla mecánica de las soluciones pero permite el paso de iones bajo la influencia del flujo eléctrico. Una pila de este tipo se llama pila de Daniell.





a) Descripción de los elementos de la pila de Daniell

Las dos láminas metálicas se llaman electrodos. Aquél en el que se produce la oxidación, que por convenio se sitúa a la izquierda, recibe el nombre de ánodo, y cátodo el otro electrodo, en el que se produce la reducción.

La separación de los dos procesos puede efectuarse mediante:

- un tabique poroso (por ejemplo, de porcelana).
- realizándolos en dos recipientes distintos, unidos por un puente salino, que es un tubo de vidrio que contiene una disolución concentrada de un electrólito inerte respecto al proceso redox.

Por ambos métodos se impide que se mezclen las disoluciones anódica y catódica, pero se permite la conducción de los iones.

El puente salino o el tabique poroso tienen dos funciones:

- Cerrar el circuito, ya que permite la circulación de iones a través de ellos.
- Mantener la neutralidad eléctrica de las disoluciones de cada parte de la pila la cantidad de iones cinc va aumentando, con lo que el recipiente de la izquierda quedaría con carga positiva, impidiendo la salida de los electrones, que quedarían atraídos; por tanto, pasan iones negativos al recipiente de la izquierda para mantenerlo neutro.

Ejercicios

Ejercicio 8. Elige la respuesta correcta:

1. En la electrólisis de una disolución acuosa y neutra 1M de cloruro sódico con electrodos inertes de platino:
   a) En el ánodo se desprende oxígeno
   b) En el ánodo se desprende cloro
   c) En el cátodo se depositan los iones Na^{+1}
   d) En el ánodo se desprende hidrógeno

2. La electrolisis como proceso de óxido – reducción se realiza un recipiente o cuba electrolítica compuesta por dos electrodos inertes conectados a una fuente de corriente (como se muestra en la figura). Al colocar una solución electrolítica en el recipiente y hacer pasar una corriente eléctrica, los iones positivos de la solución se mueven hacia el cátodo (cationes) y los iones negativos hacia el ánodo (aniones).De acuerdo con la imagen, la reducción ocurre en ______ y la oxidación en ______.



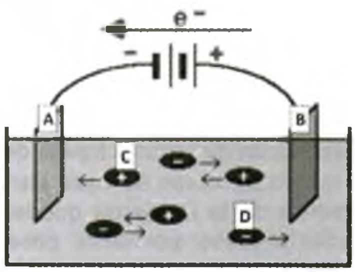
   a) la cuchara – el cátodo
   b) el ánodo – el cátodo
   c) el cátodo – el ánodo
   d) la plata – el ánodo

3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones muestran el funcionamiento de una celda electrolítica?
   1. Las reacciones que se desarrollan en la celda electrolítica transforman la energía química en energía eléctrica.
   2. Los iones con carga positiva siempre viajan hacia el cátodo.
   3. Las reacciones de óxido-reducción se efectúan como consecuencia del paso de la corriente eléctrica.
   4. Los iones que se forman se transfieren de una celda a otra por medio del puente salino que une a las semiceldas.
   5. Los electrones que se liberan durante las reacciones viajan desde el ánodo hacia el cátodo a través del electrolito.

   a) 1, 2, 3
   b) 1, 3, 4
   c) 2, 3, 5
   d) 3, 4, 5

4. Se denomina cátodo al electrodo:
   a) positivo al cuál emigran los cationes
   b) negativo al cuál emigran los cationes
   c) positivo al cuál emigran los aniones
   d) negativo al cuál emigran los aniones

5. ¿Qué letra señala al ánodo de la celda electrolítica?



Respuestas de los ejercicios de Química

Unidad 1

1. d	2. b	3. d	4. d	5. b	6. d	7. c

Unidad 2

1. b	2. b	3. c	4. b	5. a	6. b

Unidad 3

1. b	2. c	3. b	4. b	5. a	6. d

Unidad 4

1. c	2. c	3. a	4. c	5. b	6. b	7. a

Unidad 5

1. c	2. a	3. b	4. d	5. d	6. b

Unidad 6

1. b	2. d	3. a	4. d	5. b	6. b

Unidad 7

1. c	2. c	3. c	4. a	5. a	6. b

Unidad 8

1. b	2. c	3. c	4. b	5. b

Bibliografía

Aguilar, A. (2011). *Geografía General*. México: Prentice Hall

Brady, J. (1993). *Química Básica, principios y estructura*. México: Limusa.

Brown, T., LeMay, H., Bursten, B. y Murphy, C. (2009). *Química. La ciencia central*. México: Pearson Educación.

Burns R. (2005). *Fundamentos de Química 1 y 2*. México: Pearson Educación.

Daub, W. y Seese, W. (2005) *Química*. México: Pearson Educación.

Dickson, T. (1982). *Introducción a la Química*. México: Publicaciones Cultural.

Dickson, T. (1986). *Química Enfoque ecológico*. México: Limusa.

Garritz, A. (1988).*Química Antologías*. México: COSNET-SEP.

Garritz, A. y Chamizo, J. (1994). *Química*. Wilmington Delawere: Addison Wesley Iberoamericana.

Garritz, A. y Chamizo, J. (2001). *Tú y la Química*. México: Prentice Hall.

Hewitt, P. (2007). *Física conceptual*. México: Pearson Educación.

Hill, J. y Kolb, D. (1999). *Química para el nuevo milenio*. México: Pearson Educación.

Holum, J. (2003). *Introducción a los Principios de Química*. México: Limusa.

Morrison, R. y Boyd, R. (1990) *Química Orgánica*. México: Addison – Wesley Iberoamericana.

Ocampo, G., *et. al.* (2000). *Fundamentos de Química 1, 2, 3, 4*. México: Publicaciones Culturales.

Phillips, J., Strozak, V., Wistrom, Ch. (2000) *Química, conceptos y aplicaciones*. México: McGraw–Hill.

Smallwood, W. (2001). *Biologia, La vida y sus procesos*. México: Publicaciones Culturales.

Timberlake, K. y Timberlake, W. (2008). *Química*. México: Pearson Educación.

Turk, A. (1973). *Ecología, Contaminación – Medio Ambiente*. México: Nueva editorial Interamericana.

Valdivia, B., *et. al.* (2003). *Biología La vida y sus Procesos*. México: Publicaciones Culturales.

Woodfield, B., Asplund, M. y Haderlie, S. (2009). *Laboratorio Virtual de Química General*. México: Pearson Educación.

Zumdhal, S. (1992). *Fundamentos de Química*. México: McGraw–Hill.

Unidad 1 Biología celular

1. Biomoléculas
2. Estructura y función celular
3. Células procariontas y eucariontas
4. Metabolismo (anabolismo y catabolismo)
5. División celular

Unidad 2 Genética

1. Herencia
2. Leyes de Mendel
3. Entrecruzamiento y variabilidad genética
4. Teoría de las mutaciones
5. Clonación, hibridación y alimentos transgénicos

Unidad 3 Origen de la vida, evolución y biodiversidad

1. Del creacionismo a la teoría de la evolución
2. Corrientes filosóficas de la teoría evolucionista
3. Clasificación de los seres vivos

Unidad 4 Reproducción humana

1. Formas de reproducción
2. Anatomía y fisiología de los aparatos reproductivos
3. Gametogénesis
4. Métodos anticonceptivos
5. Enfermedades de transmisión sexual

Unidad 5 Ecología

1. Ecología
2. Ciclos biogeoquímicos
3. Flujo de energía en el ecosistema
4. Relación entre los seres vivos
5. Cadenas, redes y pirámides alimenticias
6. Sucesión ecológica
7. Cuidados del medio ambiente y sustentabilidad



Biología

1 Biología celular

Propósito: el alumno: describirá las diferentes biomoléculas, la estructura, función y tipos de células, así como el metabolismo y la división celular.

Los elementos químicos que forman parte importante de la materia viva, reciben el nombre de elementos biogenésicos, la mayoría de ellos se combinan entre si para formar compuestos de carácter inorgánico. Se consideran tres tipos de compuestos inorgánicos: agua, gases y sales minerales.
Agua. Es una molécula polar, constituida por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, el enlace que une al H con el O se llama covalente (enlace que comparte electrones). El agua actúa como vehículo en el transporte de alimentos, productos metabólicos y de desecho, es un termorregulador y estabilizador en los sistemas vivientes, disuelve una gran cantidad de sustancias, participa en reacciones químicas y se considera una sustancia neutra por excelencia.
Gases. Los principales son el O_2 y el CO_2 ambos se disuelven dentro de las células interviniendo en su respiración.
Sales minerales. Son compuestos neutros de los cuales mencionamos: sodio, potasio fósforo, calcio, nitrógeno, magnesio, hierro y zinc.

De los elementos naturales encontrados en el planeta, seis constituyen principalmente a los seres vivos:

Elemento	Función
Carbono (C)	Constituyente principal de moléculas orgánicas.
Hidrógeno (H)	Forma parte del agua y estructural.
Oxígeno (O)	Participa en la respiración y es estructural.
Nitrógeno (N)	Constituyente de las proteínas, vitaminas y ácidos nucleicos.
Fósforo (P)	Participa en la transferencia de energía y forma parte del ATP, coenzimas, entre otros.
Azufre (S)	Constituyente de proteínas.

Biomoléculas

Los carbohidratos, lípidos, proteínas y ácidos nucleicos se denominan moléculas biológicas debido a su gran tamaño, también las conocemos como *biomoléculas*, a continuación conoceremos sus características más importantes:

CARBOHIDRATOS

Son fuente de energía de disponibilidad inmediata
Son compuestos orgánicos formados por carbono, hidrógeno y oxígeno, son solubles en agua y constituyen la fuente principal de energía de las células. Son los más abundantes en la naturaleza y se encuentran en mayor medida en plantas que en animales, ya que la mayoría de los carbohidratos son sintetizados por las plantas verdes, durante el proceso de la fotosíntesis. Los carbohidratos se clasifican en:

a) Monosacáridos

Son azúcares simples, que a su vez se clasifican de acuerdo con el número de carbonos que contienen.
Ejemplo:

Números de átomos de carbono	Nombre
3	Triosa
4	Tetrosa
5	Pentosa
6	Hexosa
7	Heptosa

Siendo los más importantes las pentosas y las hexosas. Entre las pentosas encontramos la ribosa y la desoxirribosa, ambos forman parte del ácido ribonucleico (ARN) y del ácido desoxirribonucleico (ADN), respectivamente, y entre las hexosas se hallan la fructuosa, la galactosa y la glucosa.
La fructuosa y la galactosa están presentes en frutas, miel y verduras. Aunque la galactosa rara vez está sola, ya que siempre se combina con otro monosacárido para formar parte de una molécula grande. La glucosa es el azúcar que producen los vegetales durante la fotosíntesis, es la única hexosa que se encuentra en mayor cantidad en los seres vivos, es utilizada para obtener energía y se le conoce como azúcar de la sangre.

b) Disacáridos

Son carbohidratos que se forman por la unión de dos monosacáridos por medio de un enlace glucosídico, y la eliminación de una molécula de agua. Los disacáridos más comunes son: la sacarosa, la maltosa y la lactosa.

Sacarosa:

Composición	Nombre común	Fuente
Glucosa + fructuosa	Azúcar de mesa	Caña y remolacha

Maltosa

Composición	Nombre común	Fuente
Glucosa + glucosa	Azúcar de malta	Germen de cebada

Lactosa

Composición	Nombre común	Fuente
Glucosa + galactosa	Azúcar de leche	Leche de mamíferos

c) Polisacáridos

Son carbohidratos constituidos por la unión de muchos monosacáridos, unidos por distintos enlaces glucosídicos. Algunos polisacáridos sirven de reservas energéticas en vegetales y animales, y otros constituyen la estructura celular y le confieren rigidez a los tejidos.

Almidón

Químicamente es una mezcla de amilosa y amilopectina. Se encuentra en tubérculos, cereales y algunas frutas, como polisacárido de reserva energética.

Celulosa

Es el polisacárido estructural del reino vegetal. Los herbívoros como las ovejas, los caballos, el ganado caprino y vacuno son los únicos capaces de aprovechar la celulosa, esto se logra gracias a la existencia de microorganismos y enzimas en su tracto gastrointestinal que realizan la tarea de desdoblarla y digerirla. La encontramos en frutas, hortalizas y cereales, comercialmente se obtiene de la madera y el algodón.

Glucógeno

Es el polisacárido de reserva energética animal más importante. Está presente en el hígado y músculos.

Lípidos

Son compuestos formados por carbono, hidrógeno y oxígeno insolubles en agua, pero solubles en disolventes orgánicos. Algunas de sus funciones son: reserva de energía, forman parte estructural de las membranas celulares y actúan como aislantes térmicos.

Se clasifican en:

- Grasas neutras o lípidos simples (grasas o aceites)

Llamados glicéridos, resultan de la combinación de una molécula de glicerol o glicerina y tres moléculas de ácidos grasos. Los triglicéridos constituyen grasas o lípidos saturados en los animales, y aceites o lípidos insaturados en los vegetales.

- Fosfolípidos o lípidos compuestos

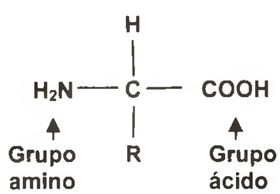
Están formados por carbono, hidrógeno y oxígeno, pero además contienen fósforo y, en ocasiones, nitrógeno. Están integrados por dos moléculas de glicerina. Los fosfolípidos tienen una cabeza hidrofílica y una cola hidrofóbica. Son constituyentes básicos de las membranas celulares de los vegetales y animales.

- Esteroides o lípidos derivados

Son lípidos formados por cuatro anillos: tres de seis átomos de carbono y uno de cinco, como el colesterol.

Proteínas

Son polímeros constituidos por carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno, aunque algunas contienen azufre, fósforo o hierro. Son los compuestos más abundantes en la célula (71%), su unidad básica son los aminoácidos (a-a), los cuales, están formados por el carbono alfa principalmente, un átomo de hidrógeno, un grupo ácido, un grupo R (alquilo) y un grupo amino.



En la formación de las proteínas intervienen veinte aminoácidos: arginina, triptófano, treonina, lisina, valina, isoleucina, leucina, metionina, fenilalanina, histidina, (esenciales) y cisteína, ácido aspártico, ácido glutámico, aspargina, glutamina, glicina, alanina, prolina, serina, y tirosina (no esenciales).

Enlace peptídico
El enlace químico que une a los aminoácidos se llama, peptídico, que se forma por la unión del grupo carboxilo de uno y el grupo amino de otro. Cuando dos o más aminoácidos se unen, formarán un péptido y un polipéptido es el resultado de la unión en forma de cadena, de muchos aminoácidos.

Con base en su *estructura*, las proteínas se clasifican en:

- Fibrosas o helicoidales. Realizan funciones estructurales al formar parte de la piel, los músculos y los tendones.
- Globulares. Como las enzimas y los anticuerpos que participan en todo proceso vital.

De acuerdo al *nivel de organización* que poseen se clasifican así:

- Estructura Primaria. En la que se presenta una secuencia específica de aminoácidos.
- Estructura Secundaria. En ella, el polipéptido se enrolla o pliega en forma de resorte, como la queratina.
- Estructura Terciaria. En la cual las proteínas se repliegan sobre sí mismas, dándole una apariencia globular, como las enzimas.
- Estructura Cuaternaria. Constituidas por los cuatro niveles estructurales, como la hemoglobina.

Y por su *composición química* se dividen en:

- Simples. Son las que sólo contienen aminoácidos, como las albúminas o las globulinas.
- Conjugadas. Se forman con aminoácidos y otras moléculas, como azúcares, lípidos y metales (grupo prostético), son proteínas conjugadas las glucoproteínas, lipoproteínas y metaloproteínas como la hemoglobina (consta de dos pares de cadenas de aminoácidos que contienen en total unas 574 moléculas de aminoácidos, cada una de estas cadenas tiene un grupo de átomos llamados grupo hem, que contiene el hierro, elemento que da el color y sabor característico a la sangre.

Las proteínas sufren cambios drásticos cuando se les expone a cambios en el pH o a la temperatura ya que se rompen los puentes de hidrógeno y los enlaces de las proteínas, produciendo un desarreglo en la secuencia de los aminoácidos. Este proceso, conocido como *desnaturalización,* puede ocasionar graves trastornos en los organismos, incluso la muerte. Las proteínas son esenciales para la vida, porque desempeñan funciones básicas como:

Estructurales, como el colágeno y la elastina.
Catalizadoras, como las enzimas.
Hormonales, como la insulina y la oxitocina.
De defensa, como las inmunoglobulinas
Materiales contráctiles, como la miosina.
Transporte, como la hemoglobina.
Elemento de coagulación, como la fibrina.
Material de reserva, como la albúmina.
División celular, como las histonas.

Ácidos nucleicos

Son polímeros formados por cuatro nucleótidos, su función es formar parte del código genético y la síntesis de proteínas. Existen dos categorías, ADN (ácido desoxirribonucleico) y ARN (ácido ribonucleico).
El ácido desoxirribonucleico (ADN), se considera la base molecular de la vida, en él encontramos codificadas todas aquellas características para la formación de un nuevo individuo, además de controlar actividades celulares y de autoduplicación. Está formado por dos cadenas (formando una doble hélice) constituidas por miles de nucleótidos (un azùcar; desoxirribosa, un grupo fosfato; PO_4^{-3} y bases nitrogenadas diferentes). A lo largo de una molécula de ácido, los grupos fosfato y el azúcar son idénticos, sin embargo, las bases nitrogenadas son diferentes, existen cuatro tipos:

2 llamadas púricas, Adenina (A)-Guanina (G)
2 llamadas pirimídicas, Timina (T)-Citosina (C) (Valdivia, 2002)

Estas bases, unen las dos cadenas de ADN de una manera específica, Adenina–Timina y Guanina–Citosina, a través de puentes de hidrógeno.

El ácido ribonucleico (ARN) constituido por una sola cadena de nucleótidos, presenta cuatro tipos de bases nitrogenadas A, G, C y U (Uracilo), un azúcar (ribosa) y su correspondiente grupo fosfato. El ADN codifica la

síntesis de tres tipos de ARN: mensajero (molécula que se transcribió del ADN y a partir de la cual se sintetiza una proteína), transferencia (molécula que adopta el aminoácido correcto al codón específico del mensajero) y ribosomal (junto con las proteínas ribosomales conforma a los ribosomas, que es el sitio donde se sintetizan los polipéptidos y proteínas. Todas estas moléculas intervienen en la traducción de la secuencia de nucleótidos de los genes en la secuencia de los aminoácidos de las proteínas.

El código genético se compone de codones, que son secuencias de tres bases del ARNm que especifican un aminoácido de la cadena de proteínas, todo el proceso que interviene en la "lectura" de la información genética incluye tres procesos:

- Transcripción: donde un segmento de ADN sirve como molde para producir una molécula de ARN.
- Traducción: es la transferencia de información del lenguaje de los nucleótidos al de los aminoácidos. Esto ocurre en tres pasos: iniciación, alargamiento y terminación.
- Duplicación: la duplicación del ADN produce dos moléculas de ADN idénticas, cada una con una cadena original (parental) y otra nueva (cadena hija).

Estructura y función celular

La comprensión humana de la naturaleza de la vida llegó muy lentamente. Los primeros naturalistas solo observaron características macroscópicas de los seres vivos. El desarrollo de la microscopia permitió escudriñar así el mundo celular. Desde los esfuerzos de R. Hooke y A. Leeuwenhoek muchos científicos han colaborado en la invención de diversos microscopios para ver las células y sus componentes.

A continuación se mencionan las características del microscopio óptico o compuesto y electrónico.

Microscopio compuesto

Los microscopios compuestos se utilizan especialmente para examinar objetos transparentes, o cortados en láminas tan finas que se ven transparentes. Se emplea para aumentar o ampliar las imágenes de objetos y organismos hasta 1000 veces su tamaño. El microscopio óptico común está conformado por tres sistemas:

1. Sistema óptico:
   Ocular: sistema de lentes por donde se observa y aumenta el diámetro
   Objetivos: sistema de lentes que se colocan sobre el objeto a observar
2. Sistema mecánico
   Tubo: proporciona sostén a oculares y objetivos
   Cremallera: tornillo que mueve el tubo hacia arriba o hacia abajo
   Micrométrico: tornillo que permite el enfoque fino del objeto
   Revólver: disco giratorio que sostiene los objetivos y permite cambiarlos
   Platina: placa que sostiene las preparaciones, posee un orificio central que permite el paso de la luz
   Pinzas: sostiene la preparación sobre la platina
   Pie o base: soporte del microscopio
   Columna: une la platina con la base y sostiene el condensador y el diafragma
   Brazo: une el tubo con la platina
3. Sistema de iluminación:
   Condensador: sistema de lentes que concentran los rayos luminosos
   Diafragma: regulador de la cantidad de luz que pasa a través de la preparación
   Espejo o lámpara: fuente de luz natural o artificial que permite las observaciones



Microscopio electrónico

En 1931 Ernst Ruska inventa y utiliza este tipo de microscopio, el cual emplea una corriente de electrones como fuente de energía en lugar de luz (Cervantes, 2008). Este haz de electrones tiene un poder de penetración bajo en el medio normal, por lo que para facilitar su desplazamiento (en línea recta) es necesario realizar el vacío en el medio tubo a través del que se desplazan. Los aumentos máximos conseguidos son del orden de dos millones de aumento.

Este microscopio consta de:

- Un filamento de tungsteno (cátodo) que emite electrones
- Condensador o lente electromagnético que concentra el haz de electrones
- Objetivo o lente electromagnético que amplía el cono de proyección del haz de luz
- Ocular o lente electromagnético que aumenta la imagen
- Protector que amplía la imagen
- Pantalla fluorescente que recoge la imagen para hacerla visible al ojo humano

De la misma forma en que el átomo es considerado la unidad básica de la materia, la **célula** es la unidad de estructura y función de todo ser vivo.
En la década de 1850 Rudolph Virchow fue el primero en informar que las células se reproducen y cada una de ellas proviene de otra preexistente. Mathías Schleiden, Theodor Schwann y Virchow establecen la **teoría celular**. Ésta constituye uno de los conceptos generales y fundamentales de la biología y establece que la célula es la unidad básica estructural y funcional de los seres vivos, y que todos los organismos están constituidos por una o más de éstas. De esta forma, se resume en tres postulados:

Anatómico: Todos los seres vivos están formados por células
Fisiológico: En las células se llevan a cabo todas las reacciones metabólicas
Origen: Las células nuevas se forman por división de las células preexistentes

Organización celular

En el planeta toda la vida adquiere una gran diversidad de formas, que funcionan y se disponen de manera diferente. La célula, que se compone de una variedad de moléculas, es la unidad básica de la vida, al combinarse varias células semejantes forman un tejido, los tejidos a su vez se conforman de órganos, los órganos trabajan en conjunto en los sistemas y los sistemas de órganos se unen para formar un ser vivo completo u organismo. Más allá de esto, los seres vivos se organizan en niveles, por ejemplo, poblaciones, comunidades, ecosistemas y la biosfera.

Niveles inferiores
Célula: unidad estructural y funcional de todo ser vivo.
Tejido: conjunto de células.
Órgano: conjunto de tejidos.
Aparato: conjunto de órganos.
Sistema: conjunto de aparatos.
Organismo: conjunto de sistemas que conforman a un ser vivo.

Niveles superiores
Especie: conjunto de organismos con características similares.
Población: conjunto de organismos de la misma especie.
Comunidad: conjunto de poblaciones.
Ecosistema: conjunto de elementos bióticos y abióticos.
Biosfera: esfera de vida.

Tejidos
Un tejido es el conjunto de células con las mismas características, éstas desempeñan una función común. Mencionaremos dos tipos de tejidos, vegetales y animales.

a) Tejidos vegetales

En los vegetales, del embrión de la semilla se forman tejidos diferenciados llamados meristemos o tejidos de formación, a partir de los cuales se desarrollan cuatro clases de tejidos con células más especializadas (Ville, 2000).

Meristemáticos
Células indiferenciadas, proporcionan el crecimiento activo de tallos y raíces (meristemos apicales) permiten el crecimiento longitudinal. El aumento en diámetro en la planta esta relacionado con el cambium de corcho.

Fundamentales
Células más o menos diferenciadas, contribuyen a la nutrición y reserva de alimentos. El tejido fundamental más sencillo es el parénquima, también encontramos el esclerénquima y el colénquima.

Protectores
Células con paredes gruesas, protegen a las plantas contra la desecación, lesiones mecánicas y variaciones de la temperatura; se clasifican en dos grupos: epidérmico y suberoso.

Conductores o vasculares
Células cilíndricas, vivas o muertas, función principal, conducción (xilema- traqueidas, conduce savia bruta de la raíz a las hojas/ floema- vasos cribosos, transportan la savia elaborada desde las hojas al resto del vegetal.

b) Tejidos animales
Existen cuatro tejidos básicos: epitelial, conjuntivo, muscular y nervioso.

Epitelial
Tejido que reviste y tapiza superficies de los órganos (boca, esófago, vagina, vías respiratorias, etc.).

Conectivo o conjuntivo
Sus funciones son de sostén, relleno y unión de diferentes partes del cuerpo, como los huesos, sangre y cartílagos

Muscular
Sus células reciben el nombre de fibras musculares que al unirse forman músculos, su función es contracción o movimiento.

Nervioso
La unidad estructural es la célula nerviosa (neurona), permite recibir y responder a estímulos del ambiente.

Todos los seres vivos, microscópicos, macroscópicos, unicelulares, pluricelulares, desempeñan diversas funciones como: obtener energía y nutrimentos, síntesis y degradación de sustancias, crecimiento y reparación, y para garantizar la continuidad de la vida, se reproducen. Todas estas funciones son realizadas por partes especializadas de cada célula, las cuales describiremos a continuación:

Citoplasma. Es la región de la célula que se localiza entre la membrana celular y el núcleo, constituido por agua, carbohidratos, lípidos, CO_2, proteínas y sales minerales. En él se encuentran inmersos los organelos y realiza la mayor parte de las funciones metabólicas de la célula.

Citoesqueleto. Formado por microfibrillas y microtúbulos dispersos en el citoplasma, mantiene la forma (armazón) de la célula.

Membrana celular o plasmática. Separa al medio interno del medio externo, regula la entrada y salida de sustancias, ayudando a mantener a la célula y al organismo en un ambiente homogéneo y constante.

Pared celular. Es una capa rígida externa a la membrana plasmática, formada por celulosa, se presenta en células vegetales y sus principales funciones son: proporcionar protección y sostén a las células.

Núcleo. Es una estructura oval localizada cerca del centro de la mayoría de las células, es el centro de mando de la célula (controla la herencia y dirige la división celular), contiene ADN.

Nucléolo. De forma esférica, no tiene membrana propia, es un conglomerado de ARN (ácido ribonucleico) y proteínas, cuya función es sintetizar subunidades de ribosomas, durante la división celular el material del nucleolo se dispersa y cuando la célula está en reposo, se condensa.

Centriolos. Filamentos formados por nueve pares de microtúbulos a su alrededor, formadores de cilios y flagelos. Su principal función es organizar las fibras del huso mitótico y es el origen de los cuerpos basales de cilios y flagelos.

Retículo endoplásmico. Red membranosa que comunica a la membrana plasmática con el núcleo. Es de dos tipos; liso y granular, este último asociado a los ribosomas participa en la síntesis de proteínas. La función del liso depende del tipo celular.

Ribosomas. Gránulos densos formados de ARN y proteínas, participan en la síntesis de proteínas, siendo el lugar donde se ensamblan los aminoácidos para formar las proteínas.

Aparato de Golgi. Estructura que consiste en una pila de sáculos aplanados y ligeramente encorvados, que presentan vesículas en los bordes. En él, se procesa, empaca y secreta productos celulares modificados.

Lisosomas. Son vesículas que contienen enzimas digestivas hidrolíticas, efectúan la degradación de moléculas y partes de la célula, también participan en la apoptosis (muerte programada de la célula).

Peroxisomas. Estructuras vesiculares que descomponen ácidos grasos y convierten el peróxido de hidrógeno en agua y oxígeno.

Vacuolas. Son sacos membranosos dentro de los que se encuentran diversas sustancias. En plantas, almacenan sustancias como aceites y almidón, en protozoarios, las vacuolas contráctiles bombean el exceso de agua.

Mitocondrias. Cuerpos ovoides con doble membrana, la membrana interna se pliega para formar crestas; contienen ADN, ribosomas y sustancias requeridas para la cadena respiratoria. Son los sitios donde se realiza la respiración celular y producen moléculas de ATP.

Cloroplastos. Organelos ovoides, exclusivos de células vegetales, con doble membrana, contienen clorofila. Son el sitio donde se efectúa la fotosíntesis.

Plásmido: Fragmento circular de ADN, que utiliza los ribosomas de la célula, el ARN y las enzimas para sintetizar sus propias proteínas y duplicarse a sí mismo) (Biggs, 2000).

Células procariontas y eucariontas

Las células se han dividido en dos grupos, según el grado de complejidad en la organización de sus estructuras: células procariontes y células eucariontes.

Las células procariontas presentan las siguientes características:

- Pequeñas, generalmente entre una y diez micras.
- Sin núcleo
- El ADN se encuentra en un cromosoma único en el citoplasma.
- Organelos transitorios si llegan a estar presentes.
- Inmóviles o con flagelos simples.
- Ausencia de mitosis.
- Con plásmido (fragmento circular de ADN, que utiliza los ribosomas de la célula, el ARN y las enzimas para sintetizar sus propias proteínas y duplicarse a sí mismo) (Biggs, 2000)
- Pared celular formada por azúcares y péptidos, algunas veces celulosa.
- Ejemplos: bacterias, algas verde-azules.

Las células eucariontas presentan las siguientes características:

- Grandes, generalmente entre 10 y 1000 micras.
- Núcleo delimitado por membrana.
- El ADN se ubica en varios cromosomas localizados en el núcleo.
- Organelos permanentes, presentan cloroplastos y mitocondrias con membrana.
- Cuando son móviles, presentan cilios o flagelos complejos.
- Presentan mitosis y meiosis.
- Sin plásmido
- Pared celular formada por celulosa o quitina, los animales carecen de ella.

Ejemplos: protozoarios, algas, hongos, plantas y animales

Metabolismo (anabolismo y catabolismo)

Todas las células utilizan energía para llevar a cabo sus procesos, para esto desarrollan una compleja serie de reacciones químicas, a la cual se le conoce como metabolismo. La mayoría de estas reacciones están ligadas en secuencias que se llaman rutas metabólicas, en el metabolismo se diferencian dos tipos de rutas: las anabólicas y las catabólicas

Anabolismo
Comprende la elaboración de moléculas complejas a partir de sencillas, necesitando un aporte de energía. Un ejemplo lo vemos en la síntesis de carbohidratos durante la fotosíntesis o la de proteínas, a partir de aminoácidos.

Catabolismo
Consiste en la desintegración de moléculas complejas hasta convertirlas en simples; como ejemplo mencionaremos la descomposición de la glucosa durante los procesos respiratorios en dióxido de carbono, agua y energía.

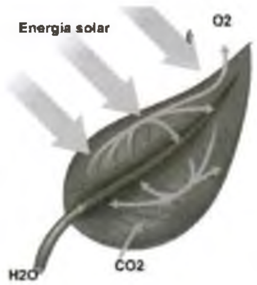
FOTOSÍNTESIS

La fotosíntesis es el proceso por medio del cual, los organismos autótrofos convierten la energía proveniente del Sol en energía química aprovechable. La siguiente reacción química describe este proceso.

$$6CO_2 + 6H_2O + \text{energía} \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2$$

Los organismos capaces de realizar la fotosíntesis son las plantas, algas y cianobacterias.

La fotosíntesis requiere la participación de los siguientes factores:



- Cloroplastos. Cada célula presenta entre 25 y 75 cloroplastos (Gold, 1983) formados por estroma, tilacoides (sitio donde se efectúa esta fase), grana, lamelas y varios pigmentos, sobresaliendo las clorofilas a y b.
- Luz. La luz del Sol se capta y transforma en energía química, los pigmentos tienen un espectro de absorción distinto, capaz de absorber diferentes longitudes de onda, la fotosíntesis más eficaz se lleva a cabo sobre los espectros de absorción del rojo (650-740 nanómetros.) y el azul (490-495 nanómetros).
- Agua. Actúa como donador de electrones y de ella se desprende el oxígeno molecular liberado durante el proceso.
- CO_2. Proporciona el carbono y el oxígeno para la síntesis de glucosa.
- Estomas. aberturas contenidas en el envés de la hoja y son el sitio de intercambio de gases de las plantas, entra el CO_2 y sale el O_2 producido.

La fotosíntesis se realiza en dos etapas

Fase luminosa
Se efectúa en los tilacoides de los cloroplastos y en la cual, se consideran dos grupos de reacciones:

a) las no cíclicas (aciclicas): en donde la fotosíntesis se efectúa en dos sitios conocidos como fotosistemas I y II. De manera contraria a lo que podíamos pensar, el proceso de captación de luz inicia en el fotosistema II y continúa en el I (Valdivia, 2002):
   - Fotosistema II: la energía activa a la clorofila *a* del centro de reacción, liberándose un electrón que es captado por el sistema de transporte de electrones; este electrón se mueve a través de varios acarreadores y en uno de los pasos se forma ATP, luego el electrón liberado entra al fotosistema I y casi al mismo tiempo ocurre la ruptura de la molécula de agua generando, electrones, protones y oxígeno que se desprende.
   - Fotosistema I: se utiliza la energía del electrón para la reducción del NADP a NADPH. Esta reducción requiere dos electrones y dos protones del estroma.

b) las cíclicas: en donde solo participa el fotosistema I. Cuando un electrón del fotosistema I es activado por la luz, pasa a través de un sistema de transporte de electrones y regresa (cíclico). En estas reacciones no se produce NADPH, pero genera ATP.

Fase oscura
Se le conoce también como Ciclo de Calvin, se efectúa en el estroma de los cloroplastos, donde se usa el ATP y NADPH (que se originan en la fase luminosa) para convertir el CO_2 y el H_2O en glucosa.
La siguiente reacción sintetiza este proceso:

$$CO_2 + NADPH + H + ATP \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + NADP + ADP + Pi \text{ (fosfato inorgánico)}$$

Y en el proceso completo, se realizan las siguientes reacciones químicas: carboxilación, primera fosforilación, reducción, formación de glucosa, regeneración, segunda fosforilación.

Quimiosíntesis

La nutrición autótrofa se divide en dos tipos: fotosíntesis y quimiosíntesis

La quimiosíntesis es el proceso de producción de compuestos orgánicos a partir de energía liberada de reacciones químicas. Algunos organismos como las bacterias (que se encuentran en pantanos, aguas profundas del mar o que fijan el N atmosférico) que pueden realizar este proceso son llamadas quimiosintéticas o quimioautótrofas.

RESPIRACIÓN



Hemos percibido que todos los seres vivos requieren de un constante aporte de energía para realizar sus funciones vitales. Algunos la deben obtener mediante la degradación de moléculas producidas por la fotosíntesis. En el caso de la respiración aerobia, la glucosa se oxida y el oxigeno se reduce, liberando energía (ATP), CO_2 y agua. Como se muestra en la siguiente reacción:

$$C_6H_{12}O_6 + 6\ O_2 \longrightarrow 6\ CO_2 + 6\ H_2O + \text{energía}$$

La respiración **aerobia** se realiza en tres etapas:

a) Glucólisis (se efectúa en el citoplasma, fuera de la mitocondria).

En el citoplasma, se rompe la molécula de la glucosa en dos moléculas de ácido pirúvico (piruvato).

b) Ciclo de Krebs (se realiza en la matriz mitocondrial).

Este proceso debe su nombre a quien lo descubrió, Sir Hans Krebs (1937), y recibe también el nombre de "Ciclo del ácido cítrico". Es una secuencia repetitiva de transformaciones que se efectúan en las crestas mitocondriales, donde el ácido pirúvico se descompone por medio de enzimas y forma un grupo acetilo, este grupo se combina con la coenzima A formando la acetil-coenzima A, la cual lo transfiere y transforma en ácido cítrico. A partir de esto se llevan a cabo una serie de reacciones químicas, en las que intervienen enzimas como descarboxilasas y coenzimas aceptoras de hidrógeno como el NAD (dinucleótido de niacina-adenina) y el FAD (dinucleótido de flavin-adenina). En cada una de estas reacciones se separan moléculas para formar H, CO_2, H_2O y energía.

c) Cadena respiratoria (transporte de electrones) (crestas mitocondriales)

La última fase de la respiración aeróbica es la cadena de transporte de electrones o cadena respiratoria. Existe una relación entre la glucólisis, ciclo de Krebs y la cadena de transporte de electrones, los productos obtenidos en las dos primeras fases activan la tercera.

La membrana interna de la mitocondria contiene moléculas transportadoras de electrones, un transportador recibe un electrón y los pasa a otro transportador en una serie de reacciones de reducción-oxidación conocidos como complejos I, II y III. Este proceso es aerobio, ya que el aceptor de electrones es el oxígeno; cuando el oxígeno acepta electrones se combina con dos hidrogeniones o protones para formar una molécula de agua.

El movimiento de los protones de un lado a otro del compartimento de la mitocondria, permite la generación de energía para fosforilar al ADP a ATP, proceso conocido como fosforilación quimiosmótica (Curtis, 2000).

La siguiente ecuación, sintetiza las reacciones de la respiración aerobia: glucólisis, ciclo de Krebs y cadena de transporte de electrones:

$$C_6H_{12}O_6 + 6\ O_2 + 6\ H_2O + 38\ ATP \longrightarrow 6\ CO_2 + 12\ H_2O + 38\ ATP$$

Energéticamente se obtienen dos ATP en la glucólisis, dos en el ciclo de Krebs y los 34 restantes se generan en la cadena de transporte de electrones (Campbell, 2001).

Tenemos ahora que algunas formas de respiración son **anaerobias** (ocurren en ausencia de oxígeno). En este caso el piruvato es transformado (fermentación) por el NADH a cualquier alcohol y CO_2 o ácido láctico, dependiendo de las enzimas que presente el organismo en particular.
En la fermentación *alcohólica* el ácido pirúvico sufre una descarboxilación enzimática y pierde una molécula de CO_2, con lo cual se transforma en acetaldehído, para convertirse después, en alcohol etílico (C_2H_5OH). La levadura *Saccharomyces cerevisiae* es la base de la fabricación de la cerveza, el vino y el pan.
En la fermentación *ácida*, el ácido pirúvico se reduce, convirtiéndose en ácido láctico ($C_3H_6O_3$). Varios microorganismos como bacterias y hongos, convierten la leche en yogurt, queso y crema agria. El ácido proporciona el sabor característico de estos alimentos.



En la respiración anaerobia se generan solamente dos moléculas de ATP por cada molécula de glucosa procesada, esto, fue y sigue siendo adecuado para las necesidades de muchos organismos.

División celular

Mitosis

La mitosis la realizan las células somáticas, cuando una se divide, da origen a dos células hijas que poseen información genética idéntica a la original, lo cual conserva el mismo número cromosómico y las características del linaje celular. Todos los procesos de crecimiento, reparación de tejidos, desarrollo y reemplazo de células muertas que ocurren en los seres vivos (pluricelulares), son posibles gracias a la mitosis. En organismos unicelulares, la mitosis equivale a su mecanismo de reproducción.
La mitosis se divide en cuatro fases:

Profase

La cromatina se enrolla para formar cromosomas visibles, la envoltura nuclear y el nucléolo desaparecen haciendo visibles los cromosomas. En células animales los centriolos se mueven hacia los polos opuestos de la célula, formando un huso cromático y una estructura en forma de estrella llamada áster. Las células vegetales carecen de centríolo y áster, pero sí presentan huso cromático (Overmire, 2001). Al final de esta fase el nucléolo y la membrana nuclear desaparecen.



Metafase

Los cromosomas se ordenan o acomodan uniéndose a las fibras del huso cromático, en el ecuador de la célula.



Anafase

Los cromosomas se separan por sus centrómeros y las cromátides se dirigen a los polos opuestos de la célula, se forma un surco de separación (animales) o una placa celular (vegetales).



Telofase

Se reintegra la membrana nuclear y el nucléolo, los cromosomas se alargan y vuelven a su forma de filamentos de cromatina, desaparece el huso cromático. Al final de esta fase se lleva a cabo la citocinesis (división del citoplasma en dos partes que se separan formando dos células hijas).



Meiosis

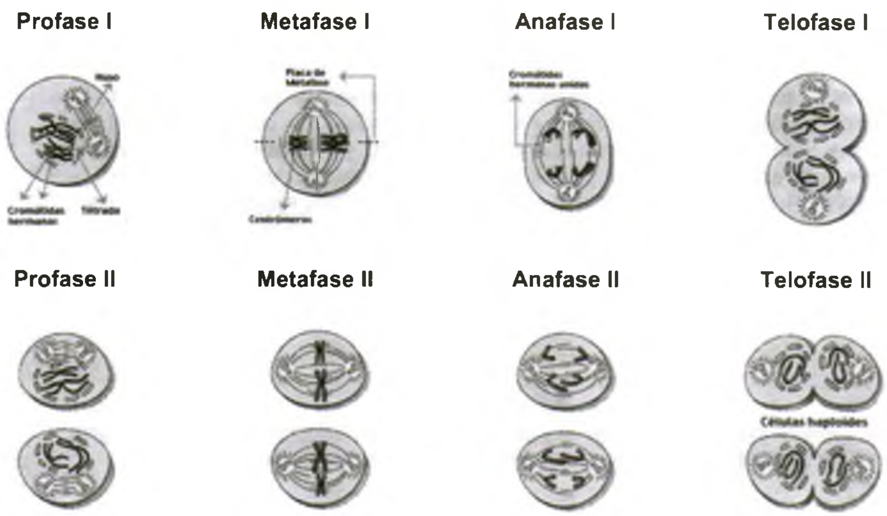
La meiosis es un tipo de reproducción que formará cuatro células haploides y sólo se realiza en células sexuales (germinales). La meiosis se efectúa por medio de dos divisiones nucleares, llamadas la primera y segunda división meiotica; cada una a su vez consta de cuatro fases:
Primera división meiótica – Profase I, Metafase I, Anafase I, Telofase I.
Segunda división meiótica – Profase II, Metafase II, Anafase II, Telofase II (Ville, 1996).

Primera división meiótica

Profase I: los cromosomas homólogos se acercan y aparean (sinapsis), este apareamiento se extiende a todo lo largo de toda la cromátida e involucra en realidad a cuatro cromátides y por ello cada complejo de cromosomas homólogos apareados se denomina tétrada. Se lleva a cabo el entrecruzamiento o "crossing-over", que consiste en el intercambio de un segmento de un cromosoma por el segundo correspondiente del otro cromosoma homólogo. El entrecruzamiento es un mecanismo decisivo que permite la recombinación del material genético de los dos progenitores.
Metafase I: los cromosomas homólogos se alinean a lo largo del ecuador.
Anafase I: cada miembro del par homólogo, se aleja a los polos opuestos del huso, comienza a formarse el surco de separación.
Telofase I: los cromosomas llegan a los polos, se reconstruyen los dos núcleos hijos, desaparece el huso cromático, reaparece el nucléolo y la membrana nuclear. El citoplasma se divide y se generan dos células con un número haploide de cromosomas cada uno.

Segunda división meiótica

Profase II: en las células hijas, los cromosomas se observan al condensarse la cromatina en el núcleo, aparece el huso y desaparece la membrana nuclear.
Metafase II: los cromosomas (ya no en pares) se acomodan en el ecuador, unidos a las fibras del huso.
Anafase II: los cromosomas se dividen por su centro en dos cromátides que emigran a cada uno de los polos de la célula, se inicia la formación del segundo surco de separación.
Telofase II: los cromosomas llegan a los polos, cada célula se divide, dando origen a dos, por lo que se producen cuatro células haploides cada una con un miembro de cada par de cromosomas homólogos



Ejercicios

Elija la opción correcta.

1. Constituyentes básicos de las membranas celulares de los vegetales y animales.
   a) Grasas neutras
   b) Carbohidratos
   c) Fosfolípidos
   d) Esteroides

2. Tipo de proteínas que se repliegan sobre sí mismas, dándoles una apariencia globular.
   a) Terciarias b) Primarias c) Secundarias d) Cuaternarias

3. Son características de células procariontes:
   a) móviles, pluricelulares, sin plásmido
   b) pequeños, con mitosis y meiosis, pared celular de quitina
   c) unicelulares, inmóviles, con núcleo
   d) pequeños, organelos transitorios, ausencia de mitosis

4. ¿Dónde se llevan a cabo las reacciones luminosas de la fotosíntesis?
   a) Cloroplasto b) Tilacoide c) Ribosomas d) Membrana

5. Cuando el pH es alterado o la temperatura aumenta, se desactivan...
   a) los carbohidratos
   b) los lípidos
   c) las proteínas
   d) las vitaminas

6. Fase de la mitosis donde los cromosomas se separan por sus centrómeros y las cromátides se dirigen a los polos opuestos de la célula.
   a) Anafase
   b) Telofase
   c) Profase
   d) Metafase

7. Bioelementos que constituyen a los seres vivos.
   a) P, N, Fe, O, C, H
   b) C, O, N, H, S, P
   c) Ca, Mg, K, C, O, Fe
   d) S, Na, Cu, Ag, P, K

8. ¿En qué parte de la mitocondria se realiza el ciclo de Krebs?
   a) Núcleo
   b) Crestas
   c) Citoplasma
   d) Matriz

9. Son ejemplos de organismos autótrofos.
   a) Ave, pasto, serpiente
   b) Elefante, hongo, cianobacteria
   c) Helecho, alga, girasol
   d) Protozoario, hiena, salmón

10. Organelos que participan en la apoptosis celular.
    a) Centriolos b) Vacuolas c) Peroxisomas d) Lisosomas

2 Genética

Propósito: el alumno describirá los aspectos teóricos y prácticos de la genética.

Herencia

La genética, es la rama de la biología que se ocupa de los fenómenos de la herencia y variación, estudiando las leyes que rigen las semejanzas y diferencias entre individuos con ascendientes comunes.

Como parte del vocabulario básico aplicado en temas genéticos, listamos los siguientes conceptos:

- Gene o gen: unidad básica de herencia, cada miembro de un par de ellos se llama alelo.
- Alelo: miembro de un par de factores hereditarios en un cromosoma específico.
- Cromosomas: base física de la herencia, portadores de los genes.
- Fenotipo: conjunto de características físicas de los individuos.
- Genotipo: hace referencia a los alelos que un individuo recibe en el momento de la fertilización.
- Homocigoto dominante: individuo que en su genotipo presenta el par de alelos dominantes (AA).
- Homocigoto recesivo: individuo que en su genotipo presenta el par de alelos recesivos (aa).
- Heterocigoto: individuo que en su genotipo presenta el par de alelos diferentes, un dominante y un recesivo.
- Híbrido: organismo formado de la cruza de dos padres cuyos alelos son diferentes.
- Locus: la ubicación física de un gen dentro de un cromosoma.

Leyes de Mendel

El monje austriaco Gregorio Mendel (1822-1884), asistió dos años a la universidad de Viena, donde estudió matemáticas y ciencias, fue profesor sustituto de ciencias naturales en un colegio local. El trabajo de Mendel llevado a cabo en un jardín e ignorado hasta después de su muerte, marca el comienzo de la genética moderna (Curtis, 2000). Sus primeros trabajos en genética los realizó en ciertas variedades de plantas de chícharo (*Pisum sativum*), las cuales presentaban siete diferentes caracteres, cada uno con dos variaciones:

Forma de la semilla / lisa o arrugada.
Color de la semilla / amarilla o verde.
Color de la cubierta de la semilla / gris o blanca.
Forma de la vaina / lisa o arrugada.
Color de la vaina / verde o amarilla.
Longitud del tallo / largo o corto.
Posición de la flor / axial o terminal (Valdivia, 2002).

Las primeras plantas que Mendel usó en sus cruzas se consideran la generación progenitora o gen P, y a sus descendientes les llamó 1ª generación filial. Al cruzar en la generación P, plantas con semillas lisas con plantas de semillas rugosas obtuvo en la F1 solamente plantas con chícharos lisos y ninguno con rugosos, entonces decidió llamar *carácter dominante* a los que se expresaran o aparecieran en la F1 y *carácter recesivo* a los que no se expresaran. A continuación cruzó por autofecundación, plantas de la primera generación para obtener la 2ª generación o sea la F2, contando y analizando estadísticamente el número de plantas con caracteres diferentes (Valdivia, 2002).

Mendel propuso que cada carácter de la planta estaba controlado por un par de factores separados, cada uno proveniente de un progenitor. Los factores corresponden a las unidades genéticas que conocemos como gen. Utilizó letras como símbolos para representar los pares de genes, mayúsculas para representar alelos dominantes y minúsculas para los alelos recesivos. A los organismos de línea pura se les denomina *homocigotos*, ya que poseen dos factores iguales para una característica y aquéllos que presentan dos factores diferentes son llamados *heterocigotos*.

Los trabajos que efectuó Gregorio Mendel lo condujeron a elaborar sus leyes:

1ª Ley "Segregación": establece que:

- Cada individuo tiene dos factores de cada característica.
- Los factores se segregan (separan) durante la formación de los gametos.
- Cada gameto contiene sólo un factor de cada par de factores.
- La fecundación proporciona a cada individuo dos factores de cada característica (Mader, 2008).

	R	R
r	Rr	Rr
r	Rr	Rr

2ª Ley "Distribución independiente": postula que:

- Cada par de factores se segrega (o agrupa) de manera independiente de los otros pares.
- En los gametos pueden ocurrir todas las combinaciones posibles de factores (Mader, 2008).

	R	r
R	RR	Rr
r	Rr	rr

Entrecruzamiento y variabilidad genética

Como vimos en la meiosis, el número de cromosomas se mantiene constante generación tras generación. Sin ella, el número de cromosomas de cada generación aumentaría de forma continua, además, produce dos tipos de variaciones genéticas: el entrecruzamiento genético y el sorteo independiente de cromosomas homólogos.

Como se mencionó en la profase I de la meiosis, se efectúa el entrecruzamiento y para valorarlo es necesario tener presente que los miembros de un par homólogo pueden llevar instrucciones diferentes para los mismos rasgos genéticos. Como resultado, las cromátides que se mantienen unidas por un centrómero ya no son idénticas. Por tanto, cuando las cromátides se separan durante la meiosis II, algunas de las células hermanas reciben cromosomas hermanos con genes recombinados. Con esto, la descendencia tiene una secuencia diferente de alelos y, por tanto, una secuencia de genes distinta a la de sus padres (Curtis, 2000).

La variabilidad genética es una medida de la tendencia de los genotipos de una población a diferenciarse. Los individuos de una misma especie no son idénticos. Si bien, son reconocibles como pertenecientes a la misma especie, existen muchas diferencias en su forma, función y comportamiento. En cada una de las características que podamos nombrar de un organismo existirán variaciones dentro de la especie. Por ejemplo, los jaguares del pantanal en Brasil son casi del doble del tamaño (100 kilos) que los jaguares mexicanos (entre 30 y 50 kilos) y, sin embargo, son la misma especie *(Panthera onca)* (CONABIO, 2010). Gran parte de la variación en los individuos proviene de los genes, es decir, es variabilidad genética. La variabilidad genética se origina por mutaciones, recombinaciones y alteraciones en el cariotipo (el número, forma, tamaño y ordenación interna de los cromosomas). Los procesos que dirigen o eliminan variabilidad genética son la selección natural y la deriva genética.



La variabilidad genética permite la evolución de las especies, ya que en cada generación solamente una fracción de la población sobrevive y se reproduce transmitiendo características particulares a su progenie.

Esto nos permite ver claramente que la reproducción asexual transmite exactamente la misma combinación de cromosomas y genes de la célula original, en cambio, la variación genética lograda gracias a la reproducción sexual se debe a tres factores:

1. El entrecruzamiento: Las cromátidas hermanas portan genes recombinados.
2. El sorteo independiente: Los gametos tienen diferentes cromosomas recombinados.
3. A la fecundación: El cigoto recibe cromosomas recombinados de ambos padres (Mader, 2008).

Teoría de las mutaciones

Una mutación es un cambio permanente en la estructura del ADN que puede ocasionar alteraciones visibles en el organismo. Entre los agentes que causan mutaciones figuran los rayos X, los rayos ultravioleta, los compuestos radiactivos y una diversidad de sustancias químicas (benceno, asbesto, formaldehído) a estos agentes se les conoce como mutagénicos. La mayoría de las mutaciones ocurren "espontáneamente", lo que significa que no conocemos los procesos físicos y químicos que las provocan. En general se dice que las mutaciones ocurren al azar, en cualquier célula de un organismo ya sea somática o reproductora.

Los cambios a nivel de nuestra información genética son diversos, se explicarán brevemente dos de los principales tipos de mutaciones (Bernstein, 1998).

Mutaciones generales:

Espontáneas. Se producen sin causa específica.

Puntuales. Se deben a la sustitución inadecuada de una sola base nitrogenada.

Inducidas. Son causadas debido a los efectos de un agente conocido.

Letales. Pueden ocasionar la muerte.

Silenciosas. No causan sustitución en los aminoácidos y pueden pasar inadvertidas.

Mutaciones cromosómicas:
Deleción o supresión. Donde un segmento del cromosoma se pierde o rompe.
Translocación. Unión de fragmentos cromosómicos con un cromosoma no homólogo.
Duplicación. El fragmento de un cromosoma se une a un cromosoma homologo y aparece repetido.
Inversión. Un segmento cromosómico se rompe y se vuelve a unir, pero en forma invertida a la secuencia original.
Inserción. Una sección del cromosoma se introduce en otro lugar del mismo, o en otro cromosoma
Aunque la mayor parte de las mutaciones son neutras o potencialmente perjudiciales, las mutaciones son indispensables para la evolución porque estos cambios aleatorios de la secuencia del ADN son la fuente ultima de toda variación genética (Audesirk, 2003). Las nuevas secuencias de bases sufren una selección natural cuando los organismos compiten para sobrevivir y reproducirse; ocasionalmente, una mutación resulta benéfica en las interacciones del organismo con su ambiente.

Clonación, hibridación y alimentos transgénicos.

La **clonación** es el producto de copias de ADN, células u organismos genéticamente iguales mediante medios asexuales. Esta técnica se puede practicar para producir cientos de copias idénticas del mismo gen. Algunas de las razones por las cuales los científicos clonan son:



1. Para determinar la diferencia en la secuencia de bases entre un gen normal y uno mutado
2. Para modificar genéticamente organismos en forma benéfica, por ejemplo cuando se usa para modificar a un ser humano se le llama terapia génica y cuando es otro organismo, transgénico (Mader, 2008).

La tecnología del ADN recombinante y la reacción en cadena de polimerasa (PCR) son dos de los procedimientos que los científicos usan para clonar el ADN con fines diversos.
A menudo antes de que un determinado fragmento de ADN o de ARNm pueda ser clonado, secuenciado o manipulado primero debe ser localizado. La técnica para localizar estos fragmentos específicos es **la hibridación** de ácidos nucleicos. Aquí se aprovechan las propiedades de apareamiento de las bases nitrogenadas. Cuando se somete a altas temperaturas o altos pH, los puentes de hidrógeno se rompen y las dos cadenas del ADN se separan. Cuando se enfría la solución estos puentes se vuelven a formar y restituyen a la molécula nuevamente. Cuando se mezclan ADN de fuentes diferentes, las colisiones al azar que se producen permiten que dos cadenas que poseen secuencias complementarias (aunque sea solo en parte), se encuentren y formen una doble hélice híbrida. (Curtis, 2000).
Cuando este ADN se mezcla con una cadena de ARN de cadena simple, puede formarse un hibrido ADN-ARN.

Hoy en día, las moléculas de ARNm se usan para identificar y aislar fragmentos de ADN correspondientes a los genes que los codifican y viceversa. Técnicas basadas en hibridación se usan habitualmente en el diagnóstico de enfermedades, la identificación de microorganismos patógenos, el estudio de perfiles de expresión génica, la localización de genes en cromosomas o de ARNm en tejidos (hibridación in situ) o en la comparación de especies hibridando su ADN.



Los **alimentos transgénicos**

En la actualidad se modifican genéticamente seres vivos, con el fin de obtener de ellos productos deseados y benéficos para los seres humanos. Se han desarrollado técnicas para introducir genes diferentes en diversos alimentos; una planta conocida como pomate es el resultado de esta tecnología, ya que produce papas bajo la tierra y tomates sobre la superficie (Mader, 2008).

También se han transferidos genes a cultivos de algodón, maíz y papa, logrando que estas plantas sean resistentes a las plagas o herbicidas. Se espera que estos y otros cultivos genéticamente modificados tengan una mayor producción y ya se están vendiendo comercialmente. También se han obtenido de diversas plantas, proteínas humanas tales como hormonas, factores de coagulación y anticuerpos de sus semillas, a partir del frijol de soya se ha obtenido un anticuerpo que se puede usar para tratar el herpes genital.

Ejercicios

Elija la opción correcta.

1. Miembro de un par de factores hereditarios en un cromosoma específico:
   a) Alelo b) Fenotipo c) Gen d) Híbrido

2. ¿Quién es considerado el padre de la Genética?
   a) Darwin
   b) Helmont
   c) Mendel
   d) Krebs

3. ¿A la ubicación física de un gen dentro de un cromosoma, se le llama?
   a) Heterocigoto b) Genotipo c) Locus d) Gene

4. ¿Qué ley establece que los factores se segregan durante la formación de los gametos?
   a) de las variaciones
   b) de la distribución independiente
   c) de la variabilidad
   d) de la segregación

5. Los procesos que dirigen o eliminan variabilidad genética son:
   a) la selección natural y la deriva genética
   b) la distribución y el entrecruzamiento
   c) la mutación y la evolución
   d) la fecundación y el entrecruzamiento

6. Agente que puede ocasionar una mutación.
   a) Ácido acetilsalicilico
   b) Rayos gama
   c) Tiamina
   d) Hidróxido de magnesio

7. ¿Qué sucede en la mutación conocida como inserción?
   a) un segmento del cromosoma se pierde o rompe
   b) el fragmento de un cromosoma se une a un cromosoma homologo y aparece repetido
   c) una sección del cromosoma se introduce en otro lugar del mismo, o en otro cromosoma
   d) se unen fragmentos cromosómicos con un cromosoma no homólogo

8. Técnica donde se modifican genéticamente seres vivos, diversas plantas y animales, introduciendo en ellos genes diferentes.
   a) Clonación b) Transgénicos c) Hibridación d) Duplicación

9. La tecnología del ADN recombinante y la reacción en cadena de polimerasa (PCR) son dos de los procedimientos que los científicos usan para…
   a) clonar b) hibridar c) mutar d) formar nuevos seres

10. ¿Qué es un cromosoma?
    a) La ubicación física de un gen en un cromosoma
    b) La unidad básica de la herencia
    c) El conjunto de características físicas de los individuos
    d) La base física de la herencia, portador de los genes

3 Origen de la vida, evolución y biodiversidad

Propósito: el alumno identificará las teorías acerca del origen de la vida y la evolución, así como la clasificación de los seres vivos.

Del creacionismo a la teoría de la evolución

Desde la antigüedad, se ha tratado de mostrar el origen de la vida en nuestro planeta, lo que nos lleva a enunciar diversas teorías para explicarlo.

Teoría creacionista

Donde se entiende que cada uno de los diferentes tipos de organismos fue creado individualmente, por la intervención directa de un ser divino (Audesirk, 2003).

Teoría de la generación espontánea

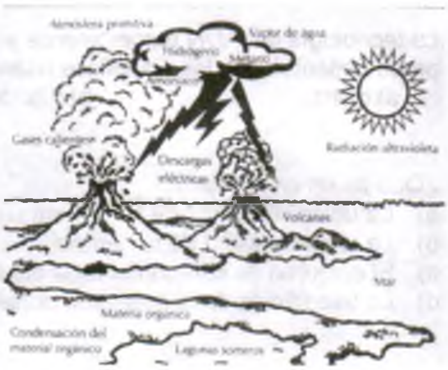
Surgió como una teoría materialista. Para los griegos Tales de Mileto, Anaximandro, Jenófones y Demócrito, la vida surgió de lodo, o de la combinación de los elementos (agua, tierra, aire y fuego).
En 1667, Johann B. Helmont, dio una receta que permitía la generación espontánea de roedores. Colocando ropa llena de sudor con trigo en un recipiente de boca ancha, al cabo de 21 días el olor cambia, y del fermento del trigo y de la ropa, surgen los ratones.
En 1668, Francisco Redi propone los primeros experimentos que permitieron desechar la idea de la generación espontánea. Logró demostrar que los gusanos que infestan la carne son sólo larvas que provenían de los huevecillos de las moscas.
A mediados del siglo XVIII, John Needham experimentó con botellas las cuales llenó con caldos nutritivos hirviéndolos durante dos minutos y luego los sellaba, sin embargo se infestaban de microorganismos. Concluyó que la materia orgánica en descomposición era animada por una fuerza vital.
Lazzaro Spallanzani, realiza el mismo experimento que Needham, hirviendo sus medios de cultivo durante lapsos mayores, cerrándolos con más cuidado y en ninguno aparecieron microbios.
En 1864, Louis Pasteur invalida totalmente la generación espontánea. Diseñó matraces de cuello de cisne en los que colocó soluciones nutritivas que hervía hasta esterilizar. Así, transcurrían semanas y meses, aunque los caldos estaban siempre en contacto con el aire no se generaron organismos; su explicación fue que la humedad contenida en los cuellos, actúa como filtro, por lo que bacterias y partículas quedaban adheridas a sus paredes y no podían llegar hasta los caldos, si a estos matraces se les rompía el cuello en poco tiempo aparecían las colonias de bacterias. A principios del siglo XX, Svante Arrhenius propone la **teoría de la panspermia**, que determina el origen de la vida a partir de esporas o bacterias provenientes del espacio exterior, los cuales al llegar al planeta tierra se reprodujeron y por evolución crearon a todos los seres vivos.

Teoría de la primera proteína (microesférulas).

Hipótesis postulada por Sidney Fox, menciona que los aminoácidos se polimerizan abióticamente cuando se exponen al calor seco. Sugiere que una vez que los aminoácidos estuvieron presentes en los océanos, podrían haberse acumulado en charcos poco profundos, luego el calor del sol formo los protenoides (pequeños polipéptidos con propiedades catalíticas). Cuando esto se simula en un laboratorio estos protenoides forman microesférulas que son estructuras compuestas solo por proteínas, con muchas propiedades celulares.

Teoría Quimiosintética de Oparín–Haldane

Consideran una atmósfera primitiva de hace 3500 millones de años, sin oxígeno libre (reductora) en la cual se encuentran diferentes compuestos químicos, como agua, amoniaco, metano, vapor de agua e hidrógeno, interactuando con volcanes, radiaciones UV, descargas eléctricas y lagunas o mares someros, lo cual permitió por síntesis bioquímica, el desarrollo y evolución de moléculas sencillas a complejas con alto peso molecular que dieron origen a los primeros seres vivos "protobiontes". (Biggs, 2000).

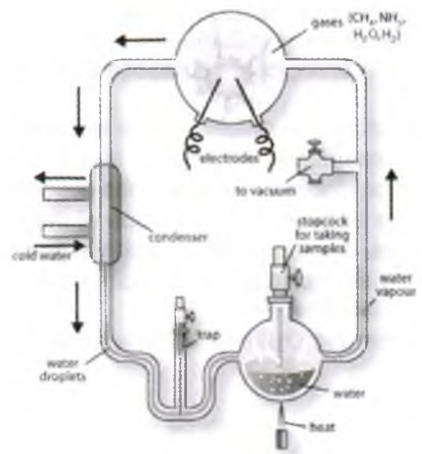


Formas precelulares

La integración de formas precelulares se lleva a cabo en pequeños huecos formados en las zonas costeras que pierden agua por evaporación, que al disminuir la cantidad de agua, aumenta la concentración de sustancias en la "sopa primigenia"; las macromoléculas tienden a aislarse del medio y en tales sistemas formados se llevan a cabo reacciones químicas de síntesis; el sistema precelular es arrastrado por el agua del mar. Para este paso evolutivo, se han propuesto a los coacervados como un modelo de sistemas antecesores de la vida.
Los **coacervados** son agregados moleculares que se forman al combinarse dos o más coloides; tienen el aspecto de pequeñas gotas limitadas suspendidas en el medio acuoso (Curtis, 2000).
Algunas propiedades de los coacervados son: presentan una delicada membrana que los independiza del medio líquido en que se encuentran; que absorben sustancias del ambiente y que por tanto "crecen"; las sustancias absorbidas reaccionan, transformando la composición química de la gota, y se llegan a fragmentar.

Experimento de Stanley Muller y Harold Urey

Realizan de forma experimental, la teoría de Oparin-Haldane. En un circuito cerrado lograron demostrar los procesos de evolución química que pudieron haber sucedido. En un matraz colocaron una mezcla de vapor de agua, metano, amoniaco e hidrógeno y la sometieron a descargas eléctricas durante una semana. Al hacer el análisis del agua que se había condensado, encontraron aminoácidos como glicina, alanina, acido aspártico y glutámico, los cuales son componentes de los seres vivos (Ville, 1996).



Teoría endosimbiótica de Margulis L.

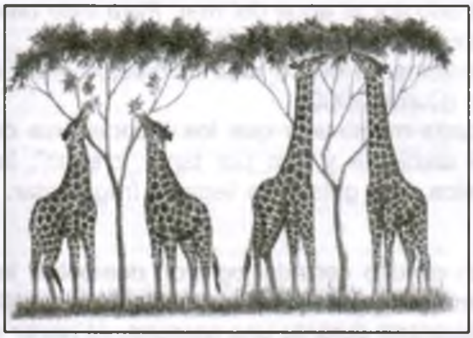
Hace 30 años la investigadora Lynn Margulis propuso el primer mecanismo para explicar cómo se dio el paso de los procariontes a los primeros eucariontes. Margulis postula la llamada *teoría endosimbiótica* para explicar el origen de algunos organelos eucarióticos.



La hipótesis postula que las células procariontas se combinaron para formar células eucariontas; cada fusión ocurría cuando un procarionte más pequeño entraba a las células como alimento, pero al no ser digerido empezó a vivir dentro del procarionte grande. Las dos células convivieron por muchas generaciones y desarrollaron especializaciones que las hicieron independientes.
Por ejemplo, las mitocondrias evolucionaron cuando el procarionte grande, que adquiría energía por fermentación, ingirió al procarionte menor que adquiría energía por la vía más eficiente, de respiración aeróbica. Después de muchas generaciones la célula más grande se especializó en adquirir el alimento, mientras que la célula más pequeña se especializó en la respiración aeróbica, con el tiempo la célula menor llegó a ser una mitocondria dentro de una célula eucariótica.
Los cloroplastos igualmente evolucionaron de la difusión de una célula grande que se alimentaba de materiales orgánicos a una célula más pequeña que efectuaba fotosíntesis, con el tiempo la célula más grande se especializó en adquirir materiales inorgánicos y la célula más pequeña en la fotosíntesis. La célula menor llegó a ser un cloroplasto dentro de una célula eucariótica (Bernstein, 1998). En conclusión, las propiedades de los seres vivos son el resultado de la interacción evolutiva de un conjunto molecular, más que de moléculas aisladas.

Corrientes filosóficas de la teoría evolucionista

Uno de los primeros biólogos en creer en la existencia de la evolución y en relacionar la diversidad con la adaptación al ambiente fue *Jean-Baptiste de Lamarck* (1744-1829).



Propone que todos los seres poseen un impulso natural hacia la perfección, además menciona que los organismos evolucionan mediante la herencia de caracteres adquiridos, proceso por el que los organismos sufren modificaciones en función del uso y desuso de algunas partes y heredan estas modificaciones a sus descendientes.
En su modelo más conocido propuso, que los antepasados de las jirafas estiraban el cuello para alimentarse de las hojas altas de los árboles y en consecuencia se alargaba su cuello, sus descendientes habrían heredado este cuello más largo y nuevamente se estiraban para alcanzar hojas más altas. Con el tiempo este proceso dio origen a jirafas de cuello muy largo.

Charles Darwin naturalista inglés (1809-1882) viaja a las Islas Galápagos (15 islas rocosas, frente a las costas de Ecuador) y estudia un grupo de aves llamadas pinzones, los cuales mostraban diferencias en la forma de sus picos. Estos estudios llevaron a explicar que las especies adaptadas se reproducían y sobrevivían en mayor número que las menos adaptadas. A este proceso lo llamó *selección natural*.
Con todo esto, revoluciona el pensamiento biológico de su época cuando propone una teoría sobre la evolución de los seres vivos.
La teoría formulada, como la selección natural, se resume en los siguientes puntos:

- Variación: los organismos cambian presentando variaciones al azar en muchas de sus características.
- Sobreproducción: al reproducirse los organismos generan más descendientes de los que pueden sobrevivir.
- Lucha por la existencia: si nacen más organismos de los que el medio puede mantener, se establece entre ellos una lucha por la existencia, o sea, una competencia por la sobrevivencia.
- Sobrevivencia del más apto: el medio seleccionará a los organismos más adaptados, es decir, aquellos que tengan las características favorables para sobrevivir.
- Herencia de las variaciones favorables: los organismos adaptados, se reproducen y transmiten las nuevas características a los hijos.

Por su parte *Alfred Russel Wallace* (1823-1913) propuso de manera independiente a la selección natural, como el proceso que podía explicar el origen de una especie. Como resultado de su viaje al Amazonas, afirma que: toda especie surge en coincidencia de tiempo y espacio con una preexistente y estrechamente relacionada (Mader, 2008). Y en 1958 imprevistamente mientras sufría de un ataque de Malaria se le ocurrió la idea de la supervivencia del más apto.

Diversas pruebas apoyan la teoría de que los organismos están relacionados a través de un ancestro común. Las líneas de prueba fundamentales incluyen fuentes como: paleontológicas, anatómicas, embriológicas, genéticas y biogeográficas.

a) Paleontología

Es la rama de la Biología que estudia las formas de vida presentes en épocas geológicas, o sea, los fósiles.
El registro fósil representa el registro histórico de la vida en la Tierra, lo encontramos registrado en las capas de rocas o estratos, estas capas constituyen los periodos o épocas de cuya disposición se deduce el calendario geológico.

b) Pruebas anatómicas

Establece las similitudes y diferencias entre las estructuras de distintas clases de organismos. En el estudio de la anatomía comparada se distinguen tres tipos de órganos:

Homólogos
Estructuras que son anatómicamente similares debido a que se han heredado de un ancestro común, aunque su función actual es diferente, como la aleta de una foca, la pata de un caballo o el brazo del hombre.
Análogos
Estructuras que son anatómicamente diferentes debido a que no se han heredado de un ancestro común, aunque su función actual es similar. Como las alas de mariposa, de un ave y un murciélago.

Vestigiales
Son estructuras anatómicas completamente desarrolladas en un grupo de organismos, pero reducidas y quizá carezcan de función en grupos similares. En la mayoría de las aves, las alas están perfectamente desarrolladas y son utilizadas para volar, sin embargo, otras especies cuentan con alas reducidas y no funcionales (como en el avestruz).

c) Pruebas embriológicas
A partir de las etapas tempranas del desarrollo, encontramos semejanzas entre los organismos, por ejemplo, en los animales las etapas embrionarias de segmentación y gastrulación son casi iguales, ya sea que se trate de un gusano, un molusco, un pez o el hombre. A medida que es más cercana la relación evolutiva entre dos organismos, más semejanza se observa en el curso de su desarrollo embrionario (Ville, 1996).

d) Pruebas genéticas
Los evolucionistas que estudian el desarrollo de los seres vivos han encontrado una gran cantidad de genes relacionados con el desarrollo en diversos animales. Estas diferencias son posibles debido a pequeñas diferencias en los mismos genes. Las especies comparten similitudes en cuanto a estructuras cromosómicas, secuencia de aminoácidos en las proteínas y composición del ADN, todo esto, permite investigar el parentesco entre los organismos.

e) Pruebas biogeográficas
El estudio de la distribución de los seres vivos en la Tierra (biogeografía) representa un apoyo a la evolución, suponiendo que las formas relacionadas cambiaron en una región, después se diversificaron y se distribuyeron en otras áreas, formaron nuevas especies adaptadas a las condiciones de su hábitat.

La **teoría sintética** o teoría moderna evolutiva, explica la evolución como un proceso basado en cambios genéticos poblacionales.

La evolución de una especie ocurre con el paso de mucho tiempo y numerosas generaciones, por lo que es la población y no el organismo individual lo que cambia lentamente. Por tanto, la unidad de estudio de la evolución no es el individuo, sino la población (Weisz, 1987).

La genética de poblaciones, estudia los cambios genéticos que ocurren en una población, todo en relación con el proceso evolutivo. En una población, los individuos deben vivir en una proximidad física para que se puedan reproducir y realizar un intercambio de genes. Al paso de muchas generaciones algunas características se heredan y otras no, lo cual origina nuevas especies, diferentes de las originales –proceso llamado *especiación*– El aislamiento geográfico crea oportunidades para la especiación.

Clasificación de los seres vivos

La clasificación de los organismos es útil porque permite agrupar a los seres vivos, considerando sus características. La *taxonomía* es la rama de la Biología que clasifica a los organismos con base en sus similitudes y parentescos evolutivos. Para clasificar a los seres vivos se consideran algunas características que los relacionan por su similitud, tales como estructuras morfológicas, constitución química de las moléculas, registro fósil y desarrollo embrionario. Mientras más similitudes presenten entre sí, mayor será el parentesco evolutivo lo que permite ubicarlos en el mismo grupo o nivel taxonómico.

Se considera a Carl von Linneo (1707-1778) botánico sueco, como el iniciador de la taxonomía, pues elaboró un complejo sistema para clasificar a las plantas con base a la morfología reproductiva de las especies y propuso un sistema jerárquico de clasificación de los organismos que utiliza niveles taxonómicos.
Niveles o categorías taxonómicas:

- Reino o Taxon. En él se concentra el mayor número de seres vivos y corresponde a una agrupación de filos o ramas en los animales o divisiones en vegetales con caracteres semejantes y generales.
- Phylum o Phyla. Cada uno de los grandes grupos en los que se separa un reino, en esta categoría se congregan varias clases, con similitudes biológicas.
- Clase. Conjunto de órdenes.
- Orden. Conjunto de familias.
- Familia. Corresponde a un grupo de géneros con estrecha relación evolutiva.
- Género. Constituido por uno o más especies con una gran cercanía evolutiva.
- Especie. Categoría en la que todos los organismos tienen un gran parecido morfológico, poseen el mismo número cromosómico, son capaces de reproducirse entre sí y tienen descendencia fértil.

En algunos casos, en que las diferencias entre los grupos son muy sutiles, se usan subdivisiones, tales como: suborden, subclase y subespecie.

En nuestra especie, los niveles taxonómicos son:

Reino: Animalia

Phyla: Cordados

Clase: Mamíferos

Orden: Primates

Familia: Homínidos

Género: Homo

Especie: Sapiens

Además propone en base a su anatomía, la clasificación de los seres vivos en dos reinos, animal y vegetal; aporta el sistema de nomenclatura binomial que establece las bases para asignar de manera correcta el nombre científico a las especies biológicas. Las principales reglas de este sistema para nombrar a una especie son: Escribir en latín, usar letra cursiva (itálica) o en su defecto, subrayarse, el nombre científico de un organismo está formado por dos palabras, la primera, corresponde al género y debe iniciar con letra mayúscula, la segunda palabra corresponde a la especie y se escribe con minúscula, para otorgar el rango de nombre científico, éste debe publicarse en una revista especializada, por ejemplo la revista Taxon, que es consultada por los expertos en el área.

Nombre común	Nombre científico
Cebolla	*Allium cepa*
Perro	*Canis familiaris*
Gato	*Felis domesticus*
Cucaracha	*Periplaneta americana*
Calabaza	*Cucúrbita mexicana*

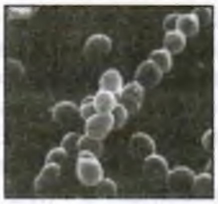
El evolucionista Ernst Haeckel a finales del siglo XIX y con el desarrollo del microscopio propuso la construcción de un tercer reino, el de los Protistas (cuyas características son intermedias entre vegetales y animales). Haeckel reconoció que algunos de estos organismos carecían de núcleo celular y los denominó monera, posteriormente las bacterias fueron reconocidas en 1956 por Herbert Copeland como reino Monera independiente de los protistas (Curtis, 2000). En 1969 Robert Whittaker, propone una clasificación con base en tres criterios: estructura celular, nivel de organización y forma de nutrición, postulando 5 reinos: Monera, Protista, Fungi, Plantae y Animalia.

Reino Monera

A este reino pertenecen organismos unicelulares procarióticos, carentes de membrana nuclear, con una molécula de DNA, donde se localiza el material genético, pared celular formada por polisacáridos, nutrición heterótrofa o autótrofa, reproducción asexual por bipartición o gemación. Se divide en dos grupos:

❖ Bacterias

Llamados bacterias, son consideradas como los seres vivos más antiguos, existen en todos los hábitats (cosmopolitas), de tamaño pequeño, en su forma pueden ser esféricas (cocos), dispuestos en pares (diplococos), agrupados en racimos (estafilococos), formando largas cadenas (estreptococos), cilíndricas (bacilos), espiralada (espirilos y espiroquetas), o de coma (vibriones). DNA y RNA dispersos en el citoplasma, heterótrofas o autótrofas, aerobias o anaerobias, reproducción sexual por bipartición, causan enfermedades importantes al ser humano como la tuberculosis, tifoidea, neumonía, lepra, etc., de importancia ecológica, desintegradoras, fijan nitrógeno atmosférico, contribuyen a la fertilidad del suelo, esenciales para las fermentaciones industriales y algunas producen antibióticos.



❖ Arqueobacterias

Se localizan en ambientes extremos y poco propicios para la vida, tales como lagos y cuerpos de agua muy calientes (bacterias termófilas) o muy salados (bacterias halófitas), en ambientes ácidos (bacterias acidófilas) e incluso pantanos y plantas de tratamiento de aguas negras.

Reino Protista

Incluye organismos eucarióticos, producto de la evolución de los eucarióticos primitivos, heterótrofos unicelulares o pluricelulares, con nutrición heterótrofa o autótrofa. En este grupo de organismos encontramos el

paso de algunos seres unicelulares a pluricelulares y que muestran diversas etapas de desarrollo en las cuales también pueden constituir colonias o talos.

El *talo* es la estructura poco diferenciada, característica de las algas (cuerpo de un alga), el cual no presenta estructuras complejas y especializadas (raíz, tallo y hojas) en su lugar aparecen rizoides, estípite y lámina ó fronda.

La *colonia* es la estructura constituida por células individuales que se asocian en grupos, difieren de los órganos multicelulares auténticos en que las células individuales preservan un alto grado de independencia, con frecuencia están conectadas por cordones citoplasmáticos que unifican a la colonia en grado tal, que puede ser considerada como un solo organismo. Para nuestros fines, este reino se divide en dos grupos:

1. Pluricelulares autótrofos

❖ Clorofitas (algas pluricelulares)

Algas verdes con diversos tipos de clorofila, pueden vivir en aguas dulces o marinas, almacenan almidón. Ejemplos, *Spirogyra*, *Ulva* y *Volvox* (colonial).

❖ Feofitas

Algas cafés, almacenan carbohidratos, su morfología es simple. Ejemplos, *Sargassum* y *Macrocystis*.

❖ Rodofitas

Algas rojas, marinas, poseen gran valor nutritivo (las envolturas negro-rojizas de los rollos de sushi consisten en hojas procesadas de *Porphyra*), de ellas se obtiene un producto similar a una gelatina (agar), que se usa para medios de cultivo bacteriano.

2. Protozoarios

❖ Zoomastigóforos



Se mueven por medio de flagelos, encontramos organismos de vida libre, la mayoría parásitos, por ejemplo, *Trypanosoma gambiense* (mal del sueño), transmitido por la mosca tsé-tsé o la *Trichomonas vaginalis*, organismo transmitido sexualmente, que produce la vaginitis, infecta vagina y uretra en la mujer y próstata, vesicula seminal y uretra en el hombre.

❖ Sarcodinos (protistas con seudópodos)

Derivan de flagelados, que al perderlo, se mueven por seudópodos o falsos pies, que son extensiones citoplasmáticas utilizadas para desplazarse y englobar su alimento por el proceso de endocitosis, por ejemplo: *Entamoeba histolytica*, causante de la disentería amiboidea en el ser humano.

❖ Ciliados

Tienen estructuras de locomoción llamados cilios, forman parte del plancton de aguas dulces. Por ejemplo, *Paramecium*.

❖ Esporozoarios

Organismos parásitos que viven dentro de animales, forman esporas, sin medios de locomoción. Ejemplo, *Plasmodium vivax* causante de la malaria o paludismo, transmitida por el mosquito Anófeles o el *Toxoplasma gondii* causante de la toxoplasmosis en gatos y personas.



Reino Fungi

Los hongos carecen de clorofila, heterótrofos, forman filamentos o hifas cuyo conjunto se llama micelio, pared celular de quitina. Constituido de tres divisiones:

❖ Cigomicetos

Con hifas multinucleadas, no septadas, reproducción asexual (esporas) y sexual (conjugación). Algunos causan el moho negro del pan (*Rhizopus*) o se generan en el estiércol (*Pilobolus*).

❖ Ascomicetos

Con hifas septadas, producen esporas sexuales (en ascas) y asexuales (en conidios). Ejemplos, levaduras que son utilizadas para la fermentación de cerveza, pulque y vinos (*Saccharomyces*), una especie de *Penicillium* es la fuente de la penicilina y otras especies dan a los quesos su sabor y aroma característicos (como en el roquefort y el camembert).

❖ Basidiomicetos



Poseen hifas septadas y producen esporas sexuales en basidios. Incluye a los champiñones, hongos venenosos (*Amanitas*), alucinógenos (*Psilocybe mexicana*), comestibles y parásitos como el tizón (huitlacoche).

Reino Plantae

Pertenecen todas las plantas que conocemos, pluricelulares, eucarióticas, con tejidos y órganos bien desarrollados, autótrofas, con pared celulósica, la mayoría terrestres, con ciclos de vida complejos, con alternancia de generaciones. Constituido por cuatro divisiones:

❖ Briofitas

Comprende las hepáticas y musgos, carecen de sistema de conducción, sin tallos, hojas, ni raíces, crecen pegadas al sustrato o sobresalen unos cuantos centímetros, requieren un hábitat húmedo para que el gametofito sobreviva, éste representa la reproducción sexual, en tanto que las esporas la asexual (esporofito).

❖ Pteridofitas

Los helechos, licopodios y colas de caballo fueron las plantas que se desarrollaron con mayor éxito durante el Carbonífero, cosmopolitas, presentan hojas, tallos y raíces, ciclo de vida con predominio del esporofito y la reducción del gametofito. Usados como plantas ornamentales y se sospecha de gran valor medicinal.

❖ Anthophyta (Angiospermas-plantas con flor)

Conocidas como plantas con flores, con órganos especializados, tallo (con tejidos conductores bien desarrollados, xilema y floema), hojas (donde se efectúa la fotosíntesis), raíces (proporcionan anclaje y absorción), y la flor constituida por sépalos (cáliz), pétalos (corola), los estambres (formados por la antera, granos de polen y filamento), carpelo (dividido en tres regiones estigma, estilo y ovario que contiene a los óvulos). El óvulo se convierte en semilla y el ovario en fruto.

❖ Coniferophyta (Gimnospermas-plantas sin flor)

Fue la rama de las gimnospermas que evolucionó antes que las plantas con flor. Constituido por cuatro grupos, coníferas, cicadáceas, gingko y gnetófitos. Plantas leñosas (árboles), óvulos y semillas expuestos en la superficie de los esporofitos. el gametofito se reduce, en los pinos se observan los conos o estróbilos (piñas) femeninos y masculinos, algunas veces, en el mismo árbol, al madurar los conos, quedan expuestas las semillas. Algunas de las especies de este grupo son: *Abies* (oyamel), *Taxodium* (ahuehuete), *Cupressus* (cedro), *Pinus* (pinos), entre otros.



Reino Animmalia

A este reino pertenecen todos los animales pluricelulares, eucarióticos, con nutrición heterotrófica, poseen tejidos, órganos y sistemas especializados, predominio de reproducción sexual aunque con ciertas variaciones (alternancia de generaciones, hermafroditismo, partenogénesis, regeneración), todos son móviles, desarrollo de sistemas nervioso, muscular, esquelético y endocrino. Por comodidad los biólogos dividen a los animales en dos grandes categorías: Invertebrados (carecen de espina dorsal) y Vertebrados (con espina dorsal o columna vertebral) (Audesirk, 2003). El grupo de *invertebrados* que mencionaremos incluye:

❖ Porífera

Marinos y de agua dulce, macroscópicos, sedentarios, pared del cuerpo formada por células flageladas aplanadas llamadas células collar, un esqueleto formado de agujas de carbonato de calcio o sílice, llamadas espículas, reproducción sexual y asexual (gemación).Ejemplo, esponjas.

❖ Cnidarios

Marinos, cuerpo de forma hueca, un orificio o boca rodeada de tentáculos con cnidocitos (células urticantes), boca que también hace función de ano, con dos formas de vida: pólipo que siempre es fijo, colonial, que se reproduce asexualmente (gemación), y la medusa, forma sexuada de vida libre, nadadora. Los corales, anémonas e hidras, forman parte de este grupo.



❖ Platelmintos
Llamados gusanos planos, carecen de sistemas respiratorio y circulatorio, con reproducción sexual (casi todos hermafroditas) y asexual, con ciclos de vida complejos, parásitos y de vida libre. Ejemplos, *Taenia solium* (solitaria) y *Fasciola hepaticae*

❖ Nemátodos
Llamados gusanos cilíndricos, cuerpo no segmentado, la mayoría microscópicos o de tamaños importantes, aparato digestivo con dos aberturas, boca y ano, carecen de sistemas circulatorio y respiratorio, reproducción sexual con sexos separados, de vida libre hasta parásitos. *Ascaris lumbricoides* es uno de los parásitos intestinales más comunes del ser humano.

❖ Anélidos
Gusanos anillados, con cuerpo dividido en segmentos, con sistema circulatorio, digestivo y excretor, marinos (gusanos tubícolas), en aguas dulces (sanguijuelas) o bien terrestres (lombriz de tierra). En los marinos la respiración es branquial y cutánea, hermafroditas con fecundación cruzada.

❖ Moluscos
Cuerpo blando, dividido en tres partes, cabeza, pie muscular y masa visceral con un repliegue llamado manto, algunos secretan una concha calcárea, con reproducción sexual, algunos con sexos separados, otros hermafroditas, se distinguen tres grupos: los bivalvos (almejas, mejillones y ostras); los gasterópodos (caracoles y babosas) y los cefalópodos (calamares, nautilus y pulpos).

❖ Artrópodos
Del griego *arthron-* articulación y *podos-* pies, son animales con exoesqueleto, metamorfosis, sistemas respiratorio, circulatorio, sensorial y nervioso bien desarrollado. Grupo que debido a su gran tamaño, puede presentar variaciones en la clasificación. Aquí describiremos tres divisiones: insectos, arácnidos y crustáceos.



Los *insectos* son el grupo de organismos más numeroso en especies (con más de 900.000) (Mader, 2008), presentan tres regiones del cuerpo, cabeza con un par de antenas, aparato bucal, ojos simples y compuestos, tres pares de patas y uno o dos pares de alas. Ejemplos, mariposas, hormigas, moscas, abejas, grillos, etc.

En el grupo de los *arácnidos* encontramos a las arañas, alacranes, ácaros, garrapatas y escorpiones, se les conoce como quelicerados por la presencia de quelíceros, que presentan conductos de las glándulas de veneno y los pedipalpos que son usados para agarrar, probar y masticar el alimento, organismos terrestres y acuáticos, con cuatro pares de patas y por lo regular ocho a diez de ojos.
Entre los *crustáceos* reconocemos a los camarones, cangrejos, langostinos, langostas, pulgas de agua, cochinillas y percebes, su cuerpo presenta dos regiones (cefalotórax y abdomen), la mayoría de las especies presentan cinco pares de patas y dos pares de antenas.

❖ Equinodermos
Las estrellas de mar, erizos, pepinos de mar y galletas pertenecen a este grupo, presentan endoesqueleto de carbonato de calcio, con espinas, carecen de cabeza, organismos sexuales y sistema vascular hidráulico que le permite desplazarse.

Vertebrados
Animales acuáticos y terrestres, con presencia de un notocordio, cordón nervioso, hendiduras branquiales faríngeas y cola postnatal, con órganos de los sentidos, unisexuales o con dimorfismo sexual, fecundación externa o interna. En la actualidad este grupo incluye, lampreas, peces cartilaginosos, peces óseos, anfibios, reptiles, aves y mamíferos. Sin embargo, a medida que el conocimiento acerca del tema ha ido en aumento, ha sido necesario modificar estos aspectos taxonómicos. Así, a partir de los años setenta, Carl Woese estudió la bioquímica de los organismos y propuso que se clasificaran en tres categorías amplias, llamadas Dominios: Eubacteria (cianobacterias, bacterias y virus), Archaebacteria (bacterias de ambientes extremos) y Eukarya (donde se agrupa a los reinos Protista, Fungi, Plantae y Animalia) (Miller, 2007).

Ejercicios

Elija la opción correcta.

1. Científico que invalida totalmente la teoría de generación espontánea:
   a) Needham
   b) B. Helmont
   c) L. Pasteur
   d) Demócrito

2. Son considerados los antecesores de la vida:
   a) protobiontes
   b) coacervados
   c) gases atmosféricos
   d) formas precelulares

3. En la nomenclatura binomial, el nombre debe escribirse de la siguiente forma:
   a) iniciar y finalizar con mayúsculas
   b) se escribe en español
   c) se subraya y la segunda palabra corresponde al género
   d) se usa letra cursiva

4. El nivel o categoría taxonómica que corresponde a un grupo de géneros con estrecha relación evolutiva es:
   a) género b) familia c) clase d) taxón

5. Herbert Copeland propone la creación del reino…
   a) Protista b) Monera c) Fungi d) Animal

6. Reino que agrupa a células eucariontes, unicelulares con nutrición autótrofa y heterótrofa:
   a) Animalia b) Fungi c) Monera d) Protista

7. Puntos que resumen la teoría de la Selección Natural:
   a) variación y lucha por la existencia
   b) uso y desuso de los órganos
   c) sobrevivencia del más apto y automejoramiento de las especies
   d) mutaciones y sobreproducción

8. Prueba de la evolución, donde se estudia la distribución de los seres vivos en la Tierra.
   a) Biogeográfica
   b) Embriológica
   c) Paleontológica
   d) Anatómica

9. Las bacterias que se localizan en ambientes extremos, integran la división…
   a) monera
   b) pluricelulares autótrofos
   c) protozoarios
   d) arqueobacterias

10. La división Anthophyta se caracteriza por:
    a) carecer de sistemas de conducción, sin tallos, raíces, ni hojas
    b) tener óvulos y semillas expuestas, leñosas y con reducción del gametofito
    c) poseer hojas, tallo y raíz, predominio del esporofito y la reducción del gametofito
    d) tener xilema y floema, semillas, flores y frutos

4 Reproducción humana

Propósito: el alumno describirá las diferentes formas de reproducción, la estructura y función de los aparatos reproductores. Además, identificará los aspectos generales y específicos relacionados con la reproducción sexual.

Formas de reproducción

Una característica primordial de los seres vivos es la de generar descendientes y así perpetuar la vida. Entre ellos, se han desarrollado formas diversas, desde las más sencillas, en las cuales a partir de un progenitor se producen organismos idénticos entre sí (reproducción asexual), hasta formas complejas, en las que intervienen células femeninas y masculinas (reproducción sexual).

La *reproducción sexual*, implica la presencia de células especializadas, conocidas como células sexuales, germinales o gametos; éstas se forman en lugares específicos de cada individuo y tienen en su núcleo la mitad del número de cromosomas característico de la especie humana (23), por lo que reciben el nombre de células haploides (n); el número diploide (2n) es de 46 cromosomas. Los seres vivos que presentan esta reproducción (plantas y animales), se propagan de manera lenta y al unir sus gametos (fecundación), permiten el intercambio de su material, el cual implica una gran variabilidad genética. Este intercambio presenta una ventaja que se traduce en una mayor facilidad de adaptación a diferentes medios. Cuando en la reproducción participan gametos, en algunos organismos se pueden presentar las siguientes variaciones:
Isogamia: los gametos son idénticos en tamaño y estructura, los dos son móviles.
Anisogamia: uno de los gametos es de mayor tamaño que el otro, ambos gametos son móviles.
Oogamia: uno de los gametos, habitualmente el de mayor tamaño, no es móvil.

La *reproducción asexual*, se lleva a cabo sin necesidad de la unión o presencia de gametos o células especializadas y sólo participa un progenitor. Su velocidad de propagación es muy alta, por lo que el incremento en el número de individuos es elevado y en poco tiempo. Además al carecer de intercambio genético, toda la población resultante es idéntica (no hay variabilidad genética), lo que conlleva a la dificultad de adaptarse a diferentes medios, aumentando enormemente, la tasa de mortalidad.
Existen cuatro tipos de reproducción asexual:

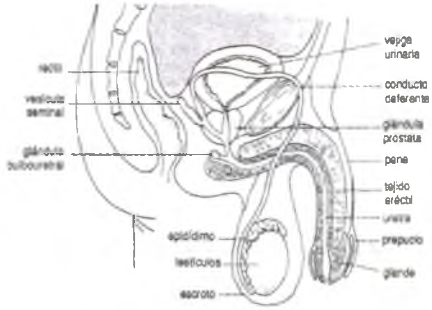
- Bipartición: se divide un organismo en dos células hijas del mismo tamaño, como en bacterias, amibas, algas y organismos unicelulares.
- Gemación: un nuevo organismo se origina a partir de una yema o brote que se forma en el progenitor, luego, ese brote se separa del resto del organismo y crece hasta formar un individuo, es el caso de las levaduras y celenterados (hidras, corales).
- Esporulación: es una serie de divisiones celulares que originan células llamadas esporas, las cuales permanecen cautivas por un tiempo y después son liberadas. Los hongos, musgos y helechos se reproducen por esporulación.
- Multiplicación vegetativa: algunas plantas superiores se pueden propagar a partir de estructuras especiales de la planta progenitora, estas estructuras pueden ser hojas (enredaderas), estolones (fresas), bulbos (cebolla, gladiola, ajo), estacas (vid, rosal, hiedra, geranio), etcétera.
- Partenogénesis: es el desarrollo de un individuo a partir de un óvulo sin fecundar, como en algunos insectos.

Anatomía y fisiología de los aparatos reproductivos

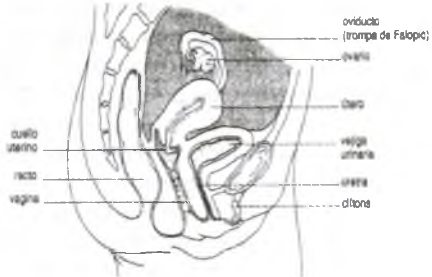
La reproducción sexual es la función por medio de la cual algunas plantas y animales, incluyendo el hombre, se perpetúan. La descendencia tendrá características genéticas, físicas y fisiológicas parecidas, pero nunca idénticas, a los progenitores. Esta reproducción comprende la fusión de gametos haploides, lo cual puede ocurrir por fecundación externa o interna, en los seres humanos es interna, lo que significa que los gametos se unen dentro del cuerpo de la mujer.

A continuación se describirán las principales estructuras de los sistemas reproductivos y los fenómenos involucrados en la reproducción humana.

Aparato reproductor masculino, formado por:
Pene: órgano copulador, deposita el semen en la vagina.
Testículos: producen espermatozoides y hormonas sexuales masculinas (testosterona y andrógenos).
Escroto: protege y contiene a los testículos fuera de la cavidad corporal, manteniéndolos a una temperatura adecuada.
Túbulos seminíferos: producen espermatozoides.
Epidídimo: maduración y almacén de los espermatozoides.
Conductos deferentes: transporta espermatozoides desde el epidídimo hacia las glándulas accesorias.
Glándulas accesorias (vesícula seminal, próstata): producen líquido seminal, que junto con los espermas, forman el semen.
Uretra: transporta el semen y la orina al exterior.



Aparato reproductor femenino, formado por:
Ovarios: producen óvulos y hormonas sexuales femeninas (progesterona y estrógenos).
Trompas uterinas (de Falopio): conducen el óvulo liberado por el ovario hasta el útero.
Útero: constituido por la parte superior llamada cuerpo y la inferior llamada cuello o cérvix, contiene el endometrio que recibe el óvulo fecundado y en él se desarrolla el embrión.
Vagina: órgano de copulación y conducto del parto, vía de excreción del flujo menstrual.
Vulva (labios mayores, menores y clítoris): los labios dan protección a la entrada de la vagina y el clítoris equivale al glande del pene en el sistema reproductor masculino.
Monte de Venus: estructura abultada situada sobre la sínfisis del pubis, está cubierta de piel con vellosidad que aparece a partir de la pubertad.

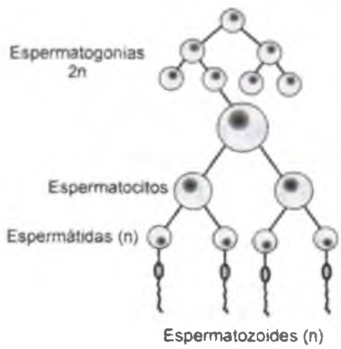


Gametogénesis

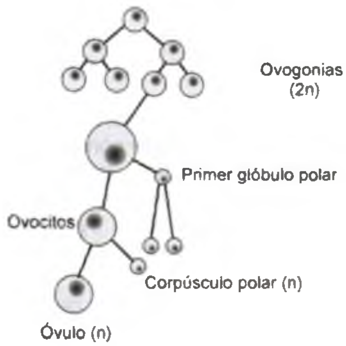
Proceso que se deriva de la meiosis para producir gametos o células sexuales, el cual se divide en ovogénesis y espermatogénesis.

Este proceso ocurre en los testículos e inicia durante la adolescencia, por lo general alrededor de los 12 años de edad y continúa durante toda la vida. La espermatogénesis comienza en los túbulos seminíferos con células llamadas *espermatogonias* (diploides), éstas se desarrollan y forman los *espermatocitos primarios*, que por medio de una primera división meiótica forman dos *espermatocitos secundarios* (haploides), estas células sufren una segunda división meiótica para originar cuatro *espermátidas* haploides, cada una madura hasta convertirse en un espermatozoide. Al final de la espermatogénesis, se obtienen cuatro espermatozoides haploides.

Espermatogénesis



Ovogénesis



La ovogénesis o formación de óvulos maduros, se lleva a cabo en los ovarios. Este proceso inicia antes del nacimiento, cuando en el ovario del embrión se forman células especializadas llamadas *ovogonias*, que se desarrollan y dan lugar a los *ovocitos primarios* diploides. Cada ovocito primario inicia el proceso de división meiótica pero, éste se detiene en la profase I hasta que comienza la pubertad.

Al iniciarse la pubertad, el ovocito primario concluye la primera división meiótica, originándose un *ovocito secundario* que recibe casi todo el citoplasma y un *glóbulo o corpúsculo polar* que se puede desintegrar o dividir nuevamente. El ovocito secundario sufre una segunda división meiótica que produce un óvulo y un segundo o tercero glóbulo polar (los corpúsculos polares funcionan como vehículo para deshacerse de los cromosomas) que también degeneran. Al final de la ovogénesis, se obtiene sólo un óvulo haploide.

Ciclo menstrual

La maduración del óvulo es un fenómeno cíclico que ocurre cada 28 días (aunque puede variar de 21-35 días) éste se caracteriza por una serie de cambios en las secreciones de hormonas en los órganos sexuales.

Este ciclo se divide en cuatro fases:

Menstruación: disminuye drásticamente el nivel de progesterona, desprendiéndose el endometrio.

Folicular: se secretan estrógenos y folículo estimulante (HFE), en esta fase se lleva a cabo la maduración del folículo del ovario, crece el endometrio.

Ovulación: ocurre un aumento brusco del nivel hormonal de luteinizante (HL), se libera el óvulo maduro por rompimiento del folículo del ovario.

Luteínica: se producen las hormonas luteotrópica (HLT), (HFE), progesterona y estrógenos, se forma el cuerpo lúteo y crece el endometrio.

Desarrollo embrionario

La unión entre el óvulo y el espermatozoide se le conoce como fecundación, la cual se realiza en el tercio superior de la trompa de Falopio.

En el desarrollo del óvulo fecundado se distinguen tres procesos fundamentales:

Segmentación: se caracteriza por una serie de divisiones mitóticas, las cuales formaran el huevo o cigoto, días después, se forma una esfera sólida llamada mórula que se convierte rápidamente en una esfera hueca de células, la blástula; ésta, también llamada blastocisto, se implantará en la pared del útero.

Gastrulación: el blastocisto formará la gástrula y ésta a su vez se dividirá en tres capas de células llamadas germinales, embrionarias o blastodérmicas (ectodermo, mesodermo, endodermo).

Diferenciación u organogénesis: las células germinales se diferencian y especializan para formar tejidos y órganos del embrión.

- Ectodermo: se forma piel, cabello, órganos de los sentidos y SNC (sistema nervioso central).
- Mesodermo: músculos, huesos, sangre, corazón, gónadas, riñones.
- Endodermo: pulmones, hígado, páncreas, sistema digestivo.

Métodos anticonceptivos

Los métodos anticonceptivos permiten a la pareja tener relaciones sexuales con un riesgo mínimo de embarazo La búsqueda y el uso de métodos capaces de impedir el embarazo son casi tan antiguos como la humanidad. Los egipcios utilizaban tapones de excremento de cocodrilo colocados en la vagina, posteriormente estos tapones se elaboraron a partir de diferentes sustancias: trozos de algas, hierbas, telas empapadas con aceites aromatizantes o miel. Más tarde se utilizaron vainas en el pene elaboradas con membranas de animales como vejigas o fragmentos de intestino, etc. (Higashida, 2005). Conforme se fue conociendo la anatomía y fisiología del sistema reproductor se fueron perfeccionando los métodos conocidos, y se descubrieron otros que actualmente son utilizados.



Es de vital importancia conocer los métodos anticonceptivos que existen, saber cómo funcionan y cuáles son las ventajas y desventajas al usarlos; para ello, lee el siguiente cuadro.

Clasificación	Método
Métodos naturales (Consisten en evitar o interrumpir el coito en la etapa fértil de la mujer	• Calendario (ritmo): Consiste en evitar el coito los días cercanos a la ovulación. La etapa fértil en una mujer es del día 10 hasta el 17 del ciclo (se cuenta desde el primer día de menstruación). Es efectivo sólo para mujeres que tienen ciclos regulares, lo que para mujeres irregulares es ineficaz. • Lactancia: Las mujeres después de un parto y que se encuentren lactando, pueden dejar de ovular. Para que éste sea considerado funcional sólo se puede considerar los primeros cuatro meses después del parto, además las madres deben estar alimentando de manera frecuente y exclusiva. Este método es bastante impreciso. • Coito interrumpido: Radica en retirar el pene de la vagina antes de la eyaculación (recordar que el líquido lubricante que se expulsa antes de la eyaculación contiene espermatozoides), es un procedimiento poco confiable. • Moco cervical (Billings): Requiere la observación de las características del moco cervical en el ciclo menstrual. Cuando este moco se hace líquido, elástico y transparente, deben evitarse las relaciones sexuales aproximadamente durante tres días. Es poco confiable. • Temperatura basal: Consiste en tomar la temperatura corporal de la mujer todos los días del ciclo y cuando se registra un aumento de 0.5 C o más, se presenta la ovulación. Por tanto, se deben evitar tener relaciones sexuales por lo menos tres días. Este método es poco eficaz ya que el aumento de la temperatura puede ocurrir por diversos factores, y los espermatozoides en el tracto vaginal pueden sobrevivir hasta tres días y fecundar al óvulo.
Métodos mecánicos o de barrera (Impiden que los espermatozoides estén en contacto con el óvulo por medio de un obstáculo químico o físico)	• Espermicidas: Los podemos encontrar en crema, óvulos y espumas, son medicamentos tóxicos para los espermatozoides, lo que evita su contacto y fecundación del óvulo. • Diafragma: Cubierta cervical que se coloca en el fondo de la vagina para evitar el paso de los espermatozoides al cuello del útero. En la actualidad se encuentra en desuso ya que las contracciones uterinas en el orgasmo desplazan esta cubierta, permitiendo el libre paso de los espermatozoides. • Dispositivo intrauterino (DIU): Aparato de plástico combinado normalmente con cobre, que se coloca en el útero. Su mecanismo de acción no se conoce con exactitud; se sabe que existe una movilización de glóbulos blancos en respuesta al DIU, creando un ambiente hostil para la implantación del óvulo, el cobre tiene acción tóxica contra los espermatozoides, además se ha planteado que disminuye el movimiento de los cilios de las trompas uterinas. Previene embarazos a costo bajo y por largo tiempo. Sin embargo, puede causar mayor dolor y grandes cantidades de sangrado menstrual, así como moverse y/o expulsarse. • Condón masculino y femenino: Actúa como receptáculo en el que se retiene el semen eyaculado, permitiendo la relación sexual sin la entrada de los espermatozoides. Además del embarazo, previene enfermedades de transmisión sexual.
Métodos hormonales (Suprimen la ovulación por medio de hormonas similares a las de la mujer, modifican la estructura del endometrio y del moco cervical)	• Orales: Pastillas que pueden ser de progestinas o estrógenos y/o progesteronas. Se deben tomar apropiadamente, sin olvidar ninguna, de lo contrario su eficacia disminuye considerablemente. • Inyectables: Al igual que todos los métodos hormonales, suprimen la ovulación, modifican el endometrio y el moco cervical. Se aplican mensual o bimestralmente. • Implante subdérmico: Es una varilla que se inserta bajo la piel, liberando progestina. Se utiliza cuando se busca anticoncepción por periodos prolongados. • Anillo vaginal: Anillo flexible que se coloca en la vagina, el cual permanece durante tres semanas. • Parche transdérmico: Se coloca sobre la piel durante una semana, con un descanso por cada tres aplicaciones. • De emergencia: Se recurre al método para prevenir un embarazo cuando: se han tenido relaciones sexuales sin protección, en días fértiles o cuando hay ruptura accidental del condón. Se administra dentro de las primeras 72 horas después del acto sexual. Las hormonas en la primera mitad del ciclo, evitarán la ovulación y cambiarán el moco cervical, en la segunda mitad del ciclo alteran el endometrio para impedir la implantación del óvulo.
Métodos quirúrgicos (Permanentes o pueden ser reversibles)	• Vasectomía: Impide el paso de los espermatozoides, desde los testículos hasta el exterior durante la eyaculación. Se ocluyen ambos conductos deferentes. • Salpingoclasia (oclusión tubaria bilateral): Consiste en ocluir ambas trompas uterinas para evitar el contacto del óvulo con los espermatozoides. Las técnicas para realizarla pueden ser: cauterizar, engrapar o corte y sutura.

Enfermedades de transmisión sexual

Las enfermedades de transmisión sexual (ETS) son un problema de salud grave que afecta cada vez a más personas en el mundo; se contraen primordialmente a través del contacto sexual y son originadas por virus, bacterias, protistas, etc. que infectan los genitales y el tracto reproductor. Por eso es muy importante al tener una vida sexual activa, tomar las precauciones necesarias para evitar el contagio de alguna de ellas.

A continuación enlistamos las siguientes.

- Sífilis. Enfermedad infecciosa, crónica, que se transmite básicamente por contacto sexual. Causada por *Treponema pallidium*, bacteria del grupo de las espiroquetas, con movimientos lentos en sentido longitudinal y en rotación. Su periodo de incubación temprana es de 20 a 30 días. Aunque básicamente su transmisión es sexual, se puede transmitir a través de la placenta, transfusiones sanguíneas y por heridas de piel cuando se tiene contacto con alguna lesión sifilítica. De acuerdo con su evolución se puede dividir en primaria, secundaria y terciaria (tardía).
- SIDA/VIH. Se caracteriza por una deficiencia en la respuesta inmunológica. Su forma de transmisión es por vía sexual, transfusión sanguínea, jeringas y agujas contaminadas, incluso por lactancia materna. El periodo de incubación de la enfermedad puede durar de seis meses a quince años o más. Es producido por un virus (vibrión esférico) que tiene la capacidad de alterar su estructura exterior, escapando del reconocimiento de las células del sistema inmunológico. Cuando este virus ataca a los linfocitos T pone en contacto su componente (gp 120) con la membrana del linfocito, destruyéndolo. Por otra parte, la nueva generación de fármacos (inhibidores de la enzima proteasa), son ahora más efectivos que los antirretrovirales AZT, ddl, D4T, etc, reducen los virus en la sangre y aumentan las defensas inmunológicas. Existe una prueba de laboratorio llamada ELISA (Enzyme Linked Inmuno Sorbent Assay), que permite detectar la presencia de anticuerpos contra VIH.
- Gonorrea. También conocida como blenorragia, en la mayoría de los casos penetra en el organismo por contacto sexual y puede afectar cualquier mucosa, se ha encontrado gonorrea faríngea y rectal. Producida por *Neisseria gonorrhoeae*, bacteria dispuesta en pares. El periodo de incubación es de tres a diez días. Durante el parto el material infeccioso puede infectar al recién nacido, produciéndole conjuntivitis. Su tratamiento es con antibióticos.
- Herpes genital. Enfermedad crónica y recurrente, transmitida por contacto sexual y al hijo en el momento del parto. La produce un virus (VSH-2). Su periodo de incubación es de dos a doce días posteriores al contagio, con dolor, comezón y vesículas que se rompen y generan ulceras muy dolorosas. Su tratamiento hasta el momento es con Aciclovir, ya que no se cura con antibióticos.
- Hepatitis B. Enfermedad crónica que en muchas ocasiones puede conducir a cirrosis hepática. La infección de hepatitis B es causada por el virus (VHB). Se transmite por contacto sexual, transfusiones sanguíneas, jeringas y agujas contaminadas y vía transplacentaria. Muchas personas que están infectadas son asintomáticas; con frecuencia se encuentra durante exámenes de sangre para un procedimiento físico de rutina u otro método médico. No existe cura para la hepatitis B, pero los medicamentos en algunos casos pueden inhibir el virus durante un periodo de tiempo prolongado.
- Virus del papiloma humano (VPH). El género viral papilloma perteneciente a la familia de Papovaviridae es muy amplio, son virus de ADN, existen más de 100 tipos y por lo menos 30 pueden infectar el tracto femenino. Puede causar verrugas o papilomas y debe tomarse muy en serio el gran riesgo que existe de que estas lesiones se vuelvan cancerosas. Es un agente infeccioso que se transmite a través de las relaciones sexuales. El contagio del virus ocurre porque las lesiones producidas por el VPH de la persona infectada, sufren microtraumas durante el coito y los virus se desprenden y penetran a través de la capa mucosa del compañero(a) sexual. Las lesiones pueden encontrarse en el perineo alrededor del ano, la vagina y la uretra, e incluso pueden ser intranales e intravaginales.

  Su periodo de incubación es de aproximadamente entre seis semanas y ocho meses. El virus puede permanecer en un estado de latencia de hasta 25 años. La enfermedad puede cursar sin síntomas, de esta manera provoca que el paciente no tenga conocimiento a menos que aparezcan alteraciones en la prueba de Papanicolaou o en la colposcopia. Si se observan lesiones, se recomendará eliminarlas mediante medicamentos prescritos por el médico (excepto en el embarazo). Si éstas se localizan en la vulva, vagina, ano, cavidad oral o cuello del útero, el especialista recomendará su eliminación por medio del láser o cirugía, la crioterapia o el electrocauterio. En la actualidad ya hay disponible una vacuna contra el virus del papiloma humano.

Ejercicios

Elija la opción correcta.

1. Hormona presente en la fase ovulatoria del ciclo menstrual:
   a) HFE b) HL c) HLT d) GTL
2. El endodermo dará como resultado la formación de:
   a) piel y sistema nervioso central
   b) pulmón e hígado
   c) corazón y huesos
   d) gónadas y páncreas
3. ¿Qué función desempeña el epidídimo?
   a) Produce la testosterona
   b) Transporta el semen al exterior
   c) Madura y almacena los espermatozoides
   d) Produce el líquido seminal
4. ¿Cuál es la estructura que da protección a la entrada de la vagina?
   a) Vulva b) Útero c) Monte de venus d) Ovarios
5. En el desarrollo embrionario, ¿qué sucede en la gastrulación?
   a) La unión del óvulo con el espermatozoide
   b) Se forma el blastocisto
   c) Se forman las capas blastodérmicas
   d) El embrión se implanta en la pared del útero
6. ¿Cuáles de los siguientes métodos son clasificados como mecánicos?
   a) Óvulos y parches
   b) Ritmo y lactancia
   c) Diafragma y vasectomía
   d) Preservativo y DIU
7. Enfermedad que se caracteriza por presentar un periodo de incubación de tres a diez días, durante el parto, el material infeccioso puede infectar al recién nacido, produciéndole conjuntivitis.
   a) SIDA b) Gonorrea c) Hepatitis d) Sífilis
8. El herpes genital se caracteriza porque…
   a) causa verrugas o papilomas y su periodo de incubación es de aproximadamente entre seis semanas y ocho meses
   b) su periodo de incubación temprana es de 20 a 30 días, se puede transmitir a través de la placenta, por transfusiones sanguíneas y heridas de piel cuando se tiene contacto con alguna lesión
   c) lo produce un virus (VSH-2), su periodo de incubación es de dos a 12 días posteriores al contagio, con dolor leve y sensación de comezón
   d) hay una deficiencia en la respuesta inmunológica, producida por un virus
9. ¿Cuál es la estructura que protege y contiene a los testículos?
   a) Escroto
   b) Túbulos seminíferos
   c) Uretra
   d) Glándulas accesorias
10. Fase del ciclo menstrual donde se lleva a cabo la maduración del folículo del ovario.
    a) Luteínica b) Folicular c) Ovulación d) Menstruación

5 Ecología

Propósito: el alumno identificará los conceptos básicos de estudio de la ecología, así como los problemas relacionados con los ecosistemas.

Ecología

La ecología tiene a su cargo el estudio de los niveles de organización más complejos de la materia viva.
Para entender las formas en que se relacionan el medio ambiente y los individuos, la ecología se ha dividido en ramas, como las que se mencionan a continuación:

- Autoecología: estudia las relaciones entre un solo tipo de organismo (una especie) y el medio en que vive.
- Etología: estudia el comportamiento de los animales en su ambiente natural.
- Sinecología: comprende la estructura, la composición y el funcionamiento de las comunidades ecológicas en relación con su medio ambiente.
- Demografía: los cambios numéricos de las poblaciones a través del análisis de las tasas de natalidad, mortalidad y migración.

La *biodiversidad* es la variedad de formas en las que se manifiesta la vida en el planeta y comprende niveles de organización como, los genes, las especies y los ecosistemas. Los países que tienen la mayor diversidad de especies en el mundo se conocen como megadiversos. Actualmente se reconocen de estos, 17 países entre los que destacan Brasil, Indonesia, Colombia, México, Perú y Venezuela. Se calcula que en los ecosistemas mexicanos habita alrededor del 10% de todas las especies del mundo (Valverde, 2005).
México tiene en especies, una riqueza considerable; por ejemplo ocupa el segundo lugar en el mundo en cuanto a número de especies de reptiles, además 40% de las plantas y 66% de los anfibios que viven en México son especies endémicas del país. Así mismo, la mitad de las especies de pino, 40% de las cactáceas conocidas y 47% de los encinos del mundo se encuentran en territorio mexicano (Valverde, 2005).

El *ecosistema* es el conjunto formado por una comunidad de organismos que interactúan entre sí y con el medio en que viven, además de estudiar la distribución, abundancia y el tipo de interacciones que se establecen entre los seres vivos. El ambiente está integrado por dos tipos de factores o componentes:

a) Componentes bióticos. Que incluye todas las formas de vida.
b) Componentes abióticos. Son aquellos que carecen de vida y de los cuales depende cualquier comunidad biológica. Los principales componentes son: rayos solares, temperatura, altitud, latitud, presión atmosférica, viento, agua, sustrato, minerales, entre otros.

El siguiente cuadro muestra los principales ecosistemas terrestres, así como su clima, flora y fauna característicos.

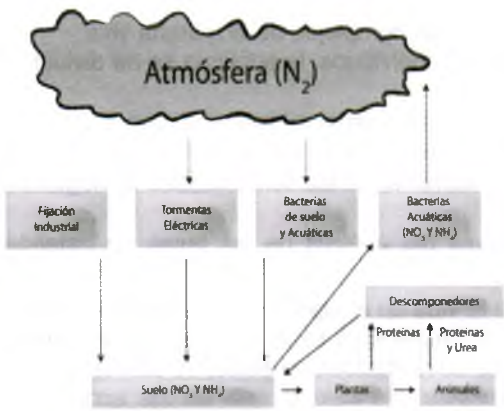
Flora y fauna representativas de los principales ecosistema terrestres

Bioma	Clima	Flora	Fauna
Tundra	Temperaturas muy bajas hasta 50° C bajo cero, inviernos largos, veranos breves (de 6 a 8 semanas). Baja precipitación anual (menos de 25 cm).	Líquenes, musgos, pastos cortos y arbustos.	Zorros árticos, búhos y liebres de nieve, renos, caribúes y osos polares.
Taiga (bosque de coníferas)	Temperatura bajo el punto de congelación, precipitación anual moderada (30 a 85 cm), noches largas en invierno y días largos en verano.	Pinos, abetos y oyameles.	Osos, lobos, alces, venados, ratas almizcleras.
Bosque templado caducifolio	Moderado, cuatro estaciones al año, veranos calientes e inviernos helados. Buena precipitación anual (75 a 150 cm).	Robles, maples, arces.	Musarañas, ardillas, mapaches, venados, pavos, ranas, tortugas y castores.
Pastizal	Veranos secos y cálidos.	Pastos cortos y altos.	Ardillas, bisontes, perros de pradera, halcones, coyotes, tejones y serpientes.
Desierto	Días calientes (38°C) y noches heladas (7°C), baja precipitación anual (menos de 25 cm).	Candelilla, lechuguilla, biznagas, órganos, nopales, mezquites.	Lagartijas, serpientes, tortugas de desierto, correcaminos, rata canguro, coyotes y halcones.
Sabana	Con pronunciadas estaciones secas y lluviosas. Precipitación anual de 30 cm o menos).	Gramíneas y algunos árboles.	Elefantes, rinocerontes, hienas, antílopes, cebras, leones, jirafas y guepardos.
Bosque tropical	Cálido (entre 20 y 25°C), lluvia abundante (un mínimo de 190 cm al año).	Árboles altos, orquídeas, lianas, helechos.	Armadillos, insectos, guacamayas, tucanes, ranas, serpientes, lagartos, lémures, monos, jaguares, leopardos, ocelotes.

Ciclos biogeoquímicos

Un ciclo biogeoquímico es el proceso por el que un nutrimento es reutilizado en el ecosistema, en éste participan factores bióticos y abióticos. Desde el punto de vista ecológico, los ciclos atmosféricos son cuatro: agua, nitrógeno, carbono y azufre.

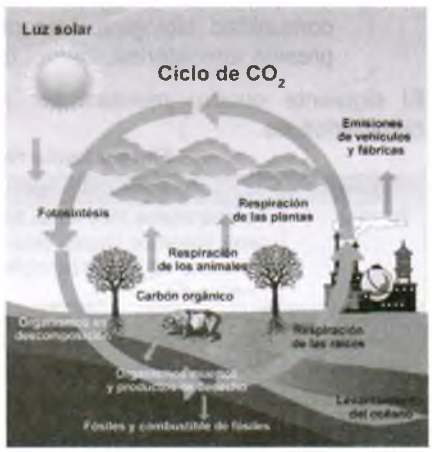
Ciclo del agua. La mayor reserva de este compuesto lo constituye el océano. La ruta del ciclo comprende tres fases: evaporación, condensación y precipitación.



Ciclo del nitrógeno. El nitrógeno es uno de los constituyentes más importantes de los seres vivos y conforma 78% del volumen de la troposfera; los seres vivos no utilizan el nitrógeno en forma gaseosa, porque antes de aprovecharlo es necesario transformarlo en nitratos solubles, esta transformación la realizan bacterias fijadoras de nitrógeno (del género *Rhizobium*) en las raíces de algunas leguminosas, éstas convierten los nitratos en aminoácidos y posteriormente en proteínas. Las proteínas se pueden transformar en urea, amoniaco o ácido úrico, que al descomponerse producen nitratos reiniciando así el ciclo (González, 1995).

Ciclo del fósforo. La reserva de fósforo en los ecosistemas proviene de las rocas, donde este elemento se encuentra ligado al oxigeno en forma de fosfatos. Las rocas expuestas al aire se erosionan y la lluvia disuelve los fosfatos, éste es absorbido a través de las raíces de las plantas y otros autótrofos, incorporándose a las moléculas biológicas. A partir de los productores, el fósforo recorre las redes alimenticias. Finalmente los descomponedores devuelven el fósforo de los cadáveres al suelo y al agua en forma de fosfato, de donde son absorbidos y de nuevo o al quedar como sedimentos se reincorporan nuevamente a la roca. El agua arrastra la mayoría de los fosfatos del suelo y los conducen por ríos, lagos, hasta depositarlos en el mar, este fósforo también es consumido por organismos marinos.

Ciclo del carbono. El metabolismo de los seres vivos requiere de muchos compuestos para su desarrollo y contiene un importante elemento, el carbono. En la atmósfera se encuentra el CO_2 y la proporción que representa es sostenida por plantas y animales porque es el producto final de la respiración y de los procesos de combustión. Este CO_2 se fija mediante la fotosíntesis y es utilizado para producir glucosa necesaria para los seres vivos. Es un ciclo con interés ambiental, ya que su emanación en grandes concentraciones, produce el fenómeno conocido como "efecto invernadero".



Flujo de energía en el ecosistema

La energía del sol que constantemente bombardea a la Tierra se utiliza y se transforma en las reacciones químicas que alimentan la vida y se convierte en energía calorífica que se devuelve al espacio. Por tanto hay dos leyes que rigen la función de los ecosistemas:

- La primera establece que la energía se desplaza de una comunidad a otra dentro de dos ecosistemas en un flujo unidireccional continuo; es necesario reponer la energía constantemente a partir de una fuente externa, el Sol.
- La segunda menciona que los nutrimentos pasan en forma continua por ciclos y se aprovechan de manera repetida dentro de los ecosistemas y entre ellos (Audesirk, 2003).

La cantidad de vida que un ecosistema puede sostener está determinada por la energía que capturan los productores de ese ecosistema. La energía que los fotosintetizadores almacenan y ponen a disposición de otros miembros de la comunidad a lo largo de un periodo específico se le llama **productividad primaria neta.** Esta productividad se mide en unidades de energía (calorías) almacenada por unidad de área durante

un lapso determinado, también se mide en términos de la biomasa, o peso seco de material orgánico de los productores que se agrega al ecosistema por unidad de área en un tiempo específico (también se expresa como el cociente entre la producción y la biomasa, lo cual nos indica la velocidad del flujo energético). En la productividad del sistema influyen muchas variables ambientales, como la cantidad de luz que reciben, la cantidad de nutrimentos que disponen los productores, disponibilidad de agua y temperatura.

Relaciones entre los seres vivos

El equilibrio en la naturaleza es el resultado de interacciones armonizadas entre los seres vivos y su ambiente, pero también es importante la relación que establecen entre los propios organismos. A continuación se mencionan dos grandes formas de interacción entre los organismos.

- Relaciones intraespecíficas.

Para que los miembros de una población puedan sobrevivir, no sólo deben adaptarse a las condiciones del ambiente, sino que tienen que establecer una serie de relaciones con otros organismos que viven en la misma área, nos referimos a las relaciones que llevan a cabo entre especies iguales, las cuales están en constante competencia o cooperación por espacio, alimento o pareja. Por ejemplo, en el caso de la conducta agresiva que tienen los machos de una población al expulsar de su área de dominio a otros de la misma especie.

- Relaciones interespecíficas. Las más frecuentes son:

Depredación o sistema presa-depredador. La depredación ocurre cuando un organismo viviente, llamado depredador, se alimenta de otro organismo vivo, llamado presa. En un sentido amplio, los depredadores incluyen no solo animales como leonas que matan cebras, si no también ballenas que por filtración se alimentan de krill de los océanos, etcétera.

Mutualismo. Es una relación en la que se benefician ambos miembros de la asociación, por ejemplo: flores con insectos (polinización), bacterias que residen en el tracto intestinal de los seres humanos.

Simbiosis. Relación íntima, y de largo plazo entre dos organismos de especies diferentes (hongo-micobionte/alga-ficobionte), los líquenes representan una de las simbiosis más antiguas y ecológicamente más exitosa.

Comensalismo. Es la relación entre dos especies en la que una resulta beneficiada (comensal) y la otra (hospedero) no es beneficiada ni dañada, como el pez rémora y el tiburón.

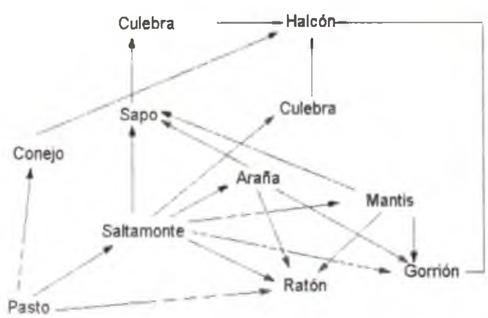
Parasitismo. Consiste en una asociación dependiente en la que uno se beneficia (parásito) y el otro resulta perjudicado (huésped). Los parásitos se pueden alojar dentro de un organismo (endoparásitos) como la lombriz intestinal (*Ascaris lumbricoides*), amibas, solitaria (*Taenia solium*) o fuera del mismo (ectoparásitos) como los piojos, garrapatas, pulgas, sanguijuelas y ácaros.

Cadenas, redes y pirámides alimenticias

La cadena alimenticia es la transferencia de masa que se obtiene frecuentemente, a partir de la sucesión lineal en la que un ser vivo es comido por otro, el cual a su vez, sirve de alimento a un tercero y así sucesivamente (línea de alimentación), con una enorme pérdida de energía que es liberada en forma calorífica, esta pérdida es menor si la cadena es más corta.

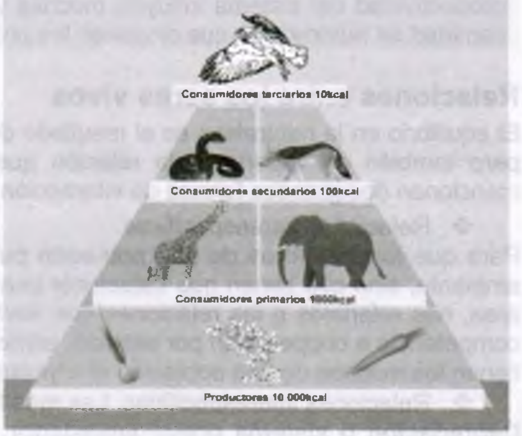


Una red o trama muestra múltiples cadenas interconectadas de una comunidad y describe las relaciones de alimentación efectivas dentro de una comunidad especifica.



Una pirámide alimenticia, muestra la energía máxima en la base y cantidades decrecientes en los niveles más altos. La energía fluye a través de las comunidades a partir de los productores fotosintéticos y a lo largo de varios niveles de consumidores. Cada categoría de organismo constituye un nivel trófico.

Nivel 1 Productores o autótrofos
Son organismos (plantas, algas y cianobacterias) que obtienen su energía directamente de la luz solar.
Nivel 2 Consumidores primarios o herbívoros
Son organismos que se alimentan directa y exclusivamente de los productores, incluyen desde insectos, conejos, hasta grandes herbívoros como el elefante o la jirafa.
Nivel 3 Consumidores secundarios o carnívoros: Son depredadores que se alimentan principalmente de consumidores primarios, como arañas, serpientes, lobo.
Nivel 4 Consumidores terciarios:
Son algunos carnívoros que se alimentan en ocasiones de otros carnívoros, como halcones, águilas o el ser humano.
Desintegradores (descomponedores)
Son organismos que se alimentan de restos de animales o vegetales muertos y transforman la materia orgánica, como bacterias, hongos, lombrices e insectos, entre otros.



Sucesión ecológica

Las comunidades están sujetas a perturbaciones que pueden variar. Después observaremos cambios en las comunidades de animales y plantas con el paso del tiempo; a menudo aparece el mismo tipo de comunidad que existía al comienzo. La sucesión ecológica es una serie de cambios o etapas a lo largo de mucho tiempo que ocurren en una comunidad afectando a los seres vivos y a su ambiente. Los cambios que ocurren durante la sucesión son tan variados como los ambientes en los que se lleva a cabo, pero podemos reconocer ciertas etapas de carácter general (Audesirk 2003).

En cada caso, inician la sucesión unos pocos invasores llamados pioneros. Si nada los perturba, continúan hasta formar una comunidad clímax, (ecosistema maduro que refleja la relación armónica entre sus poblaciones) variada, relativamente estable y que subsiste por sí misma si no es alterada por fuerzas externas, esto es el término de la sucesión.



La sucesión adopta dos formas principales: primaria y secundaria:

a) En la primaria una comunidad coloniza poco a poco una zona desnuda (roca, estanque etc.) donde no hay rastro de una comunidad anterior. Este proceso puede tomar cientos, miles o decenas de miles de años.
b) En la secundaria se desarrolla una nueva comunidad después de que un ecosistema existente ha sido modificado como por un incendio forestal o un campo agrícola abandonado, esta sucesión es más rápida ya que la comunidad anterior ha dejado su marca en forma de suelo y semillas.

Conocer la sucesión es estudiar las variaciones que las comunidades sufren al paso del tiempo. En las comunidades clímax que se forman durante la sucesión influyen el clima y la geografía.

Cuidados del medio ambiente y sustentabilidad

La humanidad desde sus albores, se ha distinguido porque tiene la posibilidad de controlar el ambiente. Esa es la característica que le ha permitido desarrollar conocimientos y técnicas para controlar los ecosistemas, espacios, en fin todo lo que el planeta produce. Sin embargo, el crecimiento desmesurado de la población humana, la falta de límites en el uso de los recursos naturales, la sobreexplotación, la falta de previsión y políticas adecuadas para la administración y manejo de la naturaleza, han ocasionado que se presenten graves problemas ecológicos. A la intensidad del daño ocasionado a un hábitat se le conoce como deterioro ambiental.

Atendiendo a la parte del ambiente que se deteriora se pueden reconocer cuatro principales tipos de contaminación: atmosférica, acuática, del suelo y por ruido.

Contaminación atmosférica

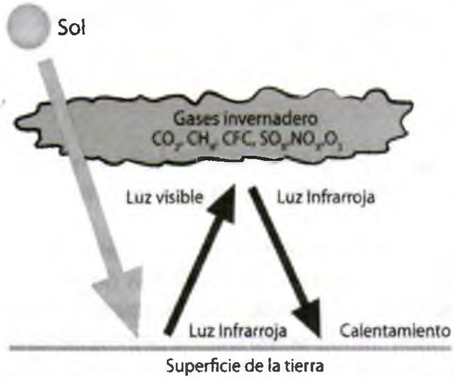
Es el deterioro de la calidad del aire, provocada por el exceso de gases y partículas provenientes de actividades humanas, industriales, comerciales, domésticas y agropecuarias.

En condiciones normales, en las capas bajas de la atmósfera la composición del aire es de 78.09% de nitrógeno (N), 20.95% de oxígeno (O), 0.93% de argón (Ar) y 0.03% de anhídrido carbónico o bióxido de carbono (CO_2). (Dickson, 1982). Dichas concentraciones permiten de manera eficiente, respirar a las plantas, a los animales y al hombre, producir oxígeno en los organismos fotosintéticos y fijar el nitrógeno gracias a las bacterias nitrificantes del suelo. Los contaminantes del aire producen diversos problemas ecológicos atmosféricos, entre ellos citaremos: la inversión térmica, efecto invernadero, la lluvia ácida, la destrucción de la capa de ozono y el cambio climático global.

Inversión térmica



La inversión térmica, no es un hecho raro, ya que puede ocurrir en cualquier parte del planeta, pero el problema es que se presente en sitios contaminados. En las noches despejadas de invierno y primavera, a nivel del suelo, el aire está frío y denso por lo cual no puede ascender. Solamente cuando el Sol calienta el asfalto, el cemento y el suelo, aumenta la temperatura del aire y éste se expande elevándose como globo y arrastrando consigo los gases contaminantes.
En la ciudad de México con sus altos niveles de contaminación, las condiciones meteorológicas y geográficas y el movimiento de aire limitado se conjuntan y forman uno de los problemas tecnológicos más difíciles de resolver en estos tiempos (Vásquez, 2001).

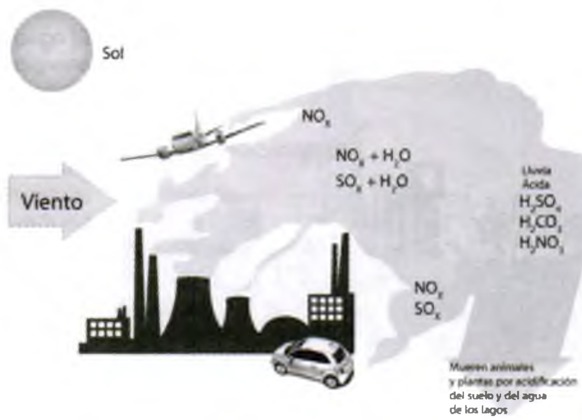


Efecto invernadero

Los cambios climáticos son una de las manifestaciones que más destacan a nivel mundial, cuyas causas son las alteraciones en la composición química de la atmósfera; sus consecuencias aumentan por las interacciones entre el clima, los seres vivos y el ciclo del agua, lo cual desencadena el calentamiento global.
Los gases liberados han incrementado la temperatura atmosférica, debido a que el CO_2 y el vapor de agua absorben la radiación infrarroja, lo que impide que el calor abandone el planeta provocando así el efecto invernadero. Se sabe que actualmente se liberan aproximadamente tres millones y medio de toneladas de bióxido de carbono (CO_2) al año, principal causante del efecto, las cuales provienen de los incendios forestales o de la quema de combustibles fósiles por industrias y automotores (Dickson, 1982). A esto se debe agregar casi un millón de toneladas anuales de metano (CH_4), quinientas mil toneladas de óxidos de nitrógeno (NO_x) y los CFCs. Los pronósticos indican que en el caso de un calentamiento global (2° C a 7° C) el nivel del mar se elevaría entre uno y dos metros, con graves repercusiones en los recursos pesqueros, humedad de los suelos y equilibrio de ecosistemas, además de provocar tifones y huracanes de máxima intensidad, en épocas no previstas.
Existe gran preocupación en el ámbito internacional por regular y controlar las fuentes de emisión de gases de invernadero, pero los resultados sólo se podrán evaluar a largo plazo, pues las sustancias que producen el efecto invernadero permanecen en la atmósfera durante un periodo que fluctúa entre 12 años (metano) y 200 años (dióxido de carbono).

Lluvia ácida

La lluvia ácida se produce cuando las emisiones industriales se combinan con la humedad atmosférica, el dióxido de azufre y el óxido nítrico que se emiten originan ácidos sulfúrico (H_2SO_4) y nítrico (HNO_3) (Hill, 1999). Las nubes pueden llevar los contaminantes a grandes distancias, dañando bosques y lagos muy alejados de las fábricas en las que se originaron. La lluvia ácida, además de quemar las hojas de las plantas, también acidifica el agua de los lagos dejando sin vida muchos de estos ecosistemas acuáticos. Cerca de las fábricas, se producen daños adicionales por deposición de partículas de mayor tamaño en forma de precipitación seca, que perjudican a las construcciones, monumentos, carrocerías de los automóviles, agua, suelo y seres vivos aledaños a éstas.



Destrucción de la capa de ozono



A diferencia del ozono que existe en la troposfera, la presencia de ozono en la estratosfera, a una altitud de 10-45Km sobre la superficie terrestre es benéfica para todos los organismos ya que, absorbe las ondas ultravioletas enviadas por el Sol. Investigaciones acerca de las variaciones en la densidad de la capa de ozono y sus causas han generado gran preocupación en todo el mundo. Se descubrieron agujeros en la capa sobre los dos polos del planeta y un adelgazamiento de ella en todo el globo terráqueo.
Se ha verificado un impacto negativo de los compuestos denominados clorofluorocarbonos (CFC's), los cuales son sustancias químicas sintéticas que se usaban ampliamente como propelentes de aerosoles, y aun hoy se usan como refrigerantes, en la fabricación de espumas químicas y plaguicidas (Hill, 1999).

La disminución de la capa de ozono lleva directa e inevitablemente a un incremento en la cantidad de radiación ultravioleta que alcanza la superficie terrestre; para los seres humanos las consecuencias de una radiación ultravioleta mayor es el aumento en casos de cáncer de piel e investigaciones recientes sugieren que puede haber daños a nivel de sistema inmunológico. Otro efecto inmediato son las quemaduras de la córnea y la conjuntiva caracterizada por visión opaca, dolor, fobia a la luz, lagrimeo excesivo y espasmos de los párpados, todo esto puede causar la formación de cataratas, según la OMS si se reduce un 10% la capa de ozono provocaría unos dos millones de nuevos casos.

Cambio climático global

El cambio climático no es una ficción, es una realidad que se está gestando a cada momento debido al patrón de consumo energético que privilegia los combustibles fósiles (petróleo, carbón y gas), en vez de recurrir a las energías renovables.
La producción excesiva de dióxido de carbono (CO_2) por la quema de combustibles fósiles, y la progresiva acumulación de este compuesto en la atmósfera está perturbando los patrones climáticos. Científicos de todo el mundo estiman que de mantenerse la actual tendencia, las alteraciones climáticas se agravarán con catastróficas consecuencias (inundaciones, desertificación, aumento del nivel de los océanos, es previsible una migración de millones de "refugiados ambientales" por los impactos económicos en numerosas regiones y sus consecuentes crisis sociales). En los polos según Greenpeace, se ha constatado el derretimiento de los glaciares, esto repercute sobre el frágil entorno de esa región, afectando patrones de comportamiento de las especies y las cadenas alimenticias. Eso ha ocurrido con un incremento de la temperatura global de apenas entre 0.3 y 0.6 grados centígrados desde 1750. Pero de mantenerse el actual volumen de emisiones de CO_2, los expertos calculan que la temperatura del planeta podrá aumentar durante el siglo XXI hasta 4.8 grados centígrados. Las alternativas a seguir y evitar estos daños, son el tránsito hacia otras fuentes de energía, eólica, solar, hidráulica, geotérmica y oceánica. Estas fuentes de energía son viables desde el punto de vista técnico y económico, además, suministran energía en forma constante y limpia.

Contaminación del agua



El agua es contaminada porque le añadimos cualquier forma de materia y energía que modifica y altera sus propiedades físicas, químicas y biológicas, cambiando sus posibilidades de uso normal. Al caer la lluvia o la nieve al suelo se mezcla con varios contaminantes atmosféricos, por lo que puede contener materia extraña de origen natural como partículas de polvo, microorganismos, bióxido de carbono y polen, entre otras sustancias.
La mayor parte de los contaminantes se descargan en los cuerpos de agua y receptores; ríos, lagos, lagunas, estuarios y zonas costeras.
La contaminación del agua se ha convertido en un grave problema de salud pública, puesto que este líquido ya viene alterado antes de usarlo. Como consecuencia esta agua contaminada puede provocar enfermedades del aparato digestivo, las cuales son la tercera causa más importante de muerte infantil en el país.

Contaminación del suelo
En el suelo, (conjunto formado por componentes inorgánicos (minerales), materia orgánica y millones de organismos vivos), se realizan numerosos procesos que son vitales para la subsistencia de toda la vida vegetal y animal. Estamos acostumbrados a considerar al suelo como algo muerto, en donde podemos colocar, acumular o tirar cualquier producto sólido o líquido que ya no es de utilidad o que sabemos que es tóxico. En el momento en el cual caen estos productos al suelo, nunca se piensa en los efectos que esto puede ocasionar. Cuando en el suelo depositamos de forma voluntaria o accidental diversos productos como el papel, vidrio, plástico, materia orgánica, materia fecal, solventes, petróleo, residuos peligrosos o sustancias radiactivas, etc., afectamos de manera directa las características físicas, químicas y estéticas de éste, desencadenando con ello innumerables efectos sobre otros seres vivos.

Llamamos basura a los residuos de distinto origen, entre otros: desperdicios del hogar, oficinas, calles, industrias, fábricas, mercados, hospitales, escuelas. Se clasifica en dos grandes grupos, origen orgánico e inorgánico. Son orgánicos, los desechos de animales, restos de comida, hojas, pasto de jardines, telas de algodón, papel y cartón. Como inorgánicos tenemos, vidrio, plásticos, latas, objetos de hierro, acero, aluminio, asbesto, baterías y botes de aerosoles. La destrucción de la basura es imposible y por tanto se recomienda tratar de disminuir la cantidad producida y buscar métodos mecánicos, químicos o biológicos para transformar en otro tipo de material que pueda ser utilizado como materia prima.

Contaminación por ruido
El ruido puede considerarse como una combinación de tonos que cambian desordenadamente. Si el sonido es muy intenso, prolongado, no rítmico, se considera ruido o sea cuando deja de ser agradable para el oído. En 1982 fue publicado en el Diario Oficial un reglamento relacionado con el sonido. De acuerdo con su artículo 6º se consideran dos tipos de fuentes artificiales emisoras de ruido: fijas y móviles:
Son fijas: todo tipo de industria, máquinas con motores de combustión, terminales y bases de autobuses y ferrocarriles, aeropuertos, clubes cinegéticos (de cacería) y polígonos de tiro; ferias, tianguis, circos, conciertos y otras semejantes. Se consideran como fuentes móviles: aviones, helicópteros, ferrocarriles, autobuses, automóviles, motocicletas, embarcaciones y maquinarias con motor de combustión y similares.



Estos son algunos de los efectos nocivos que provoca el ruido:
- representa un obstáculo para la buena comunicación
- pérdida del oído
- causa reacciones de ansiedad, tensión y estrés, en casos extremos desarrolla esquizofrenia e histeria. Produce cambios al organismo como la aceleración del ritmo cardiaco, constricción de los vasos sanguíneos, alta presión, espasmos digestivos, dilatación de pupilas, dolores de cabeza, náuseas y desvanecimientos (González, 1995).

Sustentabilidad
Su historia se inicia en la década de los años setenta cuando la defensa del medio ambiente se convirtió en uno de los temas más importantes de las campañas y agendas políticas en distintos países. Fue precisamente en junio de 1972, durante la Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente Humano celebrada en Estocolmo, Suecia, cuando creció la convicción de que se estaba atravesando por una crisis ambiental a nivel mundial.



Años más tarde, en 1987, la Comisión de Medio Ambiente de la ONU emitió un documento titulado *Nuestro futuro común*, también conocido con el nombre de Informe Brundtland, por el apellido de la doctora que encabezó la investigación. En este estudio se advertía que la humanidad debía cambiar sus modalidades de vida y de interacción comercial, si no deseaba el advenimiento de una era con inaceptables niveles de sufrimiento humano y degradación ecológica. En este marco, la **sustentabilidad** ambiental se refiere a la administración eficiente y racional de los recursos naturales, de manera tal que sea posible mejorar el bienestar de la población actual sin comprometer la calidad de vida de las generaciones futuras.

Aunque el modelo global de desarrollo ha propiciado mejoras en algunos países y regiones, el medio ambiente y los recursos naturales continúan deteriorándose a una velocidad alarmante. Información científica reciente muestra que los impactos ambientales derivados de los patrones de producción y consumismo (adquirir bienes indiscriminadamente aunque no sean necesarios), así como las presiones demográficas, podrían provocar transformaciones importantes en el entorno que enfrentarán las generaciones futuras. Todos los problemas expuestos en el tema anterior serían algunas de las consecuencias.

Estos temas pueden atenderse desde tres grandes líneas de acción:

- Aprovechamiento sustentable de los recursos naturales
- Protección del medio ambiente
- Educación y conocimiento para la sustentabilidad ambiental

Todo esto nos lleva a implementar la educación formal (desde escuelas primarias hasta universidades), como informal (museos, medios de comunicación) de la población humana; fomentando actitudes (disminuir el consumismo) y comportamientos favorables (por ejemplo, no tirar basura, ahorrar agua, etc.); así mismo, tomar conciencia de los problemas mundiales que aquejan al planeta y llevar a cabo acciones ecologistas para lograr un desarrollo sostenible.

Ejercicios

Elija la opción correcta:

1. Pronunciadas estaciones secas y lluviosas, con precipitación anual de 300 mm, presencia de algunos árboles y fauna como: rinocerontes, hienas, elefantes, leones, etc. Las características mencionadas anteriormente pertenecen al ecosistema llamado.
   a) Sabana b) Taiga c) Tundra d) Pastizal

2. Rama de la Biología que estudia la interacción de los organismos y el medio en que viven, así como su distribución y abundancia.
   a) Demografía
   b) Geografía
   c) Ecología
   d) Agronomía

3. Ciclo biogeoquímico relacionado con bacterias y raíces de leguminosas.
   a) Azufre b) Nitrógeno c) Agua d) Carbono

4. En los ecosistemas, la productividad primaria neta se mide en...
   a) flujo b) joules c) grados d) calorías

5. El tipo de relación que presenta un tiburón y la rémora, en donde al convivir sólo el segundo organismo obtiene beneficio, se le denomina.
   a) parasitismo b) simbiosis c) depredación d) comensalismo

6. El conjunto de múltiples cadenas interconectadas que describen las relaciones de alimentación efectivas dentro de una comunidad específica, se le llama.
   a) Trama alimenticia
   b) Ciclo biogeoquímico
   c) Productividad
   d) Cadena alimenticia

7. Son organismos que transforman la materia orgánica al alimentarse de restos animales o vegetales muertos.
   a) Herbívoros b) Desintegradores c) Consumidores d) Productores

8. Es una consecuencia del impacto negativo de los compuestos denominados clorofluorocarbonos (CFC's).
   a) Inversión térmica
   b) Destrucción de la capa de ozono
   c) Efecto invernadero
   d) Lluvia ácida

9. En los ecosistemas, la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma, lo que indica que se mueve siguiendo un flujo:
   a) cíclico b) unidireccional c) unitario d) azaroso

10. La tala inmoderada, la desertificación, la explosión demográfica y la sobreexplotación de los recursos, son factores que ayudan a quebrantar la...
    a) Ley de tolerancia
    b) Transferencia de energía
    c) Sustentabilidad
    d) Productividad

Respuestas de los reactivos de Biología

UNIDAD 1	UNIDAD 2	UNIDAD 3	UNIDAD 4	UNIDAD 5
1c	1a	1c	1b	1a
2a	2c	2b	2b	2c
3d	3d	3d	3c	3b
4b	4d	4b	4a	4d
5c	5a	5b	5c	5d
6a	6b	6d	6d	6a
7b	7c	7a	7b	7b
8d	8b	8a	8c	8b
9c	9a	9d	9a	9b
10d	10d	10d	10b	10c

Bibliografía

Audesrik, T., Biología 3. Evolución y ecología. México. Prentice Hall. 2003.
Bernstein, R., Bernstein, S., Biología. México. McGraw-Hill, 1998.
Biggs, A, Biología. La dinámica de la vida. Colombia. McGraw-Hill. 2000.
Campbell, N, Biología. Conceptos y relaciones. México Pearson Educación. 2001.
Cervantes, M., Hernández, M., Biología General. México. Grupo Editorial Patria. 2008.
Curtis, H., Biología. México. Panamericana, 2000.
Dickson, T., Introducción a la Química. México. Publicaciones Cultural. 1982.
Gold, M., Procesos energéticos de la vida. Fotosíntesis. México. Trillas, 1983.
González, F., Medina, L., Ecología. México. McGraw-Hill. 1995.
Higashida, H. B. Ciencias de la Salud. México. McGraw-Hill. 2005.
Hill, J., Kolb, D., Química para el nuevo milenio. México. Pearson. Prentice Hall. 1999.
Mader, S. Biología. México. McGraw Hill. 2008.
Miller, K., Levine, J., Biología III. Evolución y ecología. México. Pearson Educación. 2007.
Overmire, T., Biología. México. Limusa Noriega editores. 2001.
Turk Amos. Ecología, contaminación, medio ambiente. México. Interamericana. 1973.
Valdivia, B., Granillo, P., Biología. La vida y sus procesos. México. Grupo Patria Cultural. 2002.
Vásquez, G. Ecología y formación ambiental. México. McGraw-Hill. 2001.
Ville, C. A., Biología. México. McGraw-Hill. 1996.

Unidad 1 La Historia como Ciencia
1. El carácter científico de la Historia
2. Diversidad de la Metodología en el estudio de los fenómenos históricos

Unidad 2 Época prehispánica
1. Mundo indígena mesoamericano

Unidad 3 Encuentro de dos Mundos (Conquista y colonización)
1. Introducción
2. La Conquista de México
3. La vida colonial

Unidad 4 Independencia
1. Causas de la emancipación en Nueva España
2. Etapas de la lucha

Unidad 5 Reforma
1. Antecedentes entre 1821 y 1853 (México después de la Independencia)
2. De la Revolución de Ayutla a la Reforma liberal
3. La Guerra de Tres Años, la Intervención Francesa y el Imperio de Maximiliano
4. La República Restaurada

Unidad 6 Porfiriato
1. La dictadura porfirista
2. La situación económica–social del México porfirista
3. El modelo de cultura porfirista

Unidad 7 Revolución Mexicana
1. Antecedentes
2. Francisco I. Madero y el Plan de San Luis
3. La causa constitucionalista de Venustiano Carranza

Unidad 8 Siglo XX
1. La etapa caudillista del México Posrevolucionario
2. Del Plan Sexenal al triunfo del sistema de Partido de Estado
3. La crisis del sistema político mexicano en las últimas décadas



Historia de México

1 La Historia como Ciencia

Propósito: el alumno analizará las características de la Historia en cuanto disciplina científica y social, su relación con el método experimental y con otras disciplinas humanísticas.

El carácter científico de la Historia

a) La Historia como concatenación de hechos

Es el paso de la humanidad a través del tiempo y del espacio.
Es una concatenación de hechos relevantes para la existencia humana y que necesariamente dejan una influencia inmediata o posterior en las formas de vida y organización de las diferentes civilizaciones.

Al entender el proceso histórico como un fluir en el tiempo, conviene establecer los periodos históricos que, en el marco de esa continua sucesión, han establecido los especialistas.

Historia
Es la disciplina científica y humanística sobre el pasado de la humanidad a través de una dimensión espacio-temporal; son tareas específicas del historiador.
Explicar las posibles causas y consecuencias de los sucesos
Interpretar los procesos históricos con base en alguna corriente:

- Positivismo
- Materialismo Histórico
- Estructuralismo
- Historicismo

Historiografía
Rama de la Ciencia histórica que persigue como propósito elaborar un registro por escrito de los hechos relevantes. Por consecuencia, establece una periodización del curso histórico en etapas o edades.

- Prehistoria
- Edad Antigua
- Edad media
- Edad Moderna
- Edad Contemporánea

b) Periodización de la Historia

Antigüedad
Se remonta a las primeras civilizaciones que dominaron la agricultura, la metalurgia, la rueda y la escritura, a partir del año 3 500 a.C. en contextos típicos como Egipto sobre el río Nilo, Mesopotamia entre los ríos Tigris y Éufrates, la cultura del valle del río Indo (India) y China entre los ríos Amarillo y Azul. Se trata de pueblos básicamente agrícolas con estructuras sociales complejas basadas en la división del trabajo y con Estados Teocráticos; civilizaciones portadoras de grandes conocimientos arquitectónicos y matemáticos, astronómicos, administrativos y artísticos. Otros pueblos que se pueden ubicar como contemporáneos de esas grandes civilizaciones son los hebreos, los hititas, los persas y los fenicios.

Aproximadamente hacia el año 1100 a. C. aparecieron las culturas Clásicas -Grecia y Roma- que asimilaron algunos elementos de la antigüedad y que crearon nuevas aportaciones como el alfabeto, la Filosofía, el humanismo y el helenismo cuyo principal difusor fue el Emperador griego Alejandro Magno, tres siglos antes de Cristo. El latín –idioma oficial romano–, antecede a las lenguas romances como el castellano, el portugués y el francés, y tuvo gran importancia en la Edad Media.

Edad Media
Periodo entre la caída de Roma en el año 476 y la decadencia de Constantinopla en el año 1453.

Durante la Edad Media destacaron los siguientes acontecimientos:

- Caída de Roma, saqueada por las invasiones bárbaras (Siglo V d. C.).
- Subsistencia del Imperio bizantino durante varios siglos hasta su caída en el siglo XV.
- Hegemonía del Cristianismo en Europa occidental desde el siglo V d. C.
- Surgimiento del Imperio Carolingio al unificar Carlo Magno en el siglo VIII a los reinos bárbaros de Europa occidental (Francia y Germania).
- Influencia del Islam y la expansión de la civilización árabe desde el siglo VII.
- Desarrollo del feudalismo como sistema de producción agrícola de autoconsumo y fortalecimiento del señor feudal como una elite militar y terrateniente, al menos desde el siglo IX.
- Desarrollo de las cruzadas, que se convocaron en 1095 por el Papa Urbano II como una empresa religiosa y militar, para recuperar los sitios santos en el oriente.
- Fortalecimiento gradual de las urbes y villas comerciales conforme el feudalismo entraba en crisis a partir del siglo XII.
- Surgimiento de las universidades en el siglo XII y del arte gótico en una etapa de renovación urbana y burguesa.
- La guerra de Cien Años entre Inglaterra y Francia por el control territorial al norte de Europa y de los países Bajos en Normandía sobre el Mar del Norte (1336-1453).
- Caída de Constantinopla bajo el poder del imperio otomano-turco en 1453, hecho que simboliza el final de la Edad Media.

Era Moderna
Esta era inició con el Renacimiento, que se distinguió desde el siglo XV, tras la caída del Imperio Romano de Oriente, por el florecimiento de las ciudades comerciales, las ciencias, el arte y el humanismo. El poder hegemónico de la burguesía en alianza con los grandes monarcas originó a los reinos nacionales o estados-nación.

Es una época de grandes descubrimientos geográficos en América y en el mundo, pero también un periodo de crisis por la Reforma Protestante y por las guerras de religión. Los grandes imperios marítimos, fueron los que más se beneficiaron con la apertura de nuevas rutas marítimas y descubrimientos. La rivalidad entre España y Portugal por el control colonial de América fue una constante del siglo XVI.

En el siglo XVIII se consolida la monarquía absolutista y se agudizan las contradicciones entre los reyes, el clero, la nobleza y la burguesía. El Siglo de las Luces o Ilustración, representa un periodo racionalista bajo la influencia liberal y enciclopedista que prepara el camino para las grandes revoluciones burguesas, así como el surgimiento de estados modernos y republicanos con derechos civiles y tendencia democrática.
La Revolución Industrial a finales del siglo XVIII y a lo largo del siglo XIX, representó la última etapa de la Edad Moderna. El modo de producción capitalista, basado en la producción fabril y la explotación de obreros, reafirmó la hegemonía de la burguesía industrial y de las grandes potencias colonialistas.

Edad Contemporánea
Inició después de la Revolución Francesa en 1789. Este periodo está marcado por el derrumbe de las grandes monarquías absolutistas, las luchas sostenidas en el interior de los Estados por los partidos liberales, el establecimiento y la defensa del principio de las nacionalidades y la creación de los grandes imperios-colonias.
Todos estos cambios desembocaron en una era de grandes rivalidades entre potencias capitalistas, del desarrollo científico-tecnológico, y en una proliferación de la carrera armamentista que desencadenó la Primera Guerra Mundial en 1914. Posteriormente, las revoluciones socialistas y el surgimiento de la URSS, así como las dictaduras fascistas y totalitarias anteceden a una nueva conflagración mundial, la Segunda Guerra Mundial. El triunfo de los aliados en 1945, la bomba atómica y la oposición geográfica y política del bloque socialista determinan el desarrollo de la Guerra Fría entre el Capitalismo (Estados Unidos), y el Socialismo (URSS y China). De forma alternativa, se consolidan la ONU y la independencia en África, India y otros países asiáticos frente al mundo bipolar y la amenaza nuclear.

Con el declive del bloque soviético y la caída del muro de Berlín, concluye al finalizar la década de 1980 la Guerra Fría. Se inicia una nueva fase del capitalismo neoliberal con los Estados Unidos al frente de la OTAN, y con nuevos conflictos militares en el Golfo Pérsico. Estados Unidos ejerce una prepotencia bélica y se propone perseguir el narcotráfico y el terrorismo en América Latina. La economía mundial tiende a la globalización y el mundo entero se ve envuelto en la amenaza de las armas químico–biológicas, y la proliferación de los virus. El uso de nuevas tecnologías en informática y en telecomunicaciones, así como el auge de las ciencias genómicas, son rasgos novedosos a inicios del siglo XXI.

c) La Historia como disciplina humanística

Es el estudio y sistematización de los fenómenos humanos, sociales, económicos y políticos a partir de sus causas y consecuencias, que considera la relación entre el pasado, el presente, y el futuro. Entre las características de la Historia como una disciplina científica, destaca su afán objetivo y carácter provisional en pos precisar en la reconstrucción e interpretación de los hechos. Además, la Historia establece una metodología y un conjunto de objetivos que orientan el sentido de lo que se investiga. La observación y la búsqueda de evidencias son también rasgos de la disciplina histórica que la asemejan a la ciencia.

Pero la Historia es la base de las humanidades y se distingue porque el sujeto (historiador) es un ser humano inmerso en el objeto (los fenómenos históricos). La objetividad del científico se ve limitada por su participación concreta en la subjetividad del fenómeno en el que él mismo se ubica.

Diversidad de la Metodología en el estudio de los fenómenos históricos

Corrientes de interpretación del conocimiento histórico

Corriente	Representantes	Objetivos principales
Positivismo	-Auguste Comte -Theodor Mommsen -Émile Durkheim -Hippolyte Taine	- Enriquecer la Historia con el dato exacto. - Investigar detalladamente los hechos. - Descubrir las leyes del desarrollo social.
Historicismo	-Leopold von Ranke -Wilhelm Dilthey -Oswald Spengler -Arnold Toynbee -R. G. Collingwood -José Ortega y Gasset -Benedetto Croce	- Especificar que el suceso histórico es único e irrepetible. - Negar la existencia de leyes históricas. - Establecer los valores que resultan de la evolución histórica. - Especificidad de la Historia frente a la Ciencia.
Materialismo histórico	-Karl Marx -Friedrich Engels	- Afirmar que el factor económico es determinante en la historia. - Explicar la Historia como una lucha de clases. -Analiza las contradicciones sociales en torno a la división del trabajo, visto como modo de producción y como sistema de explotación de la fuerza laboral. -Se propone transformar el modo de producción capitalista mediante una revolución proletaria.

Con base en la teoría positivista, establecida por Auguste Comte a mediados del siglo XIX, el método experimental –propio de las Ciencias Naturales- es posible realizar el estudio científico de la Historia. Así, los parámetros de la Ciencia consisten en el desarrollo de una investigación mediante el planteamiento de una hipótesis pensada en función de una explicación provisional de los acontecimientos y sus causas, a través de la observación y de una eventual comprobación de dicha hipótesis.

Pasos del método científico aplicado a la Ciencia de la Historia

Investigación → Hipótesis → Observación → Comprobación

1. Con base en los conocimientos que se tiene previamente, se inicia una **investigación** sobre algún acontecimiento o fenómeno histórico.
2. Una **hipótesis** nos brinda una explicación provisional sobre las posibles causas y efectos de los hechos o fenómenos que se pretende describir.
3. **Observación** de los hechos o fenómenos a la luz de la hipótesis establecida previamente. Se pretende observar cómo se comportan los hechos con relación a dicha hipótesis.
4. **Comprobación**, la cual consiste en verificar qué tanto la hipótesis ha logrado explicar los hechos históricos.



d) Ciencias auxiliares de la Historia

- **Arqueología**

Es el estudio de restos materiales de las civilizaciones antiguas.

- **Economía**

Ciencia que explica los fenómenos de la producción, el intercambio y el consumo de los bienes y servicios y determina, con base en las condiciones materiales de existencia, los periodos históricos a partir de los llamados modos de producción.

- **Etnografía**

Estudia los grupos humanos a partir de sus rasgos físicos y raciales, sus orígenes y su parentesco, así como su distribución geográfica.

- **Geografía**

Disciplina que se encarga de estudiar los fenómenos terrestres y astronómicos, sus causas y efectos, igualmente su distribución sobre nuestro planeta.

- **Geología**

Es una rama de la Geografía y se refiere al conocimiento de las capas terrestres, su formación, evolución y factores que determinan la corteza terrestre.

- **Lingüística**

Análisis y descripción de la lengua como sistema de comunicación humana. Determina el origen, el parentesco, la evolución y las características gramaticales, semánticas y fonológicas de las diferentes lenguas a través del tiempo y del espacio.

- **Numismática**

Estudia y compara las monedas, medallas y derivados en su proceso histórico y simbólico.

- **Paleografía**

Es una disciplina que estudia, descifra e interpreta las formas de escritura que a través del tiempo las diversas civilizaciones han ido elaborando.

- **Paleontología**

Se refiere al hallazgo de restos fósiles animales y vegetales para determinar su antigüedad y reconstruir sus características físicas y su distribución geográfica.

Ejercicios

1. Por ser una disciplina que estudia al ser humano a través del tiempo, la Historia...
   a) es una rama especializada de la Antropología
   b) no puede considerarse una ciencia social
   c) estudia las pautas del ser en el tiempo
   d) es una ciencia humanística

2. El registro de los acontecimientos históricos, conforme un orden sucesivo es una característica de:
   a) los pueblos antiguos
   b) el paso del tiempo
   c) los estudios historiográficos
   d) los escritos del pasado

3. La Paleografía, la Sociología y la Historia pertenecen al conjunto de:
   a) el nivel medio superior
   b) las Ciencias Sociales
   c) las ramas auxiliares
   d) las Ciencias Exactas

4. Se trata de un notable historiador positivista y uno de los fundadores de la Sociología moderna:
   a) César Augusto
   b) Augusto Comte
   c) Levi Strauss
   d) Clemente Metternich

5. ¿En qué orden debemos establecer los pasos del método experimental aplicado al estudio científico de la Historia?
   I. Se observan los hechos para lograr explicar sus causas y su comportamiento
   II. Se establece la verificación de la hipótesis para comprobar su veracidad
   III. Se elabora una hipótesis que permita anticipar una eventual explicación de los hechos
   IV. Se realiza una investigación mediante los parámetros de la ciencia

   a) I, II, III y IV
   b) III, IV, II y I
   c) IV, III, I y II
   d) II, I, IV y III

6. Lee:

   "Formular el hecho histórico, recurrir a diversas fuentes para su interpretación, analizar y sintetizar el proceso y confirmar la veracidad de nuestras observaciones, son los pasos consecutivos de..."

   a) el método científico en la Historia
   b) el orden cronológico de los acontecimientos
   c) los periodos de la Historia
   d) las etapas historiográficas

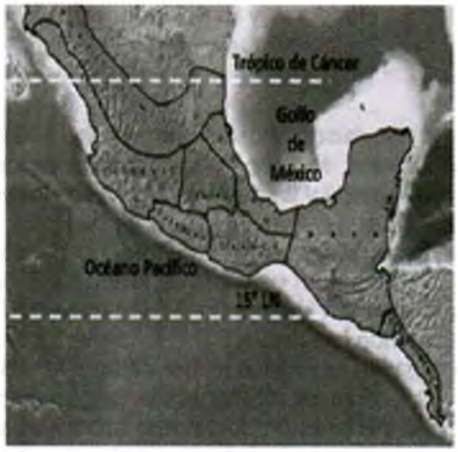
Época Prehispánica 2

Propósito: el alumno identificará los aspectos más relevantes del pasado indígena de México a través de los horizontes histórico-culturales de Mesoamérica.

Mundo indígena mesoamericano

Mesoamérica

Mesoamérica es el área geográfica y cultural donde se establecieron las civilizaciones indígenas precolombinas en diferentes periodos u horizontes, y en regiones determinadas. Los límites del mapa mesoamericano comprenden desde el río Sinaloa -al extremo Noroccidental- y el río Pánuco al Noreste del altiplano central en el actual estado de Hidalgo, así como toda la franja costera del Golfo de México (Tamaulipas, Veracurz y Tabasco) y la península de Yucatán al Este; pero también, la franja costera occidental a lo largo del Océano Pacífico (Sinaloa, Nayarit, Jalisco, Colima, Michoacán, Guerrero, Oaxaca y Chiapas). Al centro de todas esas regiones, se ubica el altiplano central, mientras que el extremo sur de Mesoamérica se extiende hasta tierras centroamericanas en los actuales territorios de Guatemala, Belice, Salvador, Honduras y Nicaragua.



Cuatro horizontes culturales mesoamericanos

I	II	III	IV
Horizonte Preclásico	Horizonte Clásico	Horizonte Postclásico	Horizonte Histórico
2500 a.C. - 200 d. C.	200 a 900 d.C.	900 a 1300	1325 a 1521

a) Horizonte Preclásico (entre 2500 y 500 a. C.)

Expansión cultural Olmeca (cultura madre de Mesoamérica).

- Pleno dominio de la agricultura; vida sedentaria en aldeas pequeñas y villas hasta de 200 habitantes, pero de intensa actividad económica.
- Estructuras sociales jerarquizadas.
- Entre 1 200 y 500 a. C. La agricultura se distingue por la ingeniería hidráulica, canales y terrazas.
- División del trabajo: campesinos, comerciantes, guerreros, burocracia administrativa a cargo de una nobleza gobernante, jefes militares, político-religiosos.
- Principal cultura: Olmeca o cultura de La Venta, en Veracruz y Tabasco. Llamada "La Madre de las Culturas Mesoamericanas".
- Principales vestigios preclásicos: San Lorenzo, Tres Zapotes y La Venta en Veracruz y Tabasco; una parte de las ruinas de Monte Albán en Oaxaca.
- Administración de excedentes y desarrollo del comercio.
- Invención de la escritura, la numeración y el calendario mesoamericano.

b) Horizonte Clásico (entre 200 a. C. y 900 d. C)

- Desarrollo urbanístico, ciudades planificadas, pirámides truncas y escalonadas. Orientación astronómica de sitios ceremoniales.
- Expansión política y mercantil, hegemonía cultural teotihuacana hasta el año 650 d.C., sobre otros ámbitos mesoamericanos como la región zapoteca y la zona maya. Destacan los gobiernos teocráticos sacerdotales en los primeros siglos, y un posterior desarrollo militar y tributario. El culto a Quetzalcóatl hunde sus raíces en Teotihuacan, pero se identifica con el nombre de Kukulkan entre los mayas.

- Desarrollo astronómico y matemático entre los mayas, que se basa en la invención del cero, fracciones aritméticas, logaritmos, etc.; perfeccionamiento del calendario Solar y Lunar, Cuenta Larga.
- Cálculo de fenómenos celestes precisos y lejanos como eclipses, ciclo de Venus y otros; estelas e inscripciones con personajes históricos que reflejan el contacto político y cultural con Teotihuacan.
- Intensa actividad agrícola, sistema de roza para fertilizar la tierra, irrigación por canales.
- Sobresale la escritura jeroglífica en numerosas estelas e inscripciones; elaboración de códices.
- Principales culturas clásicas:
  - Teotihuacana: Estado de México, Puebla, Veracruz, Morelos y Oaxaca.
  - Maya: Tabasco, Chiapas, Campeche, Yucatán y Quintana Roo en México; Belice, Guatemala, Honduras y El Salvador en Centroamérica.
  - Zapoteca: Oaxaca (Monte Albán).
  - Totonaca: centro y norte de Veracruz (Tajín).

c) Horizonte Postclásico (entre 900 d.C. y el año 1300)

- Oleajes de grupos chichimecas procedentes del norte (Aridoamérica), penetran a Mesoamérica; fusiones culturales y lingüísticas, así como invasiones, peregrinaciones y lejanas caravanas de comerciantes.
- Alianzas militares, cambios políticos y surgimiento de señoríos altamente militarizados.
- Evolución artística y cultural de nuevos señoríos como Tula o los mixtecas, bajo la influencia legendaria de Teotihuacan y mayas de la época clásica.
- De origen legendario la fundación de Tula está relacionada con la figura mítica de Quetzalcóatl en el año 900 de nuestra era.
- Estado teocrático militar altamente urbanizado sobre la frontera norte de Mesoamérica (Hidalgo). La guerra y la economía tributaria son rasgos típicos en Tula. La arquitectura tolteca es heredera de Teotihuacan, pero de menores proporciones; sobresale el juego de pelota y los llamados Atlantes, columnas que representan a guardianes (quizá semejantes a la tradición del tótem). La figura antropomorfa de Tláloc –conocido como el Chac Mol– sobre su altar célebre.
- El alcance cultural de Tula, su decadencia en el año 1200 y su influencia en sitios mayas como Chichén-Itzá involucran al mito de Quetzalcóatl, fundador del arte, la sabiduría y la civilización.
- Principales culturas postclásicas:
  - Toltecas, chichimecas, en Puebla y Tlaxcala. Centro ceremonial en: Tula (Hidalgo) y Tenayuca (Estado de México).
  - Tarascos, purépechas, en Michoacán.
  - Mixtecos, en Oaxaca. Centro ceremonial en Mitla (Oaxaca).

d) Horizonte Histórico (entre 1324 y 1521)

- Comprende desde la fundación de Tenochtitlán hasta la llegada de los españoles. Se le llama histórico porque se tienen datos más precisos como códices.
- Predominio político, militar y económico de los mexicas sobre otros reinos con base en la guerra florida, el tributo y las alianzas con Texcoco y Tlacopan en el valle de México.
- Etapa de mayor documentación histórica registrada en códices y en una fresca tradición oral que sobrevivió a la conquista española; evocación de la grandeza tolteca y teotihuacana en la memoria de los reinos más recientes, como Tenochtitlán.
- Llegada de los españoles a finales del siglo XV, descubrimiento y conquista de México; fusión y mestizaje entre el viejo mundo europeo y la cultura mesoamericana tras la caída de Tenochtitlán, de los Purépechas en Michoacán y de los últimos sitios mayas.

Ejercicios

1. ¿Cuál fue la civilización mesoamericana representativa del Horizonte Preclásico?
   a) Los olmecas, conocidos como la *cultura madre*
   b) Los mayas quichés en Guatemala
   c) Los Atlantes de Tula al norte de Mesoamérica
   d) Los mexicas, tribu nahua procedente de Aztlán

2. El origen de la numeración, la escritura y el calendario mesoamericanos se remontan…
   a) al Horizonte Preclásico mesoamericano
   b) al Horizonte Clásico mesoamericano
   c) al horizonte Postclásico mesoamericano
   d) al Horizonte Histórico mesoamericano

3. Identifica dónde se establecieron los olmecas, civilización del Horizonte Preclásico mesoamericano.
   a) Sobre costas del Pacífico entre los ríos Pánuco y Grijalva
   b) En sitios como San Lorenzo, Tres Zapotes y la Venta, sobre costas del Golfo de México
   c) En el área maya mesoamericana en la Verapaz, hoy Guatemala
   d) En sitios arqueológicos mesoamericanos entre el estado de Hidalgo y Chiapas

4. Identifica una característica específica del Horizonte Clásico mesoamericano.
   a) La invención de la rueda y de la pólvora, ambos de origen tolteca
   b) El paso de hordas cazadoras por el estrecho de Bering
   c) El urbanismo que distinguió a Teotihuacan en el altiplano central
   d) La invención del alfabeto y de la numeración binaria en zonas mayas

5. La cuenta larga o perfeccionamiento del calendario mesoamericano, la invención del cero, así como la enorme precisión astronómica fueron logros alcanzados por ____________________ a lo largo del Horizonte Clásico.
   a) la *cultura madre*
   b) los olmecas
   c) las tribus nahuas
   d) la civilización maya

6. ¿Qué importante vestigio tolteca se localiza sobre la ciudad de Tula?
   a) La pirámide del Sol
   b) La tumba de Pakal
   c) Los manuscritos del Popol Vuh
   d) Los célebres atlantes

7. Son rasgos del Horizonte Histórico de Mesoamérica todos los siguientes, **excepto**:
   a) la fundación del imperio azteca
   b) la arquitectura teotihuacana
   c) la llegada de los españoles a costas mexicanas
   d) la caída de México Tenochtitlán

8. En el contexto mesoamericano, ¿cuál fue la etapa de mayor producción de códices y, por consecuencia, de un más amplio registro histórico?
   a) El Horizonte Preclásico
   b) El Horizonte Clásico
   c) El Horizonte Postclásico
   d) El Horizonte Histórico

3 Encuentro de dos mundos Conquista y colonización

Propósito: el alumno distinguirá las características políticas, económicas, sociales y culturales del México Colonial, a partir de la Conquista y durante los siglos XVI al XIX.

Introducción

El Renacimiento

El Renacimiento es una etapa transitiva en la Historia entre la Edad Media y la Edad Moderna, y comprende aproximadamente el lapso entre los siglos XV y XVII. Fue manifestándose en diversas regiones de Europa y en distintos momentos, si bien simbólicamente se considera a la caída del Imperio Romano de Oriente (Constantinopla) bajo el poder otomano-turco como el punto de partida del Renacimiento en 1453. Y sólo y 39 años más tarde, el descubrimiento del Nuevo Mundo en 1492 permitió al comercio europeo florecer en una ruta marítima sobre el Océano Atlántico.

Época de grandes transformaciones

-En 1453 cae Constantinopla bajo el poder del Imperio Otomano-Turco
-En 1455 J. Gutemberg inica la impresión de la Biblia en su imprenta de tipos móviles
-En 1492 C. Colón descubre América
-En 1517 M. Lutero inicia la reforma protestante, desconociendo la autoridad del papa León X
-En 1521 Hernán Cortés consuma la conquista de México
-En 1530 Nicolás Copérnico establece la teoría heliocéntrica



El **espíritu clásico** renacentista se inspira en el modelo estético grecolatino, y está ligado a una **abundante producción artística** en campos diversos como la Pintura, la Literatura, la Música, la Arquitectura y la Escultura.
Artistas y pensadores asumieron un **carácter intelectual** para desarrollar sus obras e idealizaron los valores de la Antigüedad clásica al servicio de un nuevo **humanismo renacentista**.



La conquista de México

A principios de 1519, Diego de Velásquez le autorizó a Hernán Cortés para emprender un viaje de exploración a tierra firme y lo nombró capitán y justicia. Al final, el gobernador de Cuba retira su autorización a Cortés, pero éste emprende la expedición de todas formas. Hernán Cortés funda la Villa Rica de la Vera Cruz; la autoridad local le otorga permiso a Cortés para continuar su expedición hacia el valle de México y lo nombra capitán general de las tropas españolas.

Moctezuma recibe finalmente a los españoles en el célebre sitio de Xóloc (Calzada de Tlalpan). La sumisión del tlatoani azteca está relacionada con la idea de que se cumplía la profecía sobre el retorno de Quetzalcóatl, al hospedar a los españoles en su propio palacio.
El gobernador de Cuba, Diego de Velásquez, envió a Pánfilo de Narváez para que capturara a Cortés, pero la misión fracasa. Durante su ausencia, mientras combatía a Narváez, Cortés encomienda el mando de sus tropas en Tenochtitlán a Pedro de Alvarado. Éste masacra a cientos de mexicas durante la fiesta de Toxcatl, en mayo de 1520. Los españoles se refugian en el palacio de Axayácatl para sobrevivir al contraataque azteca tras la matanza del Templo Mayor.

Cortés retorna a Tenochtitlán después de someter a Pánfilo de Narváez y queda sitiado junto con sus tropas y algunos aliados indígenas. A Moctezuma lo exhiben desde una terraza y lo obliga Cortés a disuadir a los tenochcas en su ataque contra los españoles, pero es apedreado por la población azteca. Los españoles logran escapar de la ciudad durante la llamada Noche Triste, y sufren bajas significativas. Cortés reestructura su estrategia con base en las alianzas con tlaxcaltecas y otros señoríos adversarios tradicionales de Tenochtitlán; incluye el uso de sus barcos y poderosos cañones para una nueva ofensiva sobre la capital azteca. Otra ventaja de los españoles fue la epidemia de viruela con la que, en forma imprevista, contagiaron a los habitantes del valle de México, diezmando a la población indígena.

Durante la conquista, es importante señalar que:

- Los españoles eran una minoría, pero consiguieron aliarse con los pueblos que pagaban tributos excesivos a los aztecas. Al llegar a Tenochtitlán los soldados españoles no pasaban de mil y sus aliados indígenas (tlaxcaltecas principalmente) eran más de 50 000.
- El armamento español, la presencia de caballos y las predicciones religiosas sobre la llegada de conquistadores, influyeron en el ánimo derrotista de Moctezuma. Una epidemia de viruela agravó la situación para los aztecas durante el sitio y caída de Tenochtitlán.
- La sagacidad y las estrategias de Cortés fueron también definitivas para la conquista del imperio azteca.

A principios de 1521, se nombró como nuevo tlatoani a Cuitláhuac en una cuidad aislada, sin alimentos ni agua, y en estado de sitio. La repentina muerte de Cuitláhuac por la viruela significó un funesto presagio para la resistencia tenochca.

Se nombró como sucesor al joven Cuauhtemotzin, quien encabezó una feroz y desesperada resistencia. La derrota total de México Tenochtitlán, tras la captura de Cuauhtémoc, se consumó el 13 de agosto de 1521.

La vida colonial

Desde un principio, el imperio español tuvo que enfrentar las dificultades para administrar y gobernar vastos territorios coloniales de manera que pudiera beneficiarse en lo político y en lo económico con la adquisición de tierras americanas. En 1535 se fundó el Virreinato de la Nueva España y se nombró al primer virrey Antonio de Mendoza como representante personal del emperador español.

El descubrimiento de América, su conquista y colonización, proporcionaron beneficios económicos a la metrópoli mucho más allá de lo esperado. Pero fue menester organizar la estructura económico-social de Nueva España para lograr un mejor aprovechamiento de todas las ventajas que para España representaba la colonización.

a) Instituciones políticas coloniales



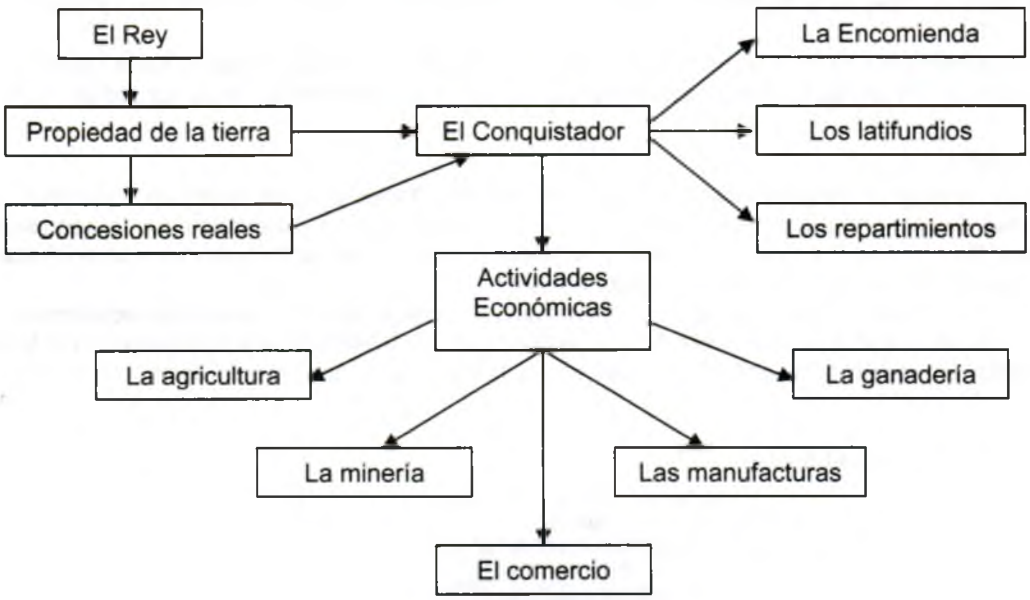
- ***El Virrey.*** Gobernaba en nombre del rey de España. Máxima autoridad en la Nueva España: gobernador, capitán general, superintendente de la Real Hacienda y vicepatrono de la Iglesia. Hubo 62 virreyes (1535 a 1821).
- ***Real Consejo de Indias.*** Organismo de administración política y judicial que controlaba, bajo supervisión del propio virrey, los asuntos coloniales y elaboraba leyes; también regía a los tribunales de justicia, entre otros a la inquisición.
- ***La Real Audiencia.*** El tribunal de mayor rango, también tenía funciones administrativas y gobernaba en ausencia del virrey. Servía de contrapeso y limitaba el poder del virrey. Entre sus objetivos estaba defender a los indios de los excesos de las autoridades y españoles peninsulares.
- ***La Casa de Contratación de Sevilla***. Se encargaba de coordinar el flujo comercial entre la metrópoli y todas sus colonias en América.
- **El Ayuntamiento.** Poder local o parcial que se ejercía por encargo de una autoridad mayor y se delegaba en un alcalde.
- ***Oidores.*** Especie de auditores que la corona española enviaba esporádicamente para investigar el funcionamiento de la administración colonial. Los oidores estaban autorizados para corregir anomalías; fueron muy comunes en los últimos tiempos de la colonia y respondían a los criterios de las reformas borbónicas de los reyes españoles.

- ***Visitadores.*** Enviados por el rey de España para conocer de algún asunto o situación que surgiera en la Nueva España. Eran una especie de inspectores reales.

b) La economía y la sociedad en Nueva España

El descubrimiento de América, su conquista y colonización, proporcionaron beneficios económicos a la metrópoli mucho más allá de lo esperado.

LA ECONOMÍA NOVOHISPANA



Todo el sistema de dominación española en América se cimentó sobre los andamiajes de una sociedad de castas, la cual consistía en la segregación racial en una escala piramidal.



- Peninsulares

Españoles procedentes de la península

- Criollos

Españoles nacidos en América

- Mestizos

Mezcla racial español-indígena

- Castas

Mulatos, zambos, saltapatrás, etc.

- Negros

Sector de origen africano, reducido a la esclavitud

Explotación de la fuerza de trabajo en el México Colonial

Principalmente la población peninsular radicada en Nueva España se valió de mecanismos como la encomienda, el repartimiento y la esclavitud para enriquecerse. La población nativa y la raza negra padecieron el yugo de esos mecanismos laborales a lo largo de varios siglos de vida económica y social novohispana.

La encomienda
Con características de tipo feudal, la encomienda fue un sistema tributario que consistía en otorgar a un encomendero -conquistador o descendiente de conquistador- tierras de cultivo, así como trabajadores indígenas obligados de por vida a trabajar para él.



Encomendero y encomendado

El encomendero podía enriquecerse de esta forma, pero tenía algunas obligaciones por cumplir:

- Recaudar el “quinto real” o impuesto para la Corona
- Proteger y evangelizar a la población indígena le era encomendada.

El repartimiento o catequil
Se trata de una práctica de explotación laboral, consistente en la facultad que tenía el alcalde mayor en cada poblado para exigir a las comunidades indígenas la entrega de trabajadores temporales al servicio de hacendados españoles o mineros.



Repartimiento o catequil

El repartimiento o catequil se caracterizó por:

- Ser un trabajo forzado
- Su carácter temporal
- Una remuneración salarial, aunque muy mal pagada

La esclavitud
La más cruenta forma para explotar la fuerza de trabajo fue la esclavitud que los españoles realizaron a costa de la población negra procedente del África.

Bajo este sistema, el trabajador es reducido sin goce de derechos ni de propiedad, por lo cual no se le retribuye su trabajo ni se recompensa con la evangelización. El esclavo tampoco puede poseer propiedades, ni siquiera la de su persona; puede ser vendido y obligado a la reproducción. Y los hijos de un esclavo generalmente nacen también como esclavos.



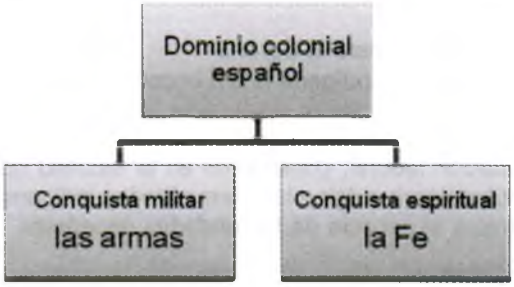
Esclavitud

c) La cultura colonial
En un amplio sentido, la vida colonial significó un proceso intenso y abigarrado determinado por el mestizaje; sobre las ruinas de México Tenochtitlán se levantó materialmente la construcción de la Nueva España. Probablemente esta fusión racial y lingüística, de la sociedad novohispana, motivó un rico florecimiento artístico y cultural durante siglos. Las obras arquitectónicas de Manuel Tolsá como la fachada de la catedral metropolitana y su cúpula, así como la escultura ecuestre de Carlos V en el Palacio de Minería son ejemplos que revelan la diversidad de estilos coloniales. También el antiguo Colegio de San Ildefonso y el Jardín Botánico distinguen el embellecimiento urbano de la Nueva España.
En 1551 se fundó la **Real y Pontificia Universidad de México**, donde se impartía Teología, Derecho Civil y Canónico, Medicina y Artes. En Michoacán y en Guadalajara se establecieron colegios bajo la dirección de clérigos, quienes se formaban en el sacerdocio e inculcaban artes y oficios a individuos de origen indígena. Franciscanos, dominicos, jesuitas y agustinos impulsaron el **teatro de evangelización,** el estudio de lenguas como **el náhuatl, el purépecha y el maya,** a la vez que mantuvieron vivas las gramáticas latina y griega.
Por su parte la Pintura, la Escultura, la Arquitectura, la Talla en Madera, la Herrería, los vitrales, y la Alfarería contenían características híbridas, ya que se sometían a cánones impuestos por los modelos europeos pero reflejaban el espíritu artístico de las manos indígenas.

España aportó técnicas e instrumentos de precisión como el telescopio, la brújula y el sistema de pesas y medidas occidental; además de la rueda, el arado y el empleo de bestias de carga. De origen mesoamericano, fueron el juego de pelota, el arte plumario, el tabaco, y ciertos conocimientos de herbolaria que, a través de los siglos, han permanecido en nuestra cultura.

Las primeras escuelas fueron fundadas por misioneros; entre ellas destacan el Colegio de la Santa Cruz de Tlatelolco, el Colegio de San Juan de Letrán, el Colegio Mayor de Santa María de Todos los Santos, el Colegio de San Pedro y San Pablo y el Colegio de San Ildefonso. En 1551 se fundó la Real y Pontificia Universidad de México. La imprenta se trajo a América en 1539, máquina que facilitó la tarea educativa y fomentando las letras en la Nueva España.

En literatura destacaron: Bernardo de Balbuena, Sor Juana Inés de la Cruz, Juan Ruiz de Alarcón, Carlos de Sigüenza y Góngora, Francisco Xavier Alegre y Francisco Xavier Clavijero. En teatro se distinguieron: Agustín de Betancourt y Juan Ruiz de Alarcón.



Conforme se fue estableciendo la colonización de México, llegaron diversas órdenes misioneras para la evangelización. Franciscanos, dominicos, agustinos y jesuitas se extendieron a lo largo y ancho de la Nueva España para poner en práctica la evangelización. Si bien, la fundación de conventos, colegios y hospitales fueron emprendedoras tareas que los misioneros llevaron a cabo para educar y asistir a la población nativa, frecuentemente como respuesta ante esos clérigos evangelizadores que solicitaban a los señores indígenas la entrega de sus hijos para ser instruidos, las comunidades nativas ocultaban a sus hijos y se negaron a entregarlos para que fueran educados en conventos y otros recintos. La desconfianza, justificada o no, era evidente.

Ejercicios

1. Una ventaja de Hernán Cortés, la cual le facilitó la conquista de Tenochtitlán fue:
   a) la lucha de clases que existía entre olmecas y tlaxcaltecas
   b) la formación del virreinato de la Nueva España en 1535
   c) las armas de fuego con que contaba el capitán español
   d) el apoyo del imperio inca a favor de la causa española

2. La vida del México colonial se distinguió por:
   a) un sistema político dictatorial basado en la igualdad de castas
   b) una estructura de castas que favorecía a los criollos por encima de los peninsulares
   c) un control político y económico de la Nueva España por parte de la Corona española
   d) la amplia difusión de ideas ilustradas que España promovió a través de reformas borbónicas

3. En el México Colonial, los criollos eran...
   a) considerados como españoles peninsulares
   b) llamados como *gachupines*
   c) el sector privilegiado en Nueva España
   d) hijos de españoles nacidos en la Nueva España

4. Mientras que la Encomienda consistía en una supuesta protección que el encomendero debería proporcionar a los indios que trabajaban para él -incluyendo la evangelización-, el Repartimiento era:
   a) una forma justa y equitativa de trabajo libre asalariado
   b) un mecanismo para garantizar la autosuficiencia alimentaria
   c) un sistema de trabajo temporal a cambio de un salario
   d) un sistema de origen feudal para el autoconsumo

5. Para evangelizar a los pueblos nativos de México, ¿quién solicitaba a los señores indígenas principales la entrega de sus hijos para educarlos en conventos?
   a) Los clérigos radicados en la Nueva España
   b) La religión anglicana, procedente de Inglaterra
   c) El papa Alejandro VI
   d) Fray Bartolomé de las Casas

6. Los alcaldes mayores podían imponer a los pueblos indígenas del México Colonial la entrega de trabajadores temporales al servicio de las minas o de las fincas agrícolas, a cambio de un salario reducido. El nombre de este sistema de explotación de la fuerza de trabajo es:
   a) esclavitud
   b) Encomienda caciquil
   c) Catequil o repartimiento
   d) rotación de cultivos

7. El mestizaje que se forjó durante la época colonial tuvo como característica:
   a) sólo una fusión racial pero, no cultural
   b) el predominio de elementos lingüísticos de procedencia náhuatl sobre el castellano
   c) una formación cultural en la que no participó la Iglesia católica
   d) la fusión racial, lingüística y cultural entre españoles, indígenas y la raza africana

8. Tanto la llegada de la imprenta como la difusión de artes y oficios que los clérigos impulsaron, así como la Real y Pontificia Universidad de México, representan:
   a) la falta de un proyecto cultural integral y educativo del virreinato
   b) una fusión cultural, artística e intelectual en la Nueva España
   c) el nulo interés de España por la educación en sus colonias
   d) la oferta cultural del México Independiente

4 Independencia

Propósito: el alumno describirá la Independencia de México, considerando sus antecedentes y causas, así como las etapas, personajes y documentos relevantes en dicho proceso histórico.

Causas de la emancipación en Nueva España

Como virreinato de la Nueva España, México careció siempre de soberanía propia; los habitantes del México colonial no eran ciudadanos sino súbditos de la Corona Española.

Pero en 1808, el Imperio Napoleónico invadió a España. Al quedar nombrado como emperador al frente del trono español José Bonaparte, en la Nueva España Francisco Primo de Verdad –síndico de la ciudad de México- le propuso al José de Iturrigaray que en la Nueva España se integrase una junta de gobierno que asumiera el mando del virreinato en ausencia de Fernando VII. Otro antecedente previo al estallido de la Independencia fue la Conspiración de Querétaro, la cual también justifico su causa a nombre de Fernando VII.



Francisco Primo de Verdad en 1809

a) Causas externas

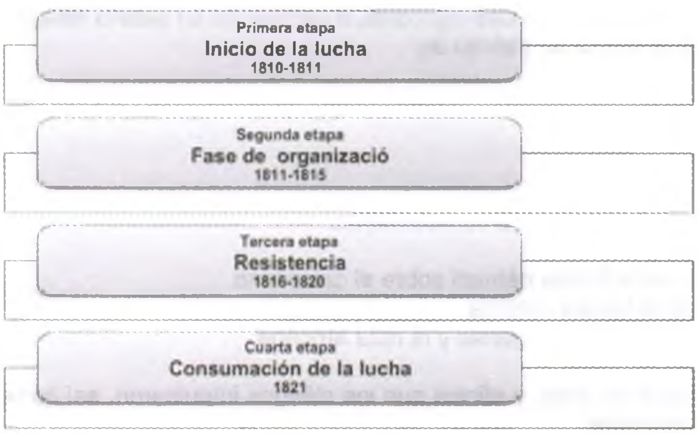
- Las ideas enciclopedistas y los ideales de la ilustración.
- El impacto de la independencia de Norteamérica en 1776 y de la Revolución Francesa de 1789.
- La influencia de la Revolución Industrial en Europa y América.
- La decadencia imperial de España reflejada en las reformas borbónicas del siglo XVIII.
- La invasión napoleónica a España y Portugal entre 1807 y 1814.

b) Causas Internas

- El monopolio político y económico de España sobre sus colonias: falta de libertades económicas y políticas.
- La injusticia social: sociedad de castas, encomienda, esclavitud, etc.

Etapas de la lucha

Las cuatro etapas de la Independencia



Durante la lucha de independencia se elaboraron documentos que definieron el rumbo del país, entre ellos están:

- **Los Sentimientos de la Nación.** Ideario y proclama de José María Morelos.
- **Constitución de Apatzingán (1814).** Decretada por Morelos desde la insurgencia. Nunca entró en vigencia.
- **Plan de Iguala.** Decretado por Iturbide y Guerrero. Sus objetivos: Religión, Independencia y Unión, de los que se derivan los tres colores de la bandera mexicana, y se le da el nombre al Ejército Trigarante o de las Tres Garantías.
- **Tratado de Córdoba (25 de agosto de 1821).** Acuerdo entre Iturbide y el virrey O´Donojú. El virrey reconoce la Independencia de México. España reconoce a México como país independiente hasta 1836.

a) Primera etapa (inicio) 1810 y 1811

El 16 de septiembre de 1810 el cura Hidalgo da el llamado grito de Dolores, en Guanajuato y convoca a los sectores más oprimidos a rebelarse, pero proclama a Fernando VII como legítima autoridad. Los insurgentes toman la plaza de San Miguel, El Grande, y el 21 de septiembre, Celaya. Posteriormente entran en Guanajuato, y el 19 de octubre a Valladolid, Michoacán, donde Hidalgo decreta la abolición de la esclavitud y del pago de tributos. La toma de la Alhóndiga de Granaditas en Guanajuato y la batalla del Monte de las Cruces, en la que Hidalgo venció a las tropas realistas del general Torcuato Trujillo cerca de la ciudad de México, fueron episodios muy exitosos para la causa insurgente al inicio de la lucha. José María Morelos se adhiere al movimiento en Indaparapeo, con la misión de controlar las costas del Pacífico y el puerto de Acapulco.

Pero la causa insurgente experimentó serios reveces que aminoraron los logros. En enero de1811, el general Calleja derrotó a los insurgentes en el Puente de Calderón, cerca de Guadalajara. Hidalgo, Allende y Aldama deciden buscar apoyo procedente de los Estados Unidos de Norteamérica, pero son sorprendidos rumbo a Monclova, procesados y sentenciados a muerte. Aldama y Allende fueron fusilados el 26 de junio de 1811, e Hidalgo el 30 de julio del mismo año.

b) Segunda etapa (organización) entre 1811 y 1815

Desde febrero de 1811, Morelos controlaba ya Chilpancingo, apoyado por los hermanos Bravo. Otra figura importante que se unió a Morelos en la toma de Tixtla fue Vicente Guerrero. Los hermanos Galeana formaban parte de las tropas insurgentes, y con ellos Morelos se apoderó de Chiautla, Puebla y otros sitios cada vez más cercanos a la capital. Morelos convocó en septiembre de 1813 un congreso en Chilpancingo ante quien dio a conocer su ideario político en un documento conocido como "Sentimientos de la Nación": proponía la independencia definitiva y el rompimiento con Fernando VII; también una república tripartita, la abolición de la esclavitud y la igualdad civil ante la ley, así como la supresión de tributos parroquiales. Sin embargo sostuvo la religión católica como culto oficial.

c) Tercera etapa (la resistencia del movimiento) 1816 a 1819

La caída de Morelos se vio envuelta en un clima de contraofensiva realista; en general la lucha popular perdió casi toda su fuerza. Javier Mina y Fray Servando Teresa de Mier planearon un desembarco en México para impulsar la lucha insurgente. Fracasaron rápidamente a mediados de 1817. La independencia de México se ahogaba y muchos rebeldes se atenían a la amnistía ofrecida por Apocada. Salvo algunas figuras como Vicente Guerrero y el general Ascensio, que resistían y obtenían triunfos locales y aislados, ya casi nadie continuaba la lucha.

d) Cuarta etapa (consumación) de 1819 a 1821

Las dificultades que atravesaba Fernando VII desde 1918 favorecieron a los liberales en España. El comandante Rafael Diego, opuesto al modelo absolutista, obligó al monarca español a restablecer la constitución de Cádiz. Este hecho repercutió decisivamente en la Metrópoli y en la Nueva España, pues el sector conservador vio amenazados sus intereses con este giro en la política española. Iturbide, después de haber perseguido en vano a Vicente Guerrero en las montañas del sur, cambió su estrategia y le ofreció el indulto en una carta enviada hacia enero de 1821. Por su parte, Pedro Ascencio continuó con la organización de una férrea lucha en el interior del país. Ascencio y Guerrero sostuvieron la causa insurgente hasta su consumación.

Tras varias negociaciones entre Iturbide y Guerrero, ambos se encontraron en el pueblo de Acatempan y acordaron cómo lograr la consumación de la Independencia, según consta en el llamado Plan de Iguala: era necesaria la unidad entre peninsulares y americanos para obtener la independencia y fundar un régimen monárquico constitucional.

Con el tratado de Córdoba –firmado por Guerrero, Iturbide y el último virrey en Nueva España, O' Donojú– México logró formalmente la consumación de la independencia.

Ejercicios

1. Lee.
Hacia 1808, el Imperio Napoleónico invadió a España. Al quedar nombrado como emperador al frente del trono español José Bonaparte, en la Nueva España, Francisco Primo de Verdad –síndico de la ciudad de México- le propuso al virrey José de Iturrigaray que se integrase una junta de gobierno, la cual asumiera el mando del virreinato en ausencia de Fernando VII.

   Por el contenido del texto anterior, se desprende que:
   a) a pesar de invadir a España, las tropas francesas fueron leales a Fernando VII
   b) la invasión napoleónica fue un antecedente para la independencia de México
   c) Fernando VII se refugió en la Nueva España y asumió el mando del virreinato
   d) José Bonaparte usurpó el trono español, pero respetó la soberanía de la Nueva España

2. Previo al estallido de la Independencia de México en 1810...
   a) se realizó la Junta de Notables para integrar el Segundo Imperio
   b) fueron firmados el Plan de Iguala y el Tratado de Córdoba
   c) se suscitó la Conspiración de Querétaro
   d) fue decretada la Constitución de Apatzingán

3. La injusticia social que se vivió en México durante la Colonia, así como la invasión napoleónica a España motivaron...
   a) la emancipación de la Nueva España a inicios del siglo XIX
   b) una conciencia criolla de respaldo absoluto a las Reformas Borbónicas
   c) la expulsión de los jesuitas en 1767
   d) la firma del Tratado de Córdoba a favor de la Independencia

4. ¿Qué importante manifiesto redactó y leyó frente el Congreso de Chilpancingo José María Morelos, con el propósito de impulsar la soberanía y la independencia de México?
   a) La Constitución de Cádiz
   b) *Los Sentimientos de la Nación*
   c) El Plan de Iguala
   d) Las Siete Leyes Orgánicas

5. ¿Qué acuerdo firmado en febrero de 1821 permitió una alianza entre las tropas insurgentes dirigidas por Vicente Guerrero y el ejército realista a cargo de Agustín de Iturbide, dando origen a la integración del Ejército Trigarante?
   a) Los Sentimientos de la Nación
   b) El Plan de Iguala
   c) El Pacto de la Ciudadela
   d) El Tratado de Córdoba

6. Nombre del virrey que reconoció la independencia de México al firmar el Tratado de Córdoba.
   a) Juan de O´Donojú
   b) Fernando VII
   c) Agustín de Iturbide
   d) El general Calleja

7. Antes de que las tropas trigarantes entraran a la capital para consumar la Independencia,...
   a) España reconoció formalmente la causa de los insurgentes
   b) la Constitución de Cádiz reconoció la soberanía de la Nueva España
   c) Agustín de Iturbide y Juan de O´Donojú firmaron el Tratado de Córdoba
   d) Vicente Guerrero asumió como virrey el mando de la Nueva España

8. ¿Qué importancia histórica reviste el Tratado de Córdoba?
   a) Representa el triunfo de la Independencia y la consumación de la lucha
   b) Simboliza el poder soberano de la Constitución de Cádiz
   c) Es el documento mediante el cual se legitimó el mando de Fernando VII
   d) Sirvió como fundamento político para apoyar al Congreso de Chilpancingo

Reforma 5

Propósito: el alumno identificará las dificultades internas y externas del México independiente entre 1821 y 1867, así como las principales diferencias ideológicas y políticas entre liberales y conservadores.

Antecedentes entre 1821 y 1853 (México después de la Independencia)

a) Liberales y conservadores

Tras la consumación de la independencia, nuestro país atravesó varias décadas de conflicto interno y de verdadero caos nacional. Entre los factores que suscitaron la situación anárquica que México experimentó entre 1812 y 1853 debemos considerar los siguientes:

- Luchas políticas entre dos bandos: liberales y conservadores.
- Gobiernos federalistas y centralistas muy débiles e inestables.
- Enormes gastos de guerra y falta de productividad económica.
- Rezago social y tendencias separatistas en diversas regiones del país.
- Conflictos internacionales que debilitaban la soberanía de la nación.

Ideales de la Logia Yorkina (bando liberal)	Ideales de la Logia Escocesa (bando conservador)
• Federalismo Consiste en la autonomía política y administrativa de cada estado bajo un pacto federal.	• **Centralismo** Consiste en una administración central desde la capital de todos los departamentos sin concederles autonomía propia.
• Estado laico Se basa en la separación entre los asuntos públicos en manos del Estado y los asuntos religiosos en manos de la Iglesia	• **Religión de Estado** Se asume una religión oficial, ligada al Estado; se justifica la injerencia de la Iglesia en asuntos públicos.
• Igualdad civil Se considera la supremacía de la ley por encima de todos, es decir, que todos los individuos son iguales ante la ley	• **Fueros especiales** Tiene como punto de partida que sectores privilegiados –como el clero o la milicia-pueden actuar por encima de la ley.

b) Agresiones Internacionales

Entre 1838 y 1839, se desató un peculiar conflicto entre México y Francia: los desórdenes políticos y civiles que agitaban la vida nacional fueron causa de perjuicios que afectaron a comerciantes franceses, entre los que destacaban los daños ocurridos a un expendio de pasteles. Francia reclamaba a México una jugosa indemnización por 600 mil pesos. La amenaza de invasión de nuestras fronteras quedó registrada por la memoria popular como Guerra de los Pasteles, aunque la situación tuvo un desenlace menos grave de lo que se esperaba si Francia hubiera invadido a México en esa ocasión.

La separación de Texas a partir de 1835 resultó un episodio más adverso para la integración nacional: el tratado de Velasco representó una especie de declaración de independencia, tras lo cual hubo enfrentamientos entre Santa Anna y las tropas del general norteamericano Samuel Hudson.

En 1845 el conflicto se agravó cuando el congreso norteamericano decretó la anexión de Texas a Estados Unidos. Tropas de ese país invadieron diversos sitios de la República Mexicana durante los meses siguientes, y el 13 de mayo de 1846 Estados Unidos declararó la guerra. Al finalizar el año, Estados Unidos había tomado todo el norte de México. La batalla del Molino del Rey y la toma de la ciudad de México se dieron a mediados de 1847.

Del Tratado de Guadalupe Hidalgo, del 2 de febrero de 1848, destacan los siguientes puntos:

- Estados Unidos recorrió sus límites hasta el río Bravo.
- México perdió más de la mitad de su territorio: Alta California, Nuevo México, Arizona, y, desde luego, Texas (2, 400,000 Km^2 aproximadamente).

De la Revolución de Ayutla a la Reforma liberal

En 1853 los partidarios del centralismo lograron posicionar una vez más a Antonio López de Santa Anna en la presidencia. Su dictadura se distinguió por anular al poder legislativo y la soberanía de las entidades federativas del país para imponer un régimen personalista. Mantuvo un estricto control de la prensa y de la libertad de opinión, una sistemática persecución de sus opositores y un pacto sólido con el poder conservador. La imagen de Santa Anna resultó más antipática cuando Estados Unidos obtuvo el territorio de La Mesilla, al norte de Sonora, sin que el dictador opusiera resistencia alguna y a cambio de una indemnización de diez millones de pesos. La venta de la Mesilla y la proclamación de Santa Anna como dictador vitalicio con el título de "Su Alteza Serenísima" motivaron más reacciones y levantamientos liberales.

Pero fue el gobernador de Guerrero, Juan Álvarez, apoyado por militares de gran experiencia como Ignacio Comonfort, quien logró motivar una rebelión de grandes proporciones nacionales y que terminó por derrocar a Santa Anna, gracias a la Revolución de Ayutla de 1854. El movimiento que inició el general Álvarez en marzo de ese año, desconoció a Santa Anna y proclamaba la realización de un nuevo Congreso Constituyente de carácter liberal para restaurar el pacto federal. A mediados de 1855 el Plan de Ayutla había obtenido el triunfo.

Juan Álvarez ocupó la presidencia provisional, pero se vio en medio de grandes presiones, tanto de personajes radicales del partido liberal como Juárez y Lerdo de Tejada, como por parte de los conservadores. El general Álvarez renunció y su puesto lo ocupó Ignacio Comonfort.

Bajo el gobierno de Ignacio Comonfort hacia 1856 la balanza política se inclinó a favor del partido liberal, bando que había salido triunfante en la Revolución de Ayutla. Hacia el mes de febrero se instaló el Congreso Constituyente, integrado por los más radicales integrantes del grupo liberal, entre ellos Juárez; Lerdo de Tejada, Melchor Ocampo, José María Iglesias, Francisco Zarco, etc. El 5 de febrero del siguiente año estuvo completamente redactada la nueva Constitución, que Ignacio Comonfort promulgó.

La Constitución de 1857 contenía 128 artículos y entre sus postulados tenemos:

- El establecimiento de una República Representativa, Democrática y Federal con 24 estados soberanos regidos por un gobierno dividido en tres poderes: Ejecutivo, Legislativo y Judicial.
- Consolidó la estructura tripartita con un poder ejecutivo, depositado en un presidente por cuatro años y con un vicepresidente, puesto otorgado al Ministro de Justicia de la nación, un congreso bicameral y una suprema corte de justicia, es decir, el poder judicial estaría presidido por quien haría las veces de vicepresidente.
- El poder legislativo recaía en manos de una sola cámara: la de diputados.
- El presidente de la República y el de la Suprema Corte de Justicia eran designados por elección popular.
- Los derechos del hombre: igualdad y libertad se garantizaban.
- La soberanía nacional emanaría del pueblo.
- La federación quedaría integrada por 24 estados y el territorio de Baja California.

Antes y después de entrar en vigor la Constitución de 1857 se aprobaron importantes reformas liberales que complementaron el trabajo legislativo del congreso, leyes que se incorporaron al régimen liberal vigente desde el triunfo del plan de Ayutla y que, por otro lado, afectaron intereses políticos y sociales del Clero y la Milicia.

Entre las principales reformas liberales de ese entonces se encuentran las siguientes:

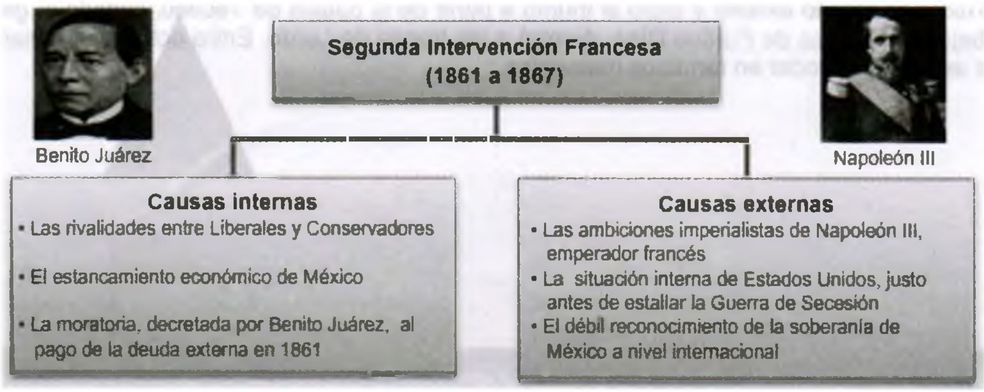
- Ley Juárez de 1855, que suprimió los tribunales especiales y los fueros militar y eclesiástico. De esta forma se cancelaban antiguos privilegios de origen colonial, que todavía después de la independencia subsistieron en México durante décadas.
- Ley Lerdo para la desamortización de propiedades pertenecientes a corporaciones civiles (campesinos) y religiosas, decreto expedido por Miguel Lerdo de Tejada en junio de 1856. La Ley Lerdo puso en circulación los estancados capitales del clero, reactivando la producción agrícola, pero instituyó el latifundio laico y sentó las bases para despojar de su patrimonio social a miles de campesinos.
- Ley del Registro Civil (Ley Iglesias), que entró en vigor en enero de 1857 y que puso bajo la administración del estado la tramitación de asuntos de la vida civil como son el registro de nacimientos, matrimonios y defunciones.

Éstas y otras reformas radicales provocaron una férrea reacción de los conservadores y un rechazo absoluto a tales disposiciones. Bajo el gobierno de Comonfort, constitucionalmente electo a finales de 1857, el partido conservador se levantó en armas al frente del Plan de Tacubaya. Félix Zuloaga encabezó esta rebelión, desconocía la Constitución de 1857 y proponía un nuevo congreso acorde con los criterios conservadores.

La Guerra de Tres Años, la Intervención Francesa y el Imperio de Maximiliano

Como consecuencia de esta situación de confrontación entre liberales en defensa de la Constitución de 1857 y de las reformas frente a conservadores en contra de tales medidas se desató la llamada Guerra de Tres Años o de Reforma entre 1858 y 1861. Benito Juárez sostuvo al modelo liberal republicano y agregó en 1859 un nuevo decreto en el que se establecía la separación definitiva entre Estado e Iglesia. El triunfo de los liberales en 1861 permitió a Juárez imponer las reformas y la constitución liberal de 1857.

Una de las disposiciones de Juárez para hacer frente a la falta de recursos por causa de la guerra y de una actividad económica regular en el país fue el decreto para declarar la moratoria o suspensión provisional por dos años al pago de la deuda pública en julio de 1861. La reacción de los países acreedores fue inmediata y enérgica; Francia, Inglaterra y España firmaron un acuerdo para obligar a México a cumplir con sus compromisos económicos, el tratado de Londres, que representó, además de un pretexto de la prepotencia imperialista, un antecedente inmediato a la invasión francesa sobre territorio mexicano.



El 5 de mayo de 1862 las tropas invasoras fueron derrotadas por el general Ignacio Zaragoza y sus lugartenientes Celestino Negrete y Porfirio Díaz. El triunfo mexicano incentivó el nacionalismo y la confianza en la defensa de la soberanía nacional. Pero con un ejército de 60 mil franceses y el apoyo de los conservadores, Napoleón III logró finalmente apoderarse de México. El mariscal francés Francisco Forey articuló la ocupación de México y promovió la integración de una Junta de Notables en la que el partido conservador participó. Se decretó la Monarquía Católica y se ofreció el trono de México a Maximiliano de Habsburgo y a su esposa Carlota de Bélgica.

Maximiliano y Carlota se entrevistaron con el Papa, quien los bendijo y les ofreció su respaldo. Posteriormente se entrevistaron con Napoleón III, ante el cual el Archiduque Maximiliano firmó el Tratado de Miramar. Francia se comprometía a sostener al imperio de Maximiliano con tropas y un empréstito. De esta manera se hipotecaba México como punta de lanza para la fundación de una colonia francesa en América Latina. Por su parte Maximiliano se comprometía a sufragar los gastos de las tropas francesas proporcionadas para el imperio, así como a establecer una política liberal en México.

Al concluir la Guerra de Secesión en 1866, el gobierno norteamericano lanzó un ultimátum contra Francia, en el cual le exigía respetar la soberanía mexicana. Napoleón III retiró su apoyo a Maximiliano y argumentó que requería de sus ejércitos para enfrentar a tropas prusianas en la frontera con Alemania. La caída del imperio fue inevitable conforme las tropas del ejército liberal mexicano recuperaban paulatinamente el territorio nacional. Tras el sitio de Querétaro en abril de 1867, Maximiliano, acompañado por los generales Miramón y Mejía se rindieron en espera de un indulto. Fueron sometidos a un tribunal militar que los condenó a muerte por atentar contra la soberanía de México y fueron fusilados en julio de ese año.

La República Restaurada

El triunfo de las tropas republicanas significó para Juárez su consolidación como presidente de la nación. Desde su nombramiento a finales de 1857 para sustituir a Comonfort se había mantenido al frente del poder ejecutivo. Su permanencia en el poder empezaba a disgustar a los seguidores de Sebastián Lerdo de Tejada, ministro de Justicia. Destacan en esta etapa de la vida nacional medidas que Juárez implementó como el Juicio de Amparo para proteger a los particulares contra posibles abusos del sistema judicial al sentenciar una causa. Pero sobre

todo, el ministro de educación, Gabino Barreda quien fundó la Escuela Nacional Preparatoria para sustituir al modelo educativo del clero en México, también creó la Escuela de Medicina y las de Ingeniería y Leyes. Gabino Barreda introdujo la filosofía positivista que, entre otras cosas, se distinguía por el vigoroso impulso a la ciencia y a la tecnología para la modernización industrial de México.

En 1871 Juárez se mantuvo como presidente de la nación mediante la reelección para el periodo 1872 – 1876. Porfirio Díaz se manifestó en contra de la reelección juarista. Se conoce como Plan de la Noria al levantamiento de Díaz en 1871, mismo que fracasó. Fue hasta julio de 1872 cuando la muerte de Juárez dio pie para un cambio presidencial. Ahora se nombró como presidente interino a Sebastián Lerdo de Tejada. Al pretender practicar la reelección a finales de 1875, Lerdo de Tejada enfrentó una oposición iniciada por varios generales porfiristas que proclamaron el Plan de Tuxtepec. Para octubre de 1876 Porfirio Díaz ya estaba al frente del movimiento y se proclamó como presidente provisional. Pronto logró derrocar a Lerdo y al Ministro de Justicia José María Iglesias, a quien inicialmente el Plan de Tuxtepec lo había reconocido como vicepresidente.

El Plan de Tuxtepec resultó exitoso y logró el triunfo a partir de la batalla de Tecoac, cuando el general Manuel González –bajo las órdenes de Porfirio Díaz- derrotó a las tropas de Lerdo. Entre octubre y noviembre de 1876 Porfirio Díaz ascendió al poder en términos materiales.

Ejercicios

1. Considerando las diferencias entre liberales y conservadores después de consumada la independencia de México, identifica las características del modelo republicano federalista y las del régimen centralista:

I.	República Federalista	a.	Sostiene la autonomía de cada estado
		b.	Sustenta al Estado laico
		c.	Concentra la administración en la capital
II.	República Centralista	d.	Sostiene la unidad nacional mediante la Constitución
		e.	Sostiene la unidad nacional mediante la religión

a) I: a, b y d / II: c y e
b) I: b y c / II: a, d y e
c) I: b, d y e / II: a y c
d) I: a y c / II: b, d y e

2. ¿A raíz de qué suceso histórico en nuestro país, se modificó el poder religioso del clero conservador a mediados del siglo XIX?
a) La Revolución Industrial
b) La Reforma Liberal
c) El Movimiento Cristero
d) La Guerra de Castas

3. Uno de los conflictos internacionales que lesionó la soberanía nacional entre 1821 y 1853 fue:
a) la declaración de Independencia que Hidalgo emitió en el pueblo de Dolores
b) la Guerra de los Pasteles
c) el imperio de Maximiliano
d) la guerra entre México y Estados Unidos por el territorio de Texas hacia 1845

4. La ley Lerdo decretó la expropiación de bienes del clero, mientras que la Ley Iglesias:
a) permitió al clero recuperar su patrimonio
b) afectó al patrimonio de sectores campesinos
c) estableció un Registro Civil
d) decretó la separación entre Iglesia y Estado

5. La invasión francesa de 1862 tuvo como propósito establecer un poder colonialista sobre México, pero tuvo como pretexto:
a) la moratoria decretada por el gobierno de Juárez al pago de la deuda externa
b) la Junta de Notables que otorgó el trono de México a Maximiliano
c) la firma del Tratado de Londres entre países acreedores
d) la derrota sufrida por las tropas francesas en la batalla de Puebla de 1862

6. Causa que provocó que el Imperio de Maximiliano fracasara:
a) El apoyo del bando conservador a favor de una monarquía católica
b) El decreto de Benito Juárez para separar al Estado y a la Iglesia
c) El retiro de las tropas de Napoleón III hacia 1866
d) La paz porfirista que fomentó la dictadura a finales del siglo XIX

7. Durante el sitio de Querétaro de 1867, Maximiliano de Habsburgo se rindió ante el Ejército liberal, encabezado por:
a) Napoleón III
b) Mariano Escobedo
c) Lucas Alamán
d) Ignacio Comonfort

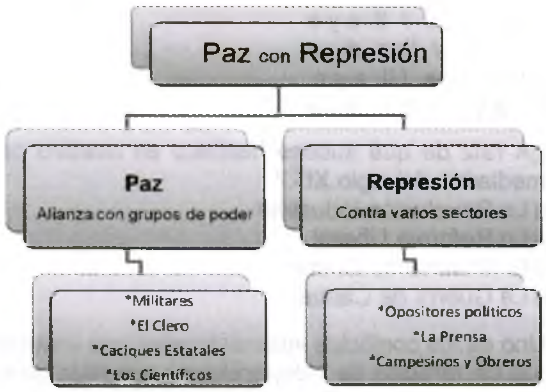
6 Porfiriato

Propósito: el alumno analizará las principales características políticas, económicas, sociales y culturales del México porfirista entre 1877 y 1910.

La dictadura porfirista

El régimen porfirista fue una larga dictadura que se distinguió por un control personalizado y militar de la vida nacional y por la represión social y política cuando el sistema lo requirió. Bajo el liderazgo de Don Porfirio, el congreso quedó sometido como un órgano legislativo al servicio del dictador. La reelección continua fue practicada durante más de 8 periodos por el gobierno del general Porfirio Díaz, abierta o simuladamente, simbolizada por el lema "poca política y mucha administración".

Otros recursos de la dictadura porfirista fueron el control de la prensa y de cualquier forma de oposición, para lo cual las fuerzas públicas y militares fueron utilizadas recurrentemente. Se anuló también el federalismo, proyecto político que el partido liberal había logrado consolidar en tiempos de la reforma y de la Constitución del 57. En lugar de gobernadores electos mediante votaciones, Porfirio Díaz aprovechó la estructura caciquil que existía en numerosas regiones del país; el dictador imponía y removía en los gobiernos locales a sus amigos y allegados, según su conveniencia personal.



La situación económica–social del México porfirista

La vida económica bajo la dictadura porfirista fue intensa y gozó de fortísimas inyecciones de capital invertido, de un comercio exterior, de un sistema ferroviario moderno, de industrias petrolera, eléctrica y henequenera poderosas y de socios comerciales como Estados Unidos o Inglaterra.

Las compañías internacionales se apoderaron de los recursos naturales de México y de la fuerza de trabajo obrera y campesina. Los grandes latifundios se adaptaban para el autoconsumo o para la producción mercantil cuando era posible. El peonaje y la raya, custodiados por los rurales para evitar rebeliones campesinas, distinguieron a la hacienda del México porfirista como un sistema semifeudal.

La dictadura porfirista se engalanó en los grandes edificios públicos a la usanza europea como el de Correos o el que actualmente ocupa el Palacio de Bellas Artes y, desde luego el recinto legislativo que Don Porfirio ordenó construir hacia 1910 y que la Revolución Mexicana adoptó como monumento posteriormente.

El modelo de cultura porfirista

En cuanto a la educación pública, hubo iniciativas del Estado para establecer instituciones como el Ministerio de Justicia desde 1901 o la Secretaría de Instrucción Pública y Bellas Artes, ambas dirigidas por Justo Sierra, el más notable intelectual del régimen que se preocupó por una educación laica y científica y por impulsar como tarea del gobierno la educación pública; fue obra suya la fundación de la Universidad de México, que permanecía cerrada desde el Imperio de Maximiliano. En lo cultural persistió el positivismo como filosofía al servicio del régimen, ya que su objetivo era conservar el orden con el fin de alcanzar el progreso.

Pero el porfirismo nunca se propuso resolver carencias gravísimas sociales y culturales como el elevado índice de analfabetismo y la necesidad de una educación accesible para los sectores populares como obreros y campesinos.

Ejercicios

1. El Plan de Tuxtepec permitió a Porfirio Díaz en 1876:
   a) reclamar la devolución de la Corona imperial al archiduque Maximiliano de Austria
   b) derrocar al gobierno de Sebastián Lerdo de Tejada y tomar el poder
   c) anular definitivamente la reelección durante su larga dictadura de varias décadas
   d) establecer el reparto agrario a favor de las masas campesinas

2. La alianza de don Porfirio Díaz con grupos de poder como el clero y los militares, así como la marcada represión social, fueron rasgos de:
   a) la paz porfirista
   b) la República Restaurada
   c) la cultura porfirista
   d) el Segundo Imperio

3. La estructura económica del Porfiriato se distinguió por:
   a) la estabilidad económica, la política nacionalista y positivista de la dictadura
   b) la inversión foránea, el reparto agrario y la tienda de raya
   c) el sistema de raya, las concesiones al capital norteamericano y el sistema ferroviario
   d) la inconformidad contra la dictadura, la reelección continua y el triunfo electoral de Madero

4. Mediante la Ley de Compañías Deslindadoras de Tierra, la producción agrícola del México porfirista...
   a) alcanzó excelentes niveles de exportación en mercados europeos y norteamericanos
   b) garantizó el abasto popular mediante el cultivo de granos como maíz y trigo
   c) fortaleció la creación de enormes haciendas y latifundios a costa de los campesinos
   d) introdujo sistemas de riego y maquinaria para industrializar al campo mexicano

5. La dependencia económica de México frente al capital extranjero durante la dictadura porfirista se evidenció hacia 1907, cuando la crisis económica mundial provocó:
   a) la disminución de aranceles sobre mercancías procedentes de Estados Unidos
   b) la disminución de exportaciones de materias primas mexicanas
   c) la disminución de la pobreza entre las clases marginales
   d) el incremento de las tasas de interés en las operaciones bursátiles

6. El México porfirista se distinguió por la industrialización en diversas áreas como la energía eléctrica, la industria petrolera y el sistema ferroviario. Sin embargo, la dependencia económica del Porfiriato se debió a:
   a) la competencia que otras economías emergentes representaban para México
   b) el control de las aduanas mexicanas por parte de buques mercantes japoneses
   c) la inestabilidad cambiaria del dólar frente a otras monedas americanas y europeas
   d) la penetración de capitales foráneos y de la tecnología extranjera en México

7. En el México porfirista, el latifundio se fortaleció porque...
   a) la dictadura ofreció enormes concesiones a compañías deslindadoras de tierra
   b) el sistema de raya permitió a muchos campesinos adquirir tierras en oferta
   c) el crecimiento económico de México era autónomo en materia industrial
   d) la clase política supo garantizar el patrimonio nacional de los mexicanos

8. El régimen porfirista fue una dictadura que ejerció la represión contra la libertad de expresión. ¿En cuál inciso se ejemplifica dicha situación?
   a) La entrevista Díaz-Creelman, en la cual don Porfirio convocó a la formación de partidos de oposición
   b) La arquitectura de la época, la cual se distinguió por el afrancesamiento urbanístico
   c) La inversión foránea en áreas como el petróleo, laminaría o los ferrocarriles
   d) Las agresiones contra periódicos críticos como *El Hijo del Ahuizote o Regeneración*

7 Revolución Mexicana

Propósito: el alumno describirá la gesta revolucionaria de 1910 a partir de sus causas y antecedentes, así como de las diferencias políticas y sociales que se manifestaron a través de dicho proceso histórico.

Antecedentes

La opresión social y política del México porfirista, en el que nunca se respetó el voto popular, fue un foco permanente de malestar creciente, que terminó por estallar en una gesta revolucionaria a raíz de las elecciones fraudulentas de 1910.Las huelgas de Cananea, Sonora de 1906 y de Río Blanco, Veracruz en 1907 son dos antecedentes significativos antes del estallido social en 1910. Los partidos políticos de oposición y los organismos clandestinos que llevaban años de lucha por derrocar a la dictadura encontraron un clima propicio, que facilitó el camino de los opositores a partir de la campaña emprendida por Francisco Madero, primero por contender a la presidencia en las elecciones de julio de 1910, después por desconocer al dictador Porfirio Díaz tras el fraude cometido contra la nación que su última reelección significó.

1. Etapa Maderista -1910 a 1913
2. Etapa Carrancista -1913 a 1917
3. Reconstrucción Nacional a partir de 1917

A partir de la Constitución Política de 1917, se inició la vida del México Contemporáneo con base en una reconstrucción nacional; y podemos considerar entonces dos etapas posteriores de la Revolución.

- El Caudillismo, entre 1917 y 1928
- El Maximato, a partir de la fundación del Partido Nacional Revolucionario (PNR) en 1929

Ambas etapas formaron parte del proceso histórico iniciado con la Constitución de 1917, que permitió la configuración de la historia contemporánea del país.

Francisco I. Madero y el Plan de San Luis

El Plan de San Luis elaborado por Francisco I. Madero en octubre de 1910 simboliza el inicio de la lucha armada. La defensa del voto popular y el reparto agrario que Madero proponía en dicho programa, complementan los objetivos formales del Plan de San Luis. Y quienes respondieron a su llamado fueron sectores rurales y trabajadores que, de por sí, ya estaban predispuestos a iniciar una rebelión social. Personajes como Lucio Blanco o Francisco Villa destacaron como caudillos de origen rural que siempre fueron leales a Madero.

En mayo de 1911 se firmó el Tratado de Ciudad Juárez, cuyos acuerdos esenciales fueron la renuncia de Porfirio Díaz a la presidencia y de Ramón Corral como vicepresidente. Su lugar fue ocupado por Francisco León de la Barra, Secretario de Relaciones Exteriores de Porfirio Díaz. Otros acuerdos fueron que Madero desistiera de la lucha y que el presidente interino, León de la Barra iniciara el difícil trabajo de desarmar a los grupos revolucionarios, para convocar elecciones extraordinarias. Hubo resistencia de Emiliano Zapata al frente del movimiento agrarista para dejar las armas. La causa que este caudillo defendía al sur de México no era electoral sino una demanda social de profundas raíces campesinas por la tierra. Zapata lanza el Plan de Ayala, por el que desconoce a Madero como presidente al no cumplir éste, las demandas de reparto agrario, que había prometido en el Plan de San Luis.

Al llegar Madero a la presidencia se enfrentó con adversarios políticos de arraigo porfirista como el Congreso y el ejército federal; además con grupos y caudillos revolucionarios en pie de lucha que le exigían cumplir con las demandas sociales de obreros y campesinos.

Pero el movimiento que derrocó a Madero en febrero de 1913 surgió entre las instancias, que mayor lealtad debían a su gobierno, por ser producto de una elección federal y constitucional. Victoriano Huerta encabezó el liderazgo de un grupo de militares, entre ellos Bernardo Reyes, Miguel Mondragón y Félix Díaz, quienes encabezaron un golpe de estado. Los intereses económicos de Estados Unidos se involucraron con aquellos que conspiraron contra Madero, pues el cuartelazo estuvo planeado en la residencia del embajador Henry Lane Wilson, representante diplomático de esa nación. Huerta aprehendió al presidente Madero y lo obligó a firmar su renuncia; el congreso porfirista asignó a Pedro Lascurain como Presidente provisional, quien abdicó a favor de Huerta. El presidente Francisco I. Madero fue asesinado por Huerta el 22 de febrero de 1913.

La causa constitucionalista de Venustiano Carranza

Carranza pronunció el Plan de Guadalupe en marzo de 1913; para desconocer a Huerta y también a los poderes legislativo y judicial. El propósito formal del Plan de Guadalupe fue siempre la causa constitucional, es decir, restaurar un poder ejecutivo mediante la vía electoral, una vez derrocada la usurpación.

Las tropas constitucionalistas contaron con Francisco Villa al frente de la División del Norte. Sin anexarse al ejército de Carranza, Zapata lo apoyó y se sostuvo como líder de los agraristas, pero con la intención de vencer a Huerta. Lucio Blanco también emprendió la tarea de combatir a Huerta.
De manera abierta, el presidente norteamericano Thomas Woodrow Wilson ordenó la invasión a México para garantizar que los capitales petroleros y de otras industrias estadounidenses no se afectaran por causa de la lucha revolucionaria.

Los caudillos que se unieron para derrocar a Huerta se confrontaron entre sí tras haberlo vencido. Venustiano Carranza asumió el poder ejecutivo de manera provisional, pero no obtuvo el reconocimiento de Villa, quien se proclamó jefe de la División del Norte. Zapata exigió a Carranza adherirse al Plan de Ayala como condición para reconocerlo como jefe de la nación.

En octubre de 1914 se integró una convención tripartita en la ciudad de México con el propósito de entablar acuerdos de unidad revolucionaria que permitieran disolver las rivalidades caudillistas y consolidar un mismo rumbo para la nación. Los villistas no se presentaron a la convención y fue necesario trasladarla a Aguascalientes para que los tres grupos en pugna se reunieran. La importancia de la Convención radicaba en la posibilidad para el movimiento revolucionario de transitar hacia un pacto político y militar a favor de la vida nacional. Sin embargo, Carranza se trasladó a Veracruz donde se proclamó otra vez jefe de la nación, mientras Villa y Zapata tomaban la capital, donde otorgaron la presidencia provisional a Roque González Garza. Las fuerzas obregonistas se mantuvieron aliadas a Carranza.

En febrero de 1916 Carranza instaló su gobierno en Querétaro y convocó a un congreso constituyente; se proponía pactar con diversos sectores sociales, políticos y militares una ley fundamental y sobresalir como jefe constitucional con un reconocimiento nacional. Pero, los intereses tan diversos y las rivalidades afloraron entre los bandos de legisladores en torno a verdaderos proyectos de nación contrapuestos.
La constitución promulgada finalmente por Venustiano Carranza en 1917 fue la expresión de esas diferencias entre los intereses sociales y políticos y una herencia revolucionaria determinante para el México contemporáneo.

Las garantías sociales en la Constitución de 1917

Decretada el 5 de febrero de 1917 por el presidente Venustiano Carranza

Su Importancia Histórica

- Es una **herencia de la Revolución** Mexicana en la cual se manifiestan ciertas exigencias sociales como el reparto agrario (artículo 27°), o los derechos laborales (artículo 123°)

- Además de las **garantías individuales**, incorpora el criterio de garantías sociales al reconocer derechos de trabajadores y de campesinos

- **Vigente desde 1917** y hasta la fecha.
  Sirve como un parámetro para analizar las estructuras política y económica de México a lo largo del siglo XX, y como un indicador sobre la forma de gobierno de cada uno de los presidentes de México desde esa fecha y hasta el día de hoy.

Los dos proyectos constitucionales al interior del congreso de 1916.

Jacobinos
Promotores de los cambios más radicales:
- El reparto agrario
- Los derechos laborales
- La educación laica

Reformistas
Diputados moderados, promotores de cambios político democráticos
- Fortalecer al Poder Ejecutivo mediante
- Garantizar el voto popular

Los jacobinos estaban directamente relacionados con las más enérgicas causas revolucionarias, como el agrarismo sostenido por Emiliano zapata, las exigencias laborales y el Manifiesto del Partido Liberal Mexicano, fundamento de las aspiraciones de justicia social en el plano individual y en el colectivo.

El artículo 3° se refiere a la educación pública como una tarea del Estado con características específicas: laica, gratuita democrática y obligatoria.

El artículo 27° garantiza formalmente el patrimonio nacional sobre recursos naturales del subsuelo, los litorales y el espacio aéreo del país como una garantía en posesión de la nación y para el beneficio de los mexicanos, frente a la penetración de capitales foráneos que se puedan enriquecer a costa de dicho patrimonio.

El artículo 123° funda las bases para legislar en materia laboral, reconociendo los derechos y obligaciones entre el trabajador y el patrón. Y para evitar que los conflictos propios de intereses entre clases opuestas generen abusos e injusticias, se nombra una Junta Nacional de Conciliación y Arbitraje.

Ejercicios

1. ¿Por qué el Manifiesto del Partido Liberal Mexicano se considera como la base ideológica de la Revolución Mexicana?
   a) Impone leyes ejidales en contra de la población campesina
   b) Cancela el reparto agrario en México
   c) Plasma una profunda transformación del mejoramiento individual y colectivo
   d) Deriva en un nuevo régimen político tricameral y partidista

2. ¿Qué partido político estableció un programa al que se le considera como fundamento ideológico de la Revolución Mexicana?
   a) El Partido Antirreeleccionista
   b) El Partido Laborista
   c) El Partido Nacionalista Democrático
   d) El Partido Liberal Mexicano

3. Completa el espacio en blanco.
   El estallido de la Revolución Mexicana tuvo como punto de partida______________________, a raíz del fraude electoral y la última reelección porfirista en 1910.
   a) la huelga de Cananea, Sonora
   b) el Plan de San Luis
   c) el Tratado de Ciudad Juárez
   d) la entrevista Díaz-Creelman

4. La dictadura porfirista cayó en 1911, cuando se firmó:
   a) el Plan de Ayala
   b) el Tratado Guadalupe-Hidalgo
   c) el Plan de San Luis
   d) el Tratado de Ciudad Juárez

5. Por representar un criterio reformista, se criticó al gobierno de Francisco I. Madero como un régimen burgués, sin compromiso con las clases populares. Así, Emiliano Zapata emprendió el Plan de Ayala, mediante el cual sustentaba la lucha agrarista y se desconocía a Madero, a quien Zapata acusó por...
   a) cometer fraude electoral
   b) incumplir su promesa agraria
   c) incrementar los impuestos
   d) pretender el apoyo de Estados Unidos

6. Lee el siguiente fragmento y completa el espacio en blanco.
   La lucha agrarista iniciada por Emiliano Zapata, dio origen a la creación de ________________________, con lo que se estableció una radical socialización de los medios de producción, lo cual rebasaba a la representación campesina al exigir la abolición de la propiedad privada.
   a) el Círculo de Obreros Libres
   b) la Comuna de Morelos
   c) el Partido Liberal Mexicano
   d) el Pacto de la Ciudadela

7. Como consecuencia del asesinato de Francisco I. Madero, durante la Decena Trágica en 1913,...
   a) surgió el gobierno de Victoriano Huerta
   b) Porfirio Díaz renunció al poder
   c) Emiliano Zapata desconoció al Plan de San Luis
   d) Venustiano Carranza convocó al Congreso Constituyente

8. La importancia del artículo 3° de la Constitución de 1917 consiste en que...
   a) garantiza la educación pública en manos del Estado
   b) otorga al clero el monopolio de la educación laica
   c) establece las bases jurídicas a favor de los trabajadores
   d) sostiene la protección del patrimonio nacional

Siglo XX 8

Propósito: el alumno describirá los aspectos políticos, económicos y sociales del México Contemporáneo, a partir de la Constitución de 1917 y durante el siglo XX.

La Etapa caudillista del México Posrevolucionario

a) Lucha de caudillos entre 1917 y 1928

Son características de esta faceta las rivalidades políticas por el poder entre diversos personajes en torno a la jefatura de la nación: Carranza, De la Huerta, Obregón y Calles.

Conflictos entre caudillos en torno a la presidencia de la República

Conflicto	Efecto
Plan de Agua Prieta, Sonora	Los generales sonorenses desconocieron al presidente Carranza en 1920.
Rebelión Delahuertista	Adolfo De La Huerta se opone al gobierno de Obregón en 1924.
Rebelión Cristera	El gobierno de Calles ejerció una política anticlerical que derivó en confrontación con la Iglesia.
Asesinato de Obregón	Reelección de Obregón en 1928; José del Toral lo asesina.

b) La estructura política desde Carranza hasta la reelección de Obregón

Carranza fue el primer presidente en ejercer la Constitución de 1917, y a él correspondió experimentar los límites y alcances de la nueva Carta Magna, sus aciertos y contradicciones. En febrero de 1916 Carranza fija la residencia de los poderes federales en Querétaro.

Entre las principales dificultades del nuevo régimen se hallaban las presiones norteamericanas en torno al artículo 27° de la Constitución, ya que las compañías petroleras pugnaban por no quedar afectadas por la aplicación de la ley.

En el marco de la Primera Guerra Mundial, sistemáticas actitudes del presidente Woodrow Wilson ante la legitimidad del gobierno carrancista influyeron decididamente sobre la negativa de México para aceptar una alianza con el gobierno alemán, según lo estipulaban las propuestas del conocido "telegrama Zimermann". Carranza sostuvo la postura de neutralidad mexicana en un conflicto entre países cuyos intereses eran formalmente ajenos a México.

Al terminar su periodo constitucional de cuatro años, Obregón y sus simpatizantes (dinastía sonorense: Adolfo de la Huerta, Plutarco Elías Calles, etc.), desconocen mediante el plan de Agua Prieta al gobierno de Carranza. Encuentran apoyo en casi todo el ejército. Carranza parte en retirada hacia Veracruz. Es asesinado en el camino de Tlaxcaltongo, Puebla. Entonces, se estableció un gobierno provisional en manos de Adolfo de la Huerta.

Después de ser promulgada la Constitución de 1917, México atravesó un proceso de desarrollo político en el cual se distinguen las siguientes etapas:

I: Etapa caudillista (1917 a 1928)
Conflictos entre caudillos en su lucha por el poder

La reestructuración nacional

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
CAUDILLISMO (1920 – 1928)	ÁLVARO OBREGÓN (1920 – 1924)	-Con el "Plan de Agua Prieta" se desconoció a Carranza. -Presidente provisional De la Huerta. -Convenio: De la Huerta – Lamont (Alianza con EUA). -Tratados de Bucareli: E U A reconoce al gobierno de Obregón a cambio de concesiones petroleras. -Impulso a la educación pública con José Vasconcelos. -Nacen las confederaciones obreras y campesinas. -Rebelión de la huertista. -Elecciones Huerta vs. Calles.	- Pugna de caudillos. -Primeros esfuerzos del estado corporativista -Cultura nacionalista en la política de Obregón.
	PLUTARCO ELÍAS CALLES (1924 – 1928)	-Impulso a la agricultura y la educación nacionalista. -Banco de México y Ejidal. -Iglesia boicotea al gobierno (1926). -Se aplica estrictamente la Constitución de 1917. -Estalla la Guerra Cristera, levantamientos de Serrano y Gómez. -Constitución modificada. Obregón es reelecto y asesinado (León Toral, un cristero).	- Somete a la Iglesia, provocando la pugna Iglesia – Estado.

II: Maximato o Institucionalismo (1929 a 1934)
Bajo el liderazgo del jefe Máximo, Plutarco Elías Calles, se funda el **Partido Nacional Revolucionario (PNR)** con el cual el país transita de la lucha entre caudillos al **Institucionalismo**, es decir, al liderazgo político del Partido de Estado.

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
MAXIMATO (1928 – 1934) Plutarco Elías Calles (Jefe máximo) manipuló a los presidentes.	EMILIO PORTES GIL (1928 – 1930)	- Sustituye a Obregón. - Presidente interino. - Calles gobernó por medio del PNR (Partido Nacional Revolucionario) - Acabó conflicto religioso. - Política proimperialista. - Atacó sindicatos. - Otorgó la Autonomía Universitaria.	- Concertar acuerdos con la Universidad. -Concertar acuerdos entre la Iglesia y el Estado. - Lucha anticomunista.
	PASCUAL ORTIZ RUBIO (1930 – 1932)	- Derrota a Vasconcelos (lanza el Plan de Guaymas). - Se dicta la Doctrina Estrada. - Problemas económicos. - Debilidad de mando y renuncia.	- Falta de carácter y errores.
	ABELARDO L. RODRÍGUEZ (1932 – 1934)	- Sustituto. - Se dedicó a resolver problemas económicos, estableció: el salario mínimo, crea Nafín – Banobras, mejora burocracia y crea PEMEX.	- Crisis económica permanente.

Del Plan Sexenal al triunfo del sistema de Partido de Estado

III: Cardenismo (1934 a 1940)
Mediante el plan sexenal y con un modelo corporativista que fortaleció la relación entre el Estado y las masas populares, el general Lázaro Cárdenas ejerció el mando presidencial con liderazgo y gran solidez política. Su gobierno de corte socialista transformó al PNR en PRM, Partido Revolucionario Mexicano en 1938.

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
CARDENISMO (1934 – 1940)	LÁZARO CÁRDENAS DEL RÍO (1934 – 1940)	-Pone fin al maximato. -Reforma agraria. -El Estado regula la economía. -Nacionalizó FFCC y Petrolera. -Unificó a campesinos y obreros. -El PNR se convirtió en PRM (Partido Revolucionario Mexicano). -Educación socialista. -Estado populista. -Banjidal – Bancomex. -Se crea CFE, se apoya al sindicalismo y se crea el IPN y el INAH	- Cárdenas figura central. - Gobierno de orientación socialista. - Reparto Agrario. - Pacto Estado y Obreros. - Nacionalismo democrático.

Los gobiernos postrevolucionarios se propusieron establecer nuevos tipos de relación con las masas populares, específicamente con los sectores obrero y campesino, ya que el control social requería ofrecer respuestas a las substanciales demandas de esos grupos que habían participado durante la gesta revolucionaria.

Principales organismos sociales incorporados en la **política obrero-campesina** del Estado mexicano entre 1917 y 1940.

Organismo	Descripción
Confederación Regional Obrero Mexicana CROM 1918	Es el **antecedente inicial del corporativismo** en México después de la Revolución. La CROM se fundó bajo el régimen constitucionalista de Venustiano Carranza. Después de V. Carranza, tanto Álvaro Obregón como Plutarco Elias Calles se apoyaron en la dirigencia de la CROM para fortalecer su gobierno como presidentes del país.
Confederación de Trabajadores de México CTM 1936	Fundada por Vicente Lombardo Toledano en febrero de 1936, en el marco de **la política corporativista y socialista** del presidente Lázaro Cárdenas. La CTM surgió como una ruptura al interior de la CROM y logró agremiar a trabajadores sindicalizados en todo el país. Formó parte estratégica como base social obrera al interior del Partido Nacional Revolucionario.

Los regímenes posrevolucionarios articularon poco a poco una política internacional cuyo punto de intersección estuvo determinado por dos grandes ejes:

Nacionalismo

Herencia de la Revolución

Directriz dictada por la Constitución de 1917

Reconocimiento Internacional

La soberanía de la nación frente al extranjero

- El gobierno de Venustiano Carranza enfrentó presiones de Estados Unidos en términos de la orientación que debería seguir México bajo un nuevo régimen revolucionario, especialmente en materia de petróleo.

- Los Acuerdos de Bucareli se establecieron en 1923, bajo la presidencia de Álvaro Obregón. Estados Unidos otorgó su pleno reconocimiento al régimen de Obregón, quien a su vez se comprometía a no afectar los intereses de compañías petroleras norteamericanas establecidas en México.

- El régimen de Plutarco Elías Calles fortaleció la relación entre México y el régimen socialista de la URSS, al cual otorgó su reconocimiento en 1924.

- La **Doctrina Estrada** es el nombre formal que adquirió el comunicado emitido por la Secretaría de Relaciones Exteriores en 1930, bajo la presidencia interina de Abelardo Rodríguez. La Doctrina Estrada orienta la política exterior de México bajo el principio de libre autodeterminación de cada nación, y representa una aportación de México al derecho internacional.

El presidente Lázaro Cárdenas fijó los ejes de su política exterior al romper en 1935 relaciones políticas y diplomáticas con el gobierno de la Alemania nazi, a la cual señaló como un régimen de exterminio racial. Y en 1936, el general Lázaro Cárdenas también rompió relaciones con el gobierno falangista de Francisco Franco, quien dirigió el golpe militar en España. Cárdenas ofreció asilo político a los españoles perseguidos y exiliados por el gobierno franquista.

Conforme a las nuevas necesidades del desarrollo económico social que México se planteó después de la Revolución, destacan los principales criterios y mecanismos impulsados entre 1917 y 1940 por los diversos presidentes de la República. Se trata, en general de una lenta configuración de la política **económica nacionalista,** cuyo fundamento constitucional tiene como referente al artículo 27°.

- El gobierno de Plutarco Elías Calles se preocupó por establecer una infraestructura económica para el desarrollo de la actividad productiva. Creó varias comisiones con dicho propósito:

  Comisión Nacional del Agua
  Comisión Nacional de Caminos
  Comisión Nacional Bancaria

  También fundó el **Banco De México,** institución que dio impulso estratégico a la inversión y al sistema crediticio del país, y con el cual se canalizó la impresión de la moneda nacional.

- Durante la etapa del Maximato, el presidente Abelardo Rodríguez estableció **BANOBRAS**, Banco Nacional de Obras y Servicios Públicos, así como **NAFINSA**, Nacional Financiera, fortaleciendo la línea económica que previamente distinguió al general Plutarco Elías Calles con la creación de estas instituciones financieras.

- Lázaro Cárdenas ejerció la presidencia de México a partir de 1934; su política económica estuvo orientada por tres grandes fundamentos:

Política Socialista
Economía de Estado

Corporativismo
Beneficios laborales

Nacionalismo
Nacionalización de industrias, ferrocarrilera y petrolera

b) Los gobiernos del desarrollo estabilizador

La estabilidad política favorece el liderazgo al frente de la unidad nacional. Se sustituyen las importaciones y se abren mercados internacionales para las exportaciones mexicanas. El crecimiento depende de los subsidios del Estado a la infraestructura industrial, la deuda moderada, el control político corporativista y el liderazgo del partido oficial.

La economía mexicana vivió una notable etapa de crecimiento vigoroso entre 1940 y 1970 que se conoció como ***"El Milagro Mexicano"***. Abarca a los gobiernos de los siguientes presidentes:

- Manuel Ávila Camacho
- Miguel Alemán
- Adolfo Ruiz Cortines
- Adolfo López Mateos
- Gustavo Díaz Ordaz

Este crecimiento, que no había experimentado nunca antes el país, puede explicarse por la combinación de tres **factores principales**:

Nacionalización del Petróleo 1938	**Apertura de mercados internacionales después de la Segunda Guerra Mundial**	**Estabilidad política y económica en la era del PRI** (A partir de 1946)

Entre las principales características de este periodo económico en la vida de México, sobresalen:

- Sustitución de importaciones que fortaleció al mercado interno
- Régimen de exportaciones de materias primas, de fuerza de trabajo y de manufacturas mexicanas
- Estado promotor del crecimiento que subsidió a la clase empresarial con un cobro muy reducido de impuestos y con el impulso de una infraestructura industrial
- Ritmo sostenido de la economía entre 6% y 8% anual
- Deuda externa moderada, control de la inflación y parcialmente de la devaluación monetaria (aunque en 1954, la cotización del dólar pasó de $8.65 a $12.50 pesos mexicanos)
- Políticas de beneficio social, pero principalmente concentradas en grandes metrópolis, Guadalajara, Monterrey y Ciudad de México

Si bien es cierto que la economía mexicana experimentó el comportamiento ya descrito, también es verdad que a partir de 1954 manifestó los primeros síntomas de agotamiento, al suscitarse la devaluación de la moneda nacional y al incrementarse la inflación. La estrategia del Estado para amortiguar los efectos que estos factores ejercieron sobre la producción, el mercado y las finanzas se conoce como la Política del Desarrollo Estabilizador, que logró impulsar el crecimiento y aminorar la intranquilidad social hasta 1970, cuando la caída de las exportaciones de México provocó un definitivo final del *"Milagro Mexicano"*.

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
UNIDAD NACIONAL Y CIVILISMO (1940 – 1952)	MANUEL ÁVILA CAMACHO (1940 – 1946)	-Impulso a la educación (IPN, UNAM y la alfabetización). -Se crearon proyectos de: industrialización, crédito y electrificación. -En salubridad creó: el Instituto Nacional de Cardiología y Pediatría y el IMSS. -Se instaura el Servicio Militar Obligatorio. -Lucha antifascista contra el eje.	- Propósito de unificación nacional. -La era del Milagro mexicano.
	MIGUEL ALEMÁN (1946 – 1952)	-Aumento de inversiones privadas y extranjeras. -Economía mixta. -Transformación del PRM a PRI. -Gabinete técnico y disciplinado. -Impulso a la ganadería y al campo. -Se crearon misiones culturales. -Inauguró la Ciudad Universitaria. -Entubamiento de agua potable, aguas negras y ríos. -Lucha contra el comunismo. -Problema social: "los braceros".	- Impulso a la iniciativa privada. - Lucha contra el comunismo. -Gobierno civilista.

DESARROLLO ESTABILIZADOR (1952 – 1970)	ADOLFO RUIZ CORTINES (1952 – 1958)	-Aísla el mercado interno. -Se da una nueva devaluación. -Fomento a la mediana y pequeña empresa. -Fomento a ferrocarriles y minería. -Estabilidad de precios, servicios, utilidades e impuestos. -Voto a la mujer. -Movimiento ferrocarrilero con Demetrio Vallejo. -Apoyo a Guatemala en su conflicto con EUA.	- Lucha por la moralidad pública y la administración.
	ADOLFO LÓPEZ MATEOS (1958 – 1964)	-Orden y aplicación de la Ley. -Se enfocó la economía hacia Latinoamérica y Estados Unidos. -Estímulo al campo y la alimentación. -Estimuló la agricultura, la asistencia medica, minería y turismo. -Reestructuración de la Secretaria de Hacienda. -Continuaron los movimientos magisteriales, ferrocarrileros y campesinos (desestabilizad) -Otorgó apoyo a Cuba. -Realiza una reforma agraria integral. -Se crea el Plan educativo de “Once años”, y la Comisión Nacional del Texto Gratuito. -Se abarataron los precios, Campañas de CONASUPO (productos a peso) -Crea el Instituto Nacional de Protección a la Infancia y el Instituto Mexicano del Café (IMECAFE). -México recupera El Chamizal.	- México se internacionaliza. - Convivencia con bloques capitalista y comunista. - Progreso económico.
	GUSTAVO DÍAZ ORDAZ (1964 – 1970)	-Crea: Instituto Mexicano del Petróleo, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, el programa de construcción de aeropuertos y el METRO. -Aumento de importaciones. -Aumento de deuda pública. -Se dieron huelga de médicos y estudiantes. -Represiones violentas “2 de octubre” -Se establece como mayoría de edad el tener 18 años o más. -Se crearon las “Tele aulas”, los museos de Antropología, del Virreinato y de San Carlos. -Se crearon Hospitales psiquiátricos y Casas Cuna. -Se construyeron Unidades Habitacionales. -Se realizaron las Olimpiadas (1968).	- Búsqueda de Unidad Nacional. - Autoritarismo. - Aumenta la inconformidad.

Entre 1958 y 1968, en México se presentaron varios movimientos sociales, como consecuencia de los desajustes estructurales en la economía nacional, tales como la inflación y la devaluación, pero también como resultado de una lenta descomposición social, ya que la concentración de la actividad económica y política en grandes ciudades contrastaba con la pobreza rural y la falta de servicios y beneficios en amplias zonas campesinas del país. Además, en la estructura social de México, la distribución de la riqueza generó otro contraste, pues mientras que la clase empresarial mexicana –equivalente aproximado al 10% de la población– poco a poco iba acaparando más del 50% de la riqueza, los sectores laborales –campesinos, obreros y burocracia– enfrentaban las mayores carencias. No es de extrañar que, a pesar del crecimiento vigoroso de la economía en el marco del “Milagro Mexicano”, en México fueran surgiendo gradualmente signos de descomposición social y política, misma que manifestó dos tendencias:

Expresiones clandestinas y armadas en forma de Guerrilla
Lucio Cabañas
Genaro Vázquez

Movilizaciones y huelgas de sectores sociales campesinos y urbanos

Entre los principales movimientos sociales no armados que se gestaron en México en tiempos del Desarrollo Estabilizador, sobresalen en orden cronológico los siguientes.

- 1958, la huelga de trabajadores de la industria ferrocarrilera
- 1961, huelga de maestros normalistas
- 1965, huelga de médicos
- 1968, movimiento estudiantil en la UNAM y otras instituciones de educación pública

La respuesta del Estado que distinguió a los gobiernos del Desarrollo Estabilizador fue el endurecimiento de los mecanismos represivos, lo cual representó un Estado antidemocrático con tendencia militarizada.

La crisis del sistema político mexicano en las últimas décadas

c) El desarrollo compartido

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
DESARROLLO COMPARTIDO (1970 – 1976)	LUIS ECHEVERRÍA ÁLVAREZ (1970 – 1976)	-Programa descentralizador. -Crea 20 organismos gubernamentales. -Aumento del gasto público. -Realiza una reforma fiscal. -El gobierno adquiere Telmex. -Crea Laguna Verde. -Se acelera la inflación (a partir de 1973). -Se dan devaluaciones. -Busca armonía entre factores de la producción. -Promueve al campo y la ayuda indígena. -Firma el "Pacto de Ocampo" (para unificar centrales campesinas). -Acrecentó la dependencia hacia EUA. -Se establecieron los planes de salud. -Protección atmosférica. -Se crea el FONAPAS. -Se propuso la "Carta de Derechos y Deberes Económicos de los Estados". -Incrementó relaciones internacionales de México.	-Populismo. - Democracia Social. - Apertura democrática.

d) Los gobiernos tecnócratas

Antecedentes
Al agotarse el modelo de crecimiento conocido como *"Milagro Mexicano"*, la economía del país quedó inmersa en una **severa crisis** en la que se combinaban factores muy graves:

- Caída del Producto Interno Bruto y de las exportaciones
- Incremento desorbitado de la deuda externa y devaluación monetaria
- Tendencias inflacionarias y desempleo
- Malestar social, movimientos campesinos y urbanos

La respuesta del Estado para enfrentar las dificultades se basó en una triple estrategia:

El gobierno de Luis Echeverría implementó un nuevo modelo económico, llamado Crecimiento Compartido, el cual combinó el incremento de impuestos a sectores de clase media y a los empresarios, así como la creación de empresas de participación estatal, las paraestatales.

También el presidente Luis Echeverría inició una apertura democrática, buscando una cierta negociación con la izquierda mexicana para no incursionar en el camino de la movilización radical, como lo era la guerrilla urbana.

Para lograr esa apertura democrática se promovió el registro oficial del Partido Comunista de México, de tal forma que éste pudiera postular candidatos a puestos de gobierno.

Una Guerra Sucia, contraparte de la apertura democrática, para enfrentar a las expresiones más radicales mediante el exterminio y la represión sistemática.

El siguiente gobierno, el de José López Portillo procuró levantar la economía mediante una fuerte orientación del crecimiento con base en el auge petrolero que se suscitó a inicios de 1980. La exportación del petróleo mexicano hizo posible un efímero fortalecimiento de la productividad en México; López Portillo también fomentó el desarrollo agrícola del país al crear la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (SARH) y el Sistema Alimentario Mexicano (SAM).
La repentina caída de precios de los hidrocarburos en los mercados mundiales, provocó la ruina de la economía mexicana, el endeudamiento, devaluaciones y desajustes inflacionarios combinados con desempleo. López Portillo concluyó su mandato decretando la Nacionalización de la Banca, para evitar una mayor fuga de divisas.

Surgimiento de la Apertura Económica en México:

Para enfrentar el recrudecimiento de la crisis económica del país, los siguientes gobiernos tuvieron que practicar una nueva estrategia, la apertura comercial. Se conoce como **Gobiernos tecnócratas** por realizar esta apertura de la economía mexicana en el marco del neoliberalismo a:

- Miguel de la Madrid Hurtado
- Carlos Salinas de Gortari
- Ernesto Zedillo Ponce de León

La política neoliberal que distingue a la economía mundial en el contexto de la actual globalización tiene como principales signos la apertura de mercados mediante la eliminación de fronteras comerciales y arancelarias, la formación de bloques económicos regionales como el TLC, La Unión Europea y Mercosur; liderazgo económico y financiero de grades organismos como son la Banca Mundial, el Fondo Monetario Internacional y la Organización Mundial del Comercio.

En México, la apertura comercial que dichos mandatarios impulsaron entre 1982 y el 2000 tuvo como rasgos principales:

- La restructuración de la deuda externa frente a la Banca Mundial y el Fondo Monetario Internacional
- La adopción de recomendaciones neoliberales para dirigir la economía mediante el fortalecimiento de la libre empresa, la disminución de la injerencia del Estado en materia económica, es decir la venta de paraestatales
- La concesión de áreas productivas a la inversión foránea
- La inserción de México en el Tratado de Libre Comercio con Estados Unidos y con Canadá

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
PETROLIZACIÓN (1976-1982)	JOSÉ LÓPEZ PORTILLO (1976-1982)	-Nacionalizó la Banca. -Apoyó el desarrollo capitalista mediante planes nacionales de desarrollo urbano, energía, empleo y desarrollo industrial. -Se dio la quiebra financiera. -Se crea el Sistema Alimentario Mexicano (SAM). -Cierre de empresas y desempleo. -Se dio una inflación constante. -Devaluaciones constantes del peso. - Apertura política.	- Cambios constantes en el gabinete. - Crisis económica. - Nepotismo.

Etapa	Presidente	Acontecimientos	Características
POLÍTICA NEOLIBERAL (1982-2000)	MIGUEL DE LA MADRID HURTADO (1982-1988)	-Se crea la Bolsa de Valores. -Son asesinados los periodistas Manuel Buendía, Javier Ovando y Ramón Gil. -Se incrementa el narcotráfico y la corrupción. -México ingresa al GATT. -Los sismos de 1985 devastan la Ciudad de México. -Fueron postulados los candidatos a la presidencia, por el PRI, Carlos Salinas; por el Frente Democrático Nacional, Cuauhtémoc Cárdenas y por el PAN, Manuel J. Clouthier. -Carlos Salinas de Gortari es electo presidente ante la "caída del sistema".	- Arribaron los tecnócratas al gobierno. - Especulación bursátil. - Política descentralizadora. - Programas de austeridad. - Devaluación permanente.
	CARLOS SALINAS DE GORTARI (1988-1994)	-Se dieron frecuentes marchas de maestros y obreros. -Es aprehendido el líder petrolero Joaquín Hernández Galicia (La Quina). -Se firma el Pacto para la Estabilidad y el Crecimiento Económico (PECE). -Se instituye el Programa de Modernización Educativa. -Se crea el Plan Nacional de Desarrollo. -Se crea el Programa Nacional de Solidaridad (PRONASOL). -Aparecen nuevos partidos políticos. -Cuauhtémoc Cárdenas crea el Partido de la Revolución Democrática (PRD). -Son asesinados: Manuel J. Clouthier, el cardenal Juan Jesús Posadas, Luis Donaldo Colosio y Francisco Ruiz Massieu. -Se reprivatiza la banca. -Se firma el Tratado de Libre Comercio con EUA y Canadá (TLC). -Se hicieron reformas a la Constitución para modificar las relaciones Iglesia-Estado. -Se dio el levantamiento zapatista de Chiapas y la creación del Ejército Zapatista de Liberación nacional (EZLN). -Se incrementó la miseria en contraste con los grandes millonarios.	- Reformas electorales. - Democratización. - Reprivatización.
	ERNESTO ZEDILLO PONCE DE LEÓN (1994-2000)	-Se da la macro devaluación a unos días de iniciado el sexenio. -Se llevó a cabo la elección del primer Jefe de Gobierno en el D.F. de un partido de oposición (PRD). -Surgió el rescate bancario mediante el FOBAPROA. -Fuertes movimientos de los partidos de oposición. -Conflictos universitarios en el país. -Apertura económica.	- Apertura económica mediante acuerdos de libre comercio con EUA, Latinoamérica y Europa. - Vigilancia e independencia del instituto Federal Electoral.

Principales consecuencias de la Apertura Comercial en México



e) La alternancia en el 2000. Gobierno de Vicente Fox (2000- 2006)

El régimen de Vicente Fox estableció su legitimidad en la transparencia lograda durante las elecciones federales del año 2000. Pero al asumir el mando presidencial, Fox promovió la aplicación del impuesto al valor agregado (IVA) sobre artículos de primera necesidad como alimentos y medicinas, lo cual dio origen a un desprestigio de su imagen como conductor de la nación. Esta misma política fiscal sobre la industria editorial tampoco tuvo aceptación popular ni partidista al interior de un congreso fuertemente dividido.

La necesidad de una reforma fiscal y de una reestructuración profunda en PEMEX y en la CFE han sido los principales focos de controversia entre el proyecto de Vicente Fox y el Congreso de la Nación. La presencia de mafias como el narcotráfico o la industria del secuestro dentro de las mismas instituciones de gobierno han rebasado la capacidad del Estado para mantener la seguridad pública y el rumbo de la vida nacional. Pero justo es reconocer que dichos males que laceran a México se iniciaron en tiempos del más duro priísmo y que representan una herencia del viejo sistema presidencialista como prácticas ordinarias del poder. No se trata de hechos que puedan adjudicarse categóricamente al gobierno actual, aunque lo que cabe preguntarse ahora es, si hoy en día, el Estado puede garantizar la gobernabilidad y el tránsito hacia una auténtica vida democrática en México.

Ejercicios

1. ¿Cómo lograron los regímenes emanados de la Revolución ejercer un mayor control social?
   a) Mediante una nueva relación entre el Estado y la Iglesia mexicana
   b) A través de un programa nacional de alfabetización pública
   c) Por medio de una guerra sucia en contra de diversos movimientos sociales
   d) Mediante nuevas formas de relación entre el Estado y las masas populares

2. Lee y completa el espacio en blanco.
   La CROM, ___________________________, fue establecida por el régimen constitucionalista surgido después de la Revolución, y representa un antecedente del corporativismo en México.
   a) Confederación Revolucionaria Obregonista Mexicana
   b) Cámara Regional Obrera y Marxista
   c) Comisión Revolucionaria para el Libro de Texto
   d) Confederación Regional Obrero Mexicana

3. Después de la Revolución, ¿a quién se le conoció como el *Jefe Máximo*?
   a) Al general Lázaro Cárdenas
   b) A Adolfo de la Huerta
   c) A Plutarco Elías Calles
   d) A Álvaro Obregón

4. ¿Qué importancia tuvo el Partido Nacional Revolucionario creado por Plutarco E. Calles en 1929?
   a) Este hecho marcó el inicio del *Institucionalismo*
   b) Con este hecho dio inicio la Revolución Mexicana
   c) De esta forma concluyó la dictadura porfirista
   d) Dicho acontecimiento dio origen al corporativismo

5. Una medida implementada durante el régimen cardenista fue:
   a) la expropiación de la Banca
   b) la fundación del IPN
   c) el Tratado de Bucareli
   d) la fundación del PNR

6. ¿Qué presidente de México se propuso alcanzar la autonomía tecnológica mediante la fundación del Instituto Politécnico Nacional (IPN) en 1937?
   a) Plutarco Elías Calles
   b) Emilio Portes Gil
   c) Lázaro Cárdenas
   d) Manuel Ávila Camacho

7. ¿A qué presidente se le atribuye la creación de Ciudad Universitaria?
   a) A Adolfo López Mateos
   b) A Gustavo Díaz Ordaz
   c) A Miguel Alemán
   d) A Manuel Ávila Camacho

8. La crisis del desarrollo estabilizador hacia 1970 motivó una nueva política económica, llamada:
   a) la Sustitución de Importaciones
   b) el Crecimiento Compartido
   c) el Plan Sexenal
   d) la Alianza para el Progreso

9. La firma del Tratado de Libre Comercio entre México, EUA y Canadá, se realizó bajo el gobierno de:
   a) Carlos Salinas
   b) Ernesto Zedillo
   c) Luis Echeverría
   d) Vicente Fox

Respuestas de los ejercicios de Historia de México

Unidad 1

1. d	2. c	3. b	4. b	5. c	6. a				

Unidad 2

1. a	2. a	3. b	4. c	5. d	6. d	7. b	8. d		

Unidad 3

1. c	2. c	3. d	4. c	5. a	6. c	7. d	8. b		

Unidad 4

1. b	2. c	3. a	4. b	5. b	6. a	7. c	8. a		

Unidad 5

1. a	2. b	3. d	4. c	5. a	6. c	7. b			

Unidad 6

1. b	2. a	3. c	4. c	5. b	6. d	7. a	8. d		

Unidad 7

1. c	2. d	3. b	4. d	5. b	6. b	7. a	8. a		

Unidad 8

1. d	2. d	3. c	4. a	5. b	6. c	7. c	8. b	9. a	

Bibliografía

Ávila Carrillo, Enrique; Et. Al. *Historia de México Contemporáneo*. Editorial Quinto Sol. México 1992.

Ayala Anguiano Armando. *Historia Esencial de México*. Tomos 1 al 6. Editorial Contenido S. A. de C. V. México, D. F., 2003.

Baena G., *Estructura Socioeconómica de México,* Editorial Publicaciones Cultural, México, 2004.

Brom, Juan, *Esbozo de Historia Universal*. México, Grijalbo, 1989.

Brom, Juan. *Para Comprender la Historia*. Ed. Nuestro Tiempo, México, 1993.

Delgado de cantú Gloria. *Historia de México, Formación del Estado Moderno*. Editorial Alhambra Mexicana. México, 1992.

Enciclopedia Historia de México, Primera edición. Editorial Salvat Mexicana de Editores. México D. F. 1978.

Enciclopedia Microsoft Encarta 2003.

Escalante Gonzalbo, P., *Nueva Historia Mínima de México*, El Colegio de México, México, 2004.

González Lemoine, Josefina. *Atlas de historia de México*. UNAM. México 1990.

González, F. et al, *Del Porfiriato al Neoliberalismo*, Editorial Quinto Sol, México, 2007.

Méndez Morales J., *Problemas Económicos de México*. Editorial McGraw Hill, México, 1994.

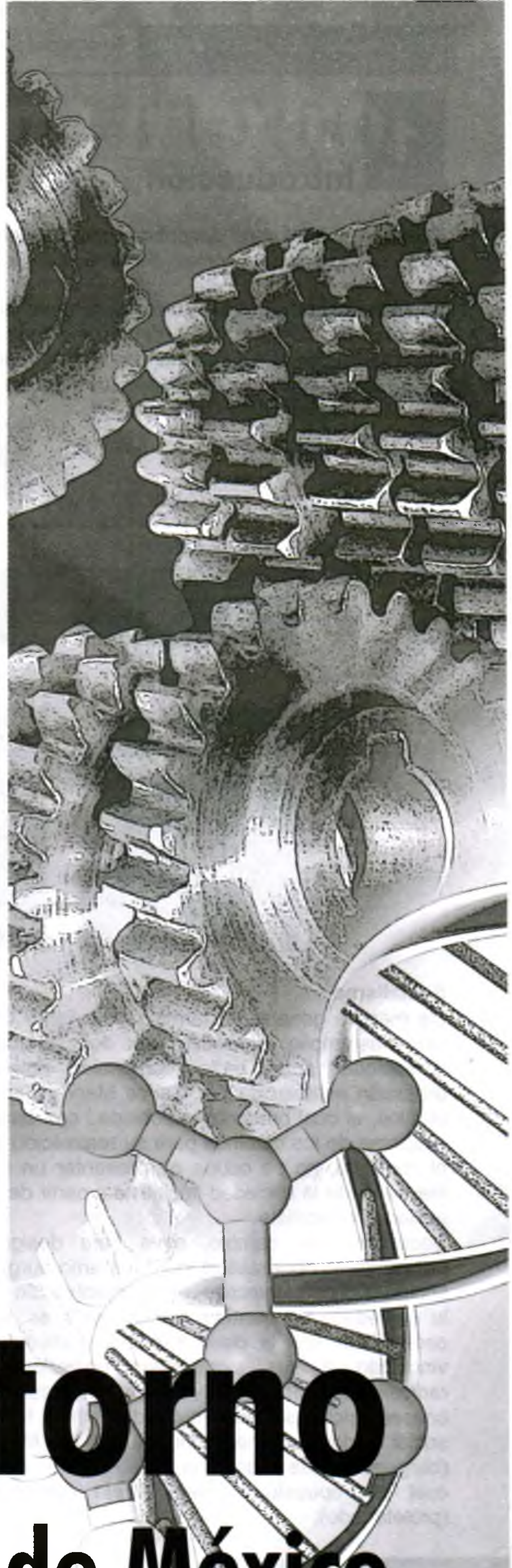
Miranda Basurto Ángel. *La Evolución de México*. Editorial Porrúa, S.A. México, 2004.

Nueva Historia Mínima de México. El Colegio de México. México, 2004.

Quirarte Martín. *Visión panorámica de la historia de México*. Editorial Porrúa. México 1985.

Schetttino Yáñez, Macario., *México II. Problemas Sociales, Políticos y Económicos.* . Pearson, México, 2002.

Sierra C, *Historia de México II, a la Luz de los Especialistas*. Editorial Esfinge, México, 2007.



Entorno socioeconómico de México

1 Introducción

Propósito: el alumno describirá las principales nociones teóricas para comprender la estructura y el entorno socioeconómico de México en la actualidad.

La **estructura económica** es la parte de la ciencia económica que se dedica al estudio del ámbito en el que se efectúan los cambios de la dinámica de un sistema económico. Puede definirse como la red de relaciones interpersonales que fundamentan al engranaje económico de una sociedad y se encuentra constituida por el conjunto de relaciones de producción vigentes. La estructura económica se integra por sectores:



Socialismo

De manera general, el término socialismo tiene dos significados principales: Uno más amplio, que refiere toda doctrina que defienda una reorganización de la sociedad sobre bases comunales, colectivas. No obstante, existe una distinción establecida por Carlos Marx y Federico Engels entre el socialismo utópico, el cual presenta la sociedad con bases socialistas como un ideal, sin ocuparse de los caminos para su realización y el socialismo científico que, por el contrario, no se ocupa en presentar un ideal, ya que sostiene la llegada inevitable de la sociedad socialista a partir de las mismas leyes que dirigen a la sociedad capitalista.


Carlos Marx (1818-1883)


Federico Engels (1820-1895)

Socialismo, en cambio, sirve para designar a todas las corrientes de pensamiento opuestas al individualismo burgués y que privilegian el momento social, público o colectivo, en la organización de la vida económica y política de la sociedad. En sentido estricto, sólo es aplicable a ideas y movimientos compatibles con la clase trabajadora moderna. El socialismo, como término vinculado a sus significados posteriores, apareció entre los grupos radicalizados de la Revolución Francesa y se vio enriquecido con las consecuencias sociales motivadas por la Revolución Industrial, con un orden social fundamentalmente individualista, a favor de una minoría de propietarios (burguesía) y de la doctrina del liberalismo que intentó legitimar dicho orden, el cual era opuesto al ideal de la democracia social y los trabajadores (proletariado).

Tendencia	Representantes	Conceptos
Socialismo utópico	Robert Owen Louis Blanc Charles Fourier Henri de Saint-Simon	• La humanidad debe tener la propiedad en común. • No deben existir las clases sociales ni la propiedad privada. • El Estado debe controlar la economía. • Proponen los falansterios (células sociales y económicas básicas, por Fourier) y sociedades cooperativas (por Saint-Simon).
Socialismo científico	Karl Marx Friedrich Engels	• La lucha de clases ha sido una constante histórica. • El Estado que puede terminar con ella es la dictadura del proletariado, la clase explotada por la burguesía. • La dictadura del proletariado la mayor parte de las veces sólo puede establecerse por medios violentos. • El Estado se irá extinguiendo en la medida en que dejen de existir las clases, pero sólo puede desaparecer totalmente en el pleno comunismo. • El objetivo final del socialismo es el comunismo. • La diferencia entre el comunismo moderno y el primitivo es que durante el desarrollo de este último, no existía el Estado, pues se llevó a cabo en las comunidades primitivas.

La expresión máxima del pensamiento socialista es el conjunto de teorías, conceptos y metodologías que se pueden extraer de las obras de Marx y Engels, que más tarde fueron enriquecidas por Vladimir Lenin y otros marxistas, al formular de forma sistemática una concepción del mundo, la sociedad y la política. Es decir, desde esta perspectiva, socialismo científico, comunismo y marxismo tienen el mismo significado. Marx y Engels publicaron en 1848 *El Manifiesto del Partido Comunista* como un programa de acción política, pero también como una obra completa y resumida de su pensamiento.
K. Marx elaboró su doctrina a partir de la crítica a los conocimientos ya existentes al respecto. Son tres las principales fuentes del marxismo:

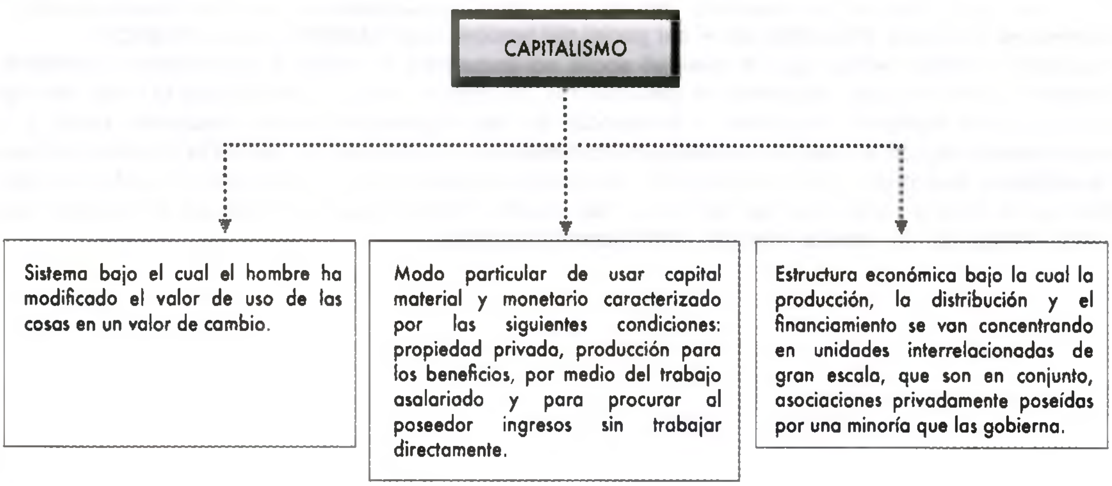
- La filosofía alemana.
- La economía política inglesa.
- El socialismo utópico francés.

De esta forma, las aportaciones del marxismo abarcan tres campos: la filosofía, a través del materialismo dialéctico, las ciencias sociales, mediante el materialismo histórico, y el análisis específico del sistema capitalista. Como sistema económico y social, hay diferencias entre socialismo y comunismo. El socialismo es la primera fase o una etapa de transición hacia la sociedad comunista. El materialismo histórico es la interpretación marxista de la historia y la sociedad. Esta interpretación histórica propuesta por Marx consiste en reconocer que los factores económicos tienen un peso preponderante en la determinación de los acontecimientos históricos. Para Marx es el ser social del hombre quien determina su conciencia.
El materialismo histórico señala que la realidad social se encuentra en continuo movimiento, confrontación y transformación; son las clases sociales las generadoras de dichos cambios, por lo que la lucha de clases ha sido una constante histórica. Sostiene la existencia de una regularidad en el desarrollo social y es una concepción materialista de la historia o **materialismo histórico**. Dicho enfoque señala la totalidad del desarrollo de las sociedades humanas como un conjunto de procesos dialécticos, en los cuales el estímulo principal y constante es la acción recíproca del hombre y del medio material que le rodea en el proceso social de producción. Enseguida, se enlistan algunas definiciones marxistas:

Concepto	Definición
Modo de producción	Los factores de producción clásicos son la tierra, el trabajo y el capital. El modo de producción se conforma por las **fuerzas de trabajo** y las **relaciones de producción** en el proceso de creación de bienes materiales. Los instrumentos con los que se trabaja son los **medios de producción** y la actividad realizada en el proceso productivo es el **trabajo**. La fuerza de trabajo pone en movimiento a los medios de producción; las relaciones sociales del proceso productivo son las que se llevan a cabo entre los propietarios de los medios de producción y los trabajadores. De acuerdo con el marxismo, a lo largo de la historia han existido **cinco modos de producción**: ✓ Comunidad primitiva (propiedad colectiva de los medios de producción). ✓ Esclavismo (los esclavistas ostentaban la propiedad de los medios de producción y la fuerza de trabajo de los esclavos). ✓ Feudalismo (propiedad del señor feudal sobre los medios de producción, principalmente la tierra). ✓ Capitalismo (**propiedad privada** de los medios de producción). ✓ Socialismo (**propiedad social** de los medios de producción).
Lucha de clases	La concepción de clases sociales se relaciona directamente con la **desigualdad**. Una **clase social** es un grupo social con un lugar determinado en el proceso de producción. La **lucha de clases** es, entonces, la confrontación que se da entre clases sociales antagónicas cuando defienden sus intereses de clase. Dicho enfrentamiento busca modificar el modo de producción existente y derrocar a la clase social en el poder mediante una **revolución** que transforme de manera total el orden social imperante. Y, dado que los intereses de las clases sociales son irreconciliables, dicha revolución no en pocas ocasiones debe ser violenta. En el capitalismo industrial dichas clases sociales antagónicas son la burguesía y el proletariado (clase obrera).
Infraestructura y superestructura	La **infraestructura es la base o estructura económica de la sociedad**; en cambio, la superestructura depende de la infraestructura y es el conjunto de las relaciones sociales, excepto las de producción, y de la conciencia social, necesarias para que exista un determinado modo de producción. En otras palabras, la **superestructura** es el conjunto de instituciones jurídico-políticas de la sociedad; en otras palabras, a ideologías o formas sociales, jurídicas, religiosas y políticas.
Plusvalía	Surge de la explotación de los obreros por parte de los capitalistas y es lo que origina la **ganancia** de los mismos y la miseria de la clase trabajadora.

Capitalismo

Puede conceptualizarse al capitalismo de diversas formas. El siguiente cuadro muestra algunas de ellas:



Momentos históricos fundamentales del capitalismo

El capitalismo mercantilista	Surge en la Edad Media y perdura hasta finales del siglo XVIII. El mercantilismo fue el modo de producción basado en la acumulación de metales preciosos, particularmente oro y plata, y en el control económico estatal.
El capitalismo intacto	Consecuencia de la Revolución Industrial que se prolongó hasta la depresión económica de 1873 a 1897. Se identificó con el lema *laissez-faire* ("dejen hacer"). En esta etapa también se ubica el imperialismo, sistema del que se hablará más adelante.
El capitalismo contemporáneo	Que se ha desarrollado en distintos momentos, desde el Estado benefactor keynesiano, la convivencia y contraparte del socialismo, hasta la globalización actual.

Desde finales del siglo XIV y principios del XV, durante el Renacimiento, inició el auge de los descubrimientos tecnológicos y geográficos. Todos estos cambios originaron una nueva forma de organización económica, política y social. Nacieron la industria, la propiedad privada y el obrero, cuya única propiedad es su fuerza de trabajo. El taller artesanal comenzó a desaparecer y a ser sustituido por la fábrica. Fue la génesis del capitalismo.



Los viejos talleres artesanales del feudalismo fueron poco a poco sustituidos por las grandes fábricas, con lo que la economía local y cerrada desapareció. Como características del nuevo sistema de organización económico-social capitalista surgen la división del trabajo, la especialización en algún proceso o momento productivo y no en toda la producción de la mercancía, así como el individualismo. Todos estos caracteres beneficiaban a los propietarios de las fábricas, debido a que los trabajadores se convertían en obreros asalariados especializados. Fue el nacimiento de la mano de obra calificada.

Lo anterior también atrajo el establecimiento de nuevas relaciones de producción, nuevas fuerzas productivas y medios de producción. Surgieron dos clases sociales principales: los propietarios de las fábricas, o capitalistas, y los trabajadores asalariados de las mismas, o proletarios. Además, la producción empezó a realizarse a gran escala, lo que derivó en el desarrollo de la competencia, la inversión y el comercio, los cuales ayudaron al capitalismo a obtener su fin último, la ganancia. También se fundaron bancos y sociedades anónimas. Es decir, en el capitalismo como sistema económico, el dinero (capital), su reproducción, concentración y acumulación constituyen la esencia del mismo.

El desarrollo de la ideología liberal también influyó en la consolidación del capitalismo. Al liberalismo puede entendérsele desde dos distintas perspectivas. Por una parte, constituye la filosofía política de la libertad, que significa progreso, renovación permanente del intelecto, a la vez ruptura de todos los obstáculos que inmovilizan el pensamiento. Por la otra, se hace referencia al liberalismo económico, corriente doctrinaria que nace en el siglo XVIII y se desarrolla en el XIX, cuya esencia es la no intervención del Estado en la vida económica, actitud que los franceses sintetizaron en la famosa fórmula *laissez-faire* ("dejen hacer") y, su complemento, *laissez-passer* ("dejen pasar").

El liberalismo clásico eleva el mercado hasta considerarlo el motor del progreso humano. En el liberalismo económico se entiende que el libre comercio y las leyes del mercado deben ser salvaguardadas para que la "mano invisible" pueda gobernar en interés de todos.

De acuerdo con la teoría marxista-leninista, el imperialismo es la fase superior del capitalismo.

Ejercicios

Responde correctamente los siguientes cuestionamientos.

1. ¿En qué consiste la base económica de una sociedad?
   a) En leyes de compra y venta
   b) En relaciones de producción y en fuerzas productivas
   c) En un sistema bursátil y el fomento de las exportaciones
   d) En un manejo de relaciones y conflictos laborales

2. Según la teoría económica de los modos de producción, en una sociedad primitiva donde la propiedad de los medios de producción es comunal, dicha sociedad vive en:
   a) el capitalismo
   b) la Prehistoria
   c) el estado de naturaleza
   d) el comunismo primitivo

3. La edad y el sexo corresponden a:
   a) la división socialista del trabajo
   b) un mecanismo para establecer salarios distintos
   c) una división natural del trabajo
   d) la división social del trabajo

4. ¿Cuál es un término esencial que Carlos Marx utilizó para explicar el desarrollo histórico de las sociedades?
   a) Estructura social
   b) Plusvalía
   c) Lucha de clases
   d) Función social

5. Bajo el modo de producción capitalista:
   a) se consolida la propiedad privada de los medios de producción
   b) desaparecen las clases sociales y el Estado garantiza una justa distribución de la riqueza
   c) se agudizan las contracciones sociales entre obreros y proletarios
   d) surgen las cooperativas agrícolas y se desarrolla la dictadura del proletariado

6. Una economía socialista se distingue porque en ella:
   a) los trabajadores participan de la plusvalía
   b) la propiedad de los medios se privatiza para justificar el orden
   c) el Estado dirige la actividad económica
   d) el dueño de la empresa paga sus impuestos

Contexto socioeconómico internacional de los siglos XX y XXI

2

Propósito: el alumno identificará las características principales del contexto socioeconómico internacional de los siglos XX y XXI

Consecuencias de la Primera Guerra Mundial (1914-1918)

El armisticio fue solicitado por Alemania a finales de 1918. Se conoce como "Paz de Versalles" (1919) al fin del conflicto, por el tratado de paz que lleva su nombre, en el que se estipuló oficialmente el final de la Primera Guerra Mundial y que inició desde la Conferencia de París, apoyada en el documento difundido por el entonces presidente de los Estados Unidos, Woodrow Wilson. Se trataba de una serie de propuestas para desvanecer la guerra y fue conocido como "Catorce Puntos", el cual, entre otras estipulaciones, declaraba que la diplomacia debía ser abierta, el respeto a la libre autodeterminación e independencia de los pueblos, así como la creación de la Sociedad de Naciones, con el objetivo de intentar asegurar la paz y la seguridad en Europa.



Woodrow Wilson (1856-1924)

El triunfo correspondió a cuatro países aliados: Inglaterra, Francia, Italia y Estados Unidos. El Tratado de Versalles fue firmado el 28 de junio de 1919 y estipulaba los acuerdos secretos (lo que era contradictorio con la propia posición propuesta por Estados Unidos) que los países vencedores habían negociado previamente. Se castigó severamente a las potencias centrales con pérdidas de territorios nacionales y con tributos de guerra; se ordenó el desarme total del ejército alemán y la devolución de Alsacia y Lorena para Francia. También se desintegró el imperio austrohúngaro, recortando arbitrariamente territorios alemanes. Todo lo anterior provocó mayores conflictos geográficos centroeuropeos durante las décadas posteriores a la gran conflagración mundial y fue motivo del resentimiento alemán, sobre todo por haberle obligado a aceptar su derrota.

Crisis del capitalismo (Crisis de 1929)

En el periodo que abarcó de 1919, con el fin de la Primera Guerra Mundial, y 1938, previo al inicio de la segunda gran conflagración, el contexto internacional tuvo ciertas características, las cuales pueden sintetizarse en:

Totalitarismos europeos	Crisis de 1929
La tendencia totalitarista de corte nacionalista, expansionista y militar, con un dictador y un partido único, fue la característica esencial de las naciones europeas después de la Primera Guerra Mundial, tal es el caso de Rusia (comunismo de Stalin), Alemania (nazismo de Hitler), Italia (fascismo de Mussolini) y España (falangismo de Franco), esto debido a la crisis generalizada que se vivió en Europa con relación a los desequilibrios que la primera gran conflagración mundial generó.	Por otro lado, en Estados Unidos el *Jueves negro*, 24 de octubre de 1929, la Bolsa de valores de Nueva York cayó repentina y estrepitosamente generando la conocida Gran Depresión de 1929, que dio por terminada la prosperidad de la década de 1920. El entonces presidente Franklin D. Roosevelt implementó la política conocida como *New Deal* (Nuevo Trato), para la recuperación económica.

Después de la crisis económica, el Estado tomó las riendas de la producción y estableció topes agrícolas e industriales para evitar la sobreproducción, una medida típica de las economías socialistas, pero contrario a las aspiraciones del liberalismo económico. Así, el Estado asignaba jugosas partidas presupuestarias para sostener un seguro de desempleo y para dar ocupación a los ciudadanos, pero este gasto no generaba una plusvalía ni favorecía la recuperación de excedentes para la exportación, lo cual caracterizaba un Estado de Bienestar. La deuda norteamericana se incrementaba. Así continuó la situación crítica de los Estados Unidos durante años, y fue hasta que el mundo manifestó síntomas de una nueva conflagración cuando, hacia 1936, la industria armamentista norteamericana marcó el fin de la depresión y una nueva era de alta productividad.

Segunda Guerra Mundial (1939-1945)	
Causas	• **El Tratado de Versalles.** Como se ha abordado, el tratado de paz con el que finalizó la Primera Guerra Mundial resultaba impositivo y desfavorable para Alemania, lo cual le generó resentimiento. • **La Crisis de 1939.** La cual no sólo tuvo consecuencias en Estados Unidos, sino que se extendió a Europa. • **Las dictaduras totalitarias.** Como ya se dijo, dichos regímenes favorecieron el auge expansionista y nacionalista-militar.
Desarrollo	 El Eje Berlín-Roma-Tokio y los Aliados (Estados Unidos, Inglaterra y Francia) fueron los bandos principales que se enfrentaron en la Segunda Guerra Mundial. Alemania invadió Austria y Checoslovaquia, pero fue el 3 de septiembre de 1939 cuando inició oficialmente la segunda gran conflagración mundial con la invasión alemana en Polonia, cuando Inglaterra y Francia le declararon la guerra a Alemania. Hubo varios enfrenamientos relevantes acaecidos durante este gran conflicto, algunos de ellos fueron: • La invasión nazi en París, Francia (mayo de 1940). • La Operación Barbarroja (ataque sorpresivo sobre la URSS) desconociendo el acuerdo previo de no agresión (Pacto Molotov-Ribbentrop) que Hitler había firmado con Stalin. • El ataque nipón a la base militar norteamericana en el Pacífico, Pearl Harbor (diciembre de 1941). • El desembarco aliado en el puerto de Normandía para rescatar a Francia de la invasión nazi (6 de junio de 1944, *Día D*).
Consecuencias	Finalmente, la Segunda Guerra Mundial terminó cuando los soviéticos y los Aliados, (el general norteamericano Eisenhower dirigía al ejército angloamericano), rodearon Berlín y Alemania se rindió en mayo de 1945. No obstante, Japón siguió resistiendo y para demostrar su poderío, Estados Unidos usó bombas atómicas sobre las ciudades japonesas de Hiroshima y Nagasaki, en Japón, por lo que éste último firmó su rendición el 2 de septiembre de 1945, en el acorazado Missouri, dando fin con esto a la segunda gran conflagración mundial. Además, se llevaron a cabo una serie de conferencias en el contexto del fin de la segunda posguerra: • Carta de Atlántico (desde agosto de 1941, entre Inglaterra -Primer ministro Winston Churchill- y Estados Unidos –Franklin D. Roosevelt-), con la intención de definir y lograr objetivos de paz. • Conferencia de Yalta (en febrero de 1945, entre Inglaterra –W. Churchill-, Estados Unidos –Roosevelt- y URSS –Stalin-), donde acordaron dividir Alemania en cuatro zonas, para Estados Unidos, Inglaterra, Francia y la URSS. • Conferencia de San Francisco (el 26 de junio del mismo año), para crear un organismo internacional que velara por la seguridad mundial: la ONU (Organización de las Naciones Unidas).

Organismos Internacionales más Importantes en el orden socioeconómico internacional de la segunda posguerra

La sociedad internacional ha creado diversos organismos, con la finalidad de regular la economía a nivel internacional, en 1949 Estados Unidos y Reino Unido, crean el Sistema Monetario Internacional (SMI) con la finalidad de fijar reglas en cuanto a la conducción de los países en materia de comercio y finanzas internacionales. Además, establecieron facilidades de crédito para países con dificultades temporales de balanza de pagos.

Banco Mundial
La conferencia de Bretón-Woods fue creadora del Banco Mundial, capitalizado por los principales países industrializados, cuyas aportaciones dependen de su importancia económica. Su organización definitiva se efectuó en 1946 en Estados Unidos. El banco puede utilizar su capital para conceder préstamos internacionales a los países cuyos proyectos parezcan económicamente sensatos, pero que no puedan conseguir préstamos privados a bajo tipo de interés.
Como consecuencia de éstos préstamos a largo plazo, fluyen bienes y servicios de los países avanzados a los países en vías de desarrollo. En estos últimos años, el Banco Mundial ha concedido nuevos créditos por un valor medio de 8,000 millones de dólares al año.
La finalidad de este organismo es que mientras realicen préstamos, el mundo avanzado renunciará al gasto interior. A medida de que los préstamos produzcan intereses o sean devueltos, los países avanzados podrán disfrutar de importaciones mayores de bienes útiles. En los países prestaños la producción habrá aumentado más del suficiente para pagar los intereses de los préstamos; los salarios y los niveles de vida serán más altos y no más bajos, debido a que aumentará su PNB como consecuencia de la aportación del capital extranjero.

Fondo Monetario Internacional (FMI)
También fue creado en la conferencia de Bretón-Woods, con la finalidad de desarrollar un nuevo SMI. Sus principales objetivos son:

- Impulsar la cooperación entre sus miembros sobre controversias internacionales.
- Promover la estabilidad en los tipos de cambio.
- Originar fondos temporales en países miembros intentando corregir el desequilibrio de cargos internacionales.
- Incentivar la movilidad independiente de fondos de capital a través de los países.
- Promover el libre comercio.

El financiamiento del FMI es medido en DEGS (Derechos Especiales de Giro). Los DEGS no son una moneda, sino una unidad de valor, una reserva internacional de capital creada por el FMI y distribuida por los países miembros como suplemento de reservas monetarias.
México se encuentra indiscutiblemente a la zaga de los europeos y está mejor situado que otros países, sin embargo, aún le falta superar muchos problemas. Entre los económicos: ingreso por habitante bajo (sobre todo por su distribución no equitativa), productividad baja, factores productivos mal aprovechados y baja capitalización; entre los sociales: alto analfabetismo, insalubridad, natalidad e incremento demográfico altos, así como bajo nivel de vida y de población económicamente activa.
Actualmente existe una enorme diferencia de niveles de vida en los países del mundo. Según el Banco Mundial, la mitad (más de dos mil millones de personas), que es la más pobre, sólo recibe el ocho por ciento de la renta mundial. La riqueza está más concentrada que el ingreso. Al comparar el caso de Estados Unidos e Inglaterra, la distribución del ingreso es similar, no así el de la riqueza: que está más concentrada en Inglaterra.
Por otra parte, ahora se puede apreciar que la autonomía económica no existe. Un país, al consumir bienes extranjeros en proporción importante, se convierte, por este hecho, en dependiente. De este modo, los países pobres anhelan el desarrollo económico, pero también social; ya que si no fuera así, sólo sería un crecimiento. Después de la Segunda Guerra Mundial, diversos gobiernos de países en desarrollo, han manifestado tal inquietud en diversos foros internacionales.

La Guerra Fría (1945-1989)
Se conoció como Guerra Fría al enfrentamiento económico, militar, ideológico y político entre las dos grandes superpotencias mundiales de la segunda posguerra, así como de sus estructuras estatales: el capitalismo de Estados Unidos y el socialismo de la URSS, caracterizado por la rivalidad militar, nuclear y espacial. Estados Unidos, después de la Segunda Guerra Mundial, se propuso detener al comunismo (política de contención), por lo que implementó una serie de medidas en los diversos ámbitos con la intención de "contener" al comunismo. Asimismo, la URSS respondía con la creación de sus propias estrategias de respuesta a las estadounidenses. La Doctrina Truman (1947) constituyó la estrategia para evitar la expansión comunista en Europa Occidental; el Plan Marshall fue la estrategia económica para la recuperación de países europeos. Asimismo, la estrategia político-militar utilizada fue la creación de la Organización del Tratado del Atlántico Norte (OTAN), bajo el liderazgo de Estados Unidos, respondiendo la URSS con el Pacto de Varsovia.


Conferencia de Yalta

De la misma manera, hubo varios sucesos históricos que reflejaron dicho enfrentamiento entre las dos superpotencias:

- En 1961, la URSS ordenó en Berlín la construcción de un muro que evitara la circulación en la ciudad de la parte oriental a la occidental (correspondientes a la República Democrática Alemana, socialista, y la República Federal de Alemania, capitalista, respectivamente): el muro de Berlín.
- En 1962, la URSS intentó instalar en Cuba una base nuclear cercana a territorio norteamericano, por lo que el entonces presidente John F. Kennedy, desplegó sus misiles contra la URSS, por ello este conflicto es conocido como *Crisis de los misiles*.
- En 1968, se suscitaron diversos movimientos y manifestaciones estudiantiles en diversos países occidentales. Además, China se deslindó de la URSS, y Vietnam o Corea del Norte se convirtieron en satélites del comunismo soviético. Estados Unidos finalizó la Guerra de Vietnam en 1973.

Durante el periodo final de la Guerra Fría, Mijaíl Gorbachov llevó a cabo una reforma para la reestructuración económica de la URSS, conocida como Perestroika; la medida llamada *Glásnot* consistió en la apertura y reforma política en la ex Unión Soviética. El derrumbe del muro de Berlín en 1989 y la adopción de la Perestroika en Rusia marcaron el fin del llamado socialismo real en Europa y, en consecuencia, de la Guerra Fría. Posteriormente, surgió la Comunidad de Estados Independientes (CEI), en 1991, compuesta por las antiguas repúblicas soviéticas, y dirigida por Boris Yeltsin.

Como se ha mencionado, hubo conflictos internacionales que indicaban la tirantez provocada por la Guerra Fría, tales como:

- La Revolución comunista en China (1948, encabezada por Mao Tse-Tung)
- La Guerra de Corea (1950-1953)
- Los movimientos anticoloniales en África (1957-1963)
- La Revolución Cubana (1959, representada por Fidel Castro y Ernesto "Che" Guevara).


Ernesto *Che* Guevara y Fidel Castro

Con el declive soviético y la caída del Muro concluyó, al finalizar la década de 1980, la Guerra Fría. Se inició entonces una nueva fase del capitalismo neoliberal con Estados Unidos y con nuevos conflictos militares en el Golfo Pérsico. En consecuencia, Estados Unidos ejerce una prepotencia bélica y se propone perseguir el narcotráfico, en América Latina, y el terrorismo. La economía mundial tiende a la globalización, y en primera instancia a la regionalización (Unión Europea, Pacífico Asiático y Norte de América), y el mundo entero se ve envuelto en la amenaza de las armas químico–biológicas, y la proliferación de los virus. El uso de nuevas tecnologías en la informática y las telecomunicaciones, así como el auge de las ciencias genómicas, son rasgos novedosos a inicios del siglo XXI.

El orden socioeconómico mundial actual: la globalización neoliberal

La globalización es amplia y poco claramente definida por ser un proceso aún en formación. La globalización es la más difundida interpretación de la realidad internacional, y se fundamenta en una perspectiva liberal. Las premisas de este enfoque son que el mundo se integra económica, política, cultural e ideológicamente; mientras esta integración avanza, las diferencias internacionales –e implícitamente los Estados y las relaciones de poder entre ellos– tienden a desaparecer.

Consecuentemente, si los países desean elevar su nivel de vida y sus oportunidades de éxito en el escenario mundial, requieren incorporarse y adaptarse a dichas tendencias globalizantes, que se perciben como inexorables. El mecanismo privilegiado para dicha adaptación es la apertura económica, en conjunto con la instrumentación de otras medidas internas para apoyar a los mercados, como la privatización y la desregulación, medidas que se identifican con el modelo económico neoliberal que sustenta la globalización.

Pueden distinguirse ciertas características del proceso que intentan describir. Por ejemplo, que la globalización:

- Es una etapa histórica de gran importancia porque rescata lo global, pero no lo internacional-estatal, sobre lo individual o comunal.
- Se encuentra definida actualmente por el capitalismo liberal dominante.
- En este sentido implica occidentalización de valores.
- Transforma el mercado, las fuerzas productivas, la división del trabajo y la acumulación originaria.
- Como parte de la historia capitalista se centra en aspectos, causas y consecuencias económicas,
- dejando de lado los impactos sociales o culturales.
- Utiliza instrumentos para llevarse a cabo, como los avances tecnológicos.
- Es un ejemplo de vivencia de la globalidad, no el único.

Toda economía nacional se vuelve provincia de la economía global. El modo capitalista de producción entra en una época propiamente global y no internacional o multinacional. Si bien es cierto que la globalización es una de las características del sistema internacional contemporáneo, representa un fenómeno complejo, heterogéneo, contradictorio, desigual y no es un proceso concluido. Al estudiar la globalización debe tenerse en cuenta la confrontación, y sus consecuencias, en la concepción de importantes elementos, por ejemplo:

- Políticos. El dilema fragmentación-integración y el futuro del Estado-nación como unidad básica de las relaciones internacionales.
- Sociales. La creación de lo que se ha llegado a llamar sociedad civil global, compuesta por ciudadanos antes que por Estados.
- Culturales. La difusión de todo un estilo de vida basado en el consumo como herramienta principal para la obtención del éxito.
- Económicos. Y por supuesto la expansión acelerada del capital financiero y de sus instrumentos, como el neoliberalismo.



En tanto, los avances en el proceso de globalización son primeramente observados en la economía internacional, que plantea dos facetas principales. La financiera, que transcurre rápidamente, y la productiva, que transita en ritmo contrario. La globalización financiera ha sido impulsada por la desregulación de los mercados de capital, el perfeccionamiento de la tecnología de la información, la creciente separación entre los flujos financieros y el comercio de bienes y servicios. En términos del capital productivo, la principal manifestación globalizante es la relocalización, es decir, la estrategia de las empresas transnacionales de dispersar sus productos alrededor del mundo.

No obstante, si bien la producción se dispersa en espacios geográficos distintos, en el ámbito de la circulación existen mercados nacionales y/o regiones aún proteccionistas, por lo cual el proceso de globalización está lejos de ser perfecto. Además, la apropiación de los excedentes derivados del comercio mundial se concreta en los tres grandes centros de la economía internacional: Japón, Estados Unidos y Unión Europea.
Actualmente tiende a colocarse a los fenómenos de la globalización y el neoliberalismo en el mismo plano y se sugiere que, si la globalización no es por definición neoliberal, al menos existe entre ambos una relación directa y continua. Es decir, no sólo se considera al neoliberalismo como la expresión de una ideología sino un modelo. Otras tendencias críticas consideran al neoliberalismo, y a lo que se conoce como globalización neoliberal, como una versión conservadora del proceso que expresa las posiciones ideológicas políticas de la derecha.
A diferencia del liberalismo, el neoliberalismo rechaza cualquier política intervencionista que regule en lo más mínimo la economía. Se opone a cualquier medida proteccionista. Propone que el interés particular de cada individuo y la competencia con sus vecinos harán que la sociedad se mueva sola hacia el interés común de ésta. El keynesianismo propuso la temporal intervención del Estado como herramienta para resolver los problemas de la recesión que comenzaron a sucederse tras la Primera Guerra Mundial, que desembocaron en la llamada Gran Depresión de 1929 y la aplicación de medidas como el *New Deal* para superarlos.
El neoliberalismo moderno propone que la acción del gobierno sobre la economía, a través de los instrumentos de política económica, sea lo menos intensa posible. Por eso, el neoliberalismo critica el concepto de Estado de Bienestar keynesiano, aludiendo a la responsabilidad personal. En este sentido, los problemas de seguridad social, sobre todo en la asistencia médica y la educación, tendrían que ser resueltos por medios privados.
"El subdesarrollo, de acuerdo al neoliberalismo, es el resultado de la intervención estatal con políticas de política económica que ignoran al mercado y que prefieren que funcionarios internacionales, como el Banco Mundial y el FMI, y nacionales -las Secretarías o Ministerios de Planificación-, decidan. La solución al subdesarrollo, desde la perspectiva neoliberal consiste en:

- **Privatización,** para eliminar las ineficiencias de las empresas públicas.
- **Liberalización del comercio exterior,** para que surjan las ventajas comparativas.
- **Reducción de la intervención estatal,** para reducir el gasto público hasta lo estrictamente necesario.

Con el nombre de regionalización se denomina al proceso mediante el cual, diversos países pertenecientes a un mismo continente o región se integran para alcanzar objetivos en común, generalmente en el rubro económico.

Ejercicios

Elija la opción correcta.

Lee con atención el texto siguiente y reflexiona los planteamientos que se proponen a continuación.

¿Qué deja la bestia a cambio de todo lo que se lleva?

(...) Chiapas posee 75 mil 634.4 kilómetros cuadrados, unos 7.5 millones de hectáreas, ocupa el octavo lugar en extensión y tiene 111 municipios organizados para el saqueo en nueve regiones económicas. Aquí se encuentra, del total nacional, el 40 por ciento de las variedades de plantas, el 36 por ciento de los mamíferos, el 34 por ciento de los anfibios y reptiles, el 66 por ciento de las aves, el 20 por ciento de los peces de agua dulce y el 80 por ciento de las mariposas. El 9.7 por ciento de la lluvia de todo el país cae sobre estas tierras. Pero la mayor riqueza de la entidad son los 3.5 millones de chiapanecos, de los cuales las dos terceras viven y se mueren en el medio rural. La mitad de los chiapanecos no tienen agua potable y dos tercios no tienen drenaje. El 90 por ciento de la población en el campo tiene ingresos mínimos o nulos.

La comunicación es una grotesca caricatura para un estado que produce petróleo, energía eléctrica, café, madera y ganado para la bestia hambrienta. Sólo las dos terceras partes de las cabeceras municipales tienen acceso pavimentado, 12 mil comunidades no tienen más comunicación que los centenarios caminos reales. La línea del ferrocarril no sigue las necesidades del pueblo chiapaneco sino las del saqueo capitalista desde los tiempos del porfirismo. La vía férrea que sigue la línea costera (sólo hay dos líneas: la otra atraviesa parte del norte del estado) data de principios de siglo y su tonelaje es limitado por los viejos puentes porfiristas que cruzan las hidrovenas del sureste. El único puerto chiapaneco, Puerto Madero, es sólo una puerta más de salida para que la bestia saque lo que roba.

¿Educación? La peor del país. En primaria, de cada 100 niños 72 no terminan el primer grado. Más de la mitad de las escuelas no ofrecen más que al tercer grado y la mitad sólo tiene un maestro para todos los cursos que imparten. Hay cifras muy altas, ocultas por cierto, de deserción escolar de niños indígenas debido a la necesidad de incorporar al niño a la explotación. En cualquier comunidad indígena es común ver a niños en horas de escuela cargando leña o maíz, cocinando o lavando ropa. De 16 mil 58 aulas que había en 1989, sólo mil 96 estaban en zonas indígenas.

¿Industria? Vea usted: el 40 por ciento de la "industria" chiapaneca es de molinos de nixtamal, de tortillas y de muebles de madera. La gran empresa, el o.2 por ciento, es del Estado mexicano (y pronto del extranjero) y la forman el petróleo y la electricidad. La mediana industria, el 0.4 por ciento, está formada por ingenios azucareros, procesadoras de pescados y mariscos, harina, calhidra, leche y café. El 94.8 por ciento es microindustria.

La salud de los chiapanecos es un claro ejemplo de la huella capitalista: un millón y medio de personas no disponen de servicio médico alguno. Hay 0.2 consultorios por cada mil habitantes, cinco veces menos que el promedio nacional; hay 0.3 camas de hospital por cada mil chiapanecos, tres veces menos que en el resto de México; hay un quirófano por cada 100 mil habitantes, dos veces menos que en el país; hay 0.5 médicos y 0.4 enfermeras por cada mil personas, dos veces menos que el promedio nacional.

Salud y alimentación van de la mano en la pobreza. El 54 por ciento de la población chiapaneca está desnutrida y en la región de los altos y la selva este porcentaje de hambre supera el 80 por ciento. El alimento promedio de un campesino es: café, pozol, tortilla y frijol.
Todo esto deja el capitalismo en pago por lo que se lleva...

Fragmento extraído de. Subcomandante insurgente Marcos. *Chiapas: el Sureste en dos vientos, una tormenta y una profecía.* Viento primero, *El de Arriba*, capítulo primero. Selva Lacandona: agosto de 1992.

Actividades para el alumno

1. El texto se titula *¿Qué deja la bestia a cambio de todo lo que se lleva?*, ¿a quién o qué se refiere y por qué?
2. Localiza y subraya las ideas principales del texto y discútelas brevemente con tus compañeros.
3. Investiga la información general del autor del texto y la participación del Ejército Zapatista de Liberación Nacional en la Historia de México.
4. Finalmente, reflexiona, ¿cuál es tu opinión general de la lectura?, fundamentalmente en su estilo e ideas centrales.

Lee atentamente el siguiente fragmento texto, asimismo, analiza y discute los planteamientos que se proponen a continuación.

De dónde estamos ahora

(...) Y entonces resulta que el capitalismo de ahora no es igual que antes, que están los ricos 7contentos explotando a los trabajadores en sus países, sino que ahora está en un paso que se llama Globalización Neoliberal. Esta globalización quiere decir que ya no sólo en un país dominan a los trabajadores o en varios, sino que los capitalistas tratan de dominar todo en todo el mundo. Y entonces al mundo, o sea al planeta Tierra, también se le dice que es el "globo terráqueo" y por eso se dice "globalización" o sea todo el mundo.

Y el neoliberalismo pues es la idea de que el capitalismo está libre para dominar todo el mundo y ni modos, pues hay que resignarse y conformarse y no hacer bulla, o sea no rebelarse. O sea que el neoliberalismo es como la teoría, el plan pues, de la globalización capitalista. Y el neoliberalismo tiene sus planes económicos, políticos, militares y culturales. En todos esos planes de lo que se trata es de dominar a todos, y el que no obedece pues lo reprimen o lo apartan para que no pasa sus ideas de rebelión a otros.

Entonces, en la globalización neoliberal, los grandes capitalistas que viven en los países que son poderosos, como Estados Unidos, quieren que todo el mundo se hace como una gran empresa donde se producen mercancías y como un gran mercado. Un mercado mundial, un mercado para comprar y vender todo lo del mundo y para esconder toda la explotación de todo el mundo. Entonces los capitalistas globalizados se meten a todos lados, o sea a todos los países, para hacer sus grandes negocios o sea sus grandes explotaciones. Y entonces no respetan nada y se meten como quiera. O sea que como que hacen una conquista de otros países. Por eso los zapatistas decimos que la globalización neoliberal es una guerra de conquista de todo el mundo, una guerra mundial, una guerra que hace el capitalismo para dominar mundialmente. Y entonces esa conquista a veces es con ejércitos que invaden un país y a la fuerza lo conquistan. Pero a veces es con la economía,o sea que los grandes capitalistas meten su dinero en otro país o le prestan dinero, pero con la condición de que obedezca lo que ellos dicen. Y también se meten con sus ideas, o sea con la cultura capitalista que es la cultura de la mercancía, de la ganancia, del mercado.

Entonces el que hace la conquista, el capitalismo, hace como quiere, o sea que destruye y cambia lo que no le gusta y elimina lo que le estorba. Por ejemplo le estorban los que no producen ni compran ni venden las mercancías de la modernidad, o los que se rebelan a ese orden. Y a esos que no le sirven, pues los desprecia. Por eso los indígenas estorban a la globalización neoliberal y por eso los desprecian y los quieren eliminar. Y el capitalismo neoliberal también quita las leyes que no lo dejan hacer muchas explotaciones y tener muchas ganancias. Por ejemplo imponen que todo se pueda comprar y vender, y como el capitalismo tiene el dinero, pues lo compra todo. Entonces como que el capitalismo destruye a los países que conquista con la globalización neoliberal, pero también como que quiere volver a acomodar todo o hacerlo de nuevo pero a su modo, o sea de modo que lo beneficie y sin lo que le estorba. Entonces la globalización neoliberal, o sea la capitalista, destruye lo que hay en esos países, destruye su cultura, su idioma, su sistema económico, su sistema político, y también destruye los modos en que se relacionan los que viven en ese país. O sea que queda destruido todo lo que hace que un país sea un país.

Entonces la globalización neoliberal quiere destruir a las Naciones del mundo y que sólo queda una sola Nación o país, o sea el país del dinero, del capital. Y el capitalismo quiere entonces que todo sea como él quiere, o sea según su modo, y lo que es diferente pues no le gusta, y lo persigue, y lo ataca, o lo aparta en un rincón y hace como que no existe.

Entonces, como quien dice que resumiendo, el capitalismo de la globalización neoliberal se basa en la explotación, el despojo, el desprecio y la represión a los que no se dejan. O sea igual que antes, pero ahora globalizado, mundial.

Pero no es tan fácil para la globalización neoliberal, porque los explotados de cada país pues no se conforman y no dicen que ya ni modo, sino que se rebelan; y los que sobran y estorban pues se resisten y no se dejan ser eliminados. Y entonces por eso vemos que en todo el mundo los que están jodidos se hacen resistencias para

no dejarse, o sea que se rebelan, y no sólo en un país sino que donde quiera abundan, o sea que, así como hay una globalización neoliberal, hay una globalización de la rebeldía.

Y en esta globalización de la rebeldía no sólo aparecen los trabajadores del campo y dé la ciudad, sino que también aparecen otros y otras que mucho los persiguen y desprecian por lo mismo de que no se dejan dominar, como son las mujeres, los jóvenes, los indígenas, los homosexuales, lesbianas, transexuales, los migrantes, y muchos otros grupos que de por sí hay en todo el mundo pero que no vemos hasta que gritan que ya basta de que los desprecien, y se levantan, y pues ya los vemos, y los oímos, y los aprendemos.

Y entonces nosotros vemos que todos esos grupos de gente están luchando contra el neoliberalismo, o sea contra el plan de la globalización capitalista, y están luchando por la humanidad.

Y todo esto que vemos nos produce gran asombro por ver la estupidez de los neoliberalistas que quieren destruir toda la humanidad con sus guerras y explotaciones, pero también nos produce gran contento ver que donde quiera salen resistencias y rebeldías, así como la nuestra que es un poco pequeña pero aquí estamos. Y vemos todo esto en todo mundo y ya nuestro corazón aprende que no estamos solos.

Fragmento extraido de. *Sexta Declaración de la Selva Lacandona.*

Actividades para el alumno

1. ¿Cómo define el texto a la globalización y al neoliberalismo?
2. Considerando tus conocimientos previos y la explicación del neoliberalismo que proporciona el texto, ¿cuáles son algunas de las consecuencias negativas de la llamada globalización neoliberal?
3. Investiga que es la Sexta Declaración de la Selva Lacandona y reflexiona ¿por qué consideras que el texto señala que los indígenas estorban a la globalización neoliberal? Da al menos tres ideas de la lectura que sustenten este planteamiento.

Responde adecuadamente los siguientes reactivos.

1. Proceso en el que existe un mayor nivel de producción nacional y mejores condiciones de vida:
   a) crecimiento
   b) crisis
   c) desarrollo
   d) recesión

2. Acontecimiento histórico que prevaleció en la sociedad internacional durante la segunda posguerra.
   a) Guerra Fría
   b) Revolución Mexicana
   c) Desarrollo económico
   d) Crisis económica

3. El financiamiento del FMI se mide en:
   a) DEGS
   b) Dólares
   c) Euros
   d) Cartas de crédito

4. Proceso mediante el cual diversos países pertenecientes a un mismo continente o región se integran para alcanzar objetivos en común.
   a) Globalización
   b) Internacionalización
   c) Regionalización
   d) Unificación

Entorno socioeconómico de México en los siglos XX y XXI

3

Propósito: el alumno reconocerá la importancia del entorno socioeconómico de México en los siglos XX y XXI

La política de sustitución de importaciones

En México, el lapso que comprendió entre 1940 y 1970 se caracterizó por un importante desarrollo económico, por lo que se conoció como ***Milagro mexicano***. Dicho periodo abarcó los gobiernos de los siguientes presidentes: Manuel Ávila Camacho, Miguel Alemán, Adolfo Ruiz Cortines, Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz. No obstante, la transformación nacional no sólo se dio en el ámbito económico, sino que comprendió importantes movimientos y factores sociales. Por ejemplo, el crecimiento poblacional en general, y en las ciudades en particular, así como sublevaciones de ferrocarrileros, médicos y, por supuesto, estudiantes. Este crecimiento, que no había experimentado nunca antes el país, implicó la combinación de **factores económicos, políticos y sociales, éstos son los principales**:

Nacionalización del petróleo	Apertura de mercados internacionales después de la Segunda Guerra Mundial	Estabilidad política y económica en la era del PRI (A partir de 1946)

Entre las características primordiales de este periodo económico en la vida nacional, sobresalen:

- Desarrollo de un capitalismo dependiente y de gran control estatal.
- Política de **sustitución de importaciones** que fortaleció al mercado interno.
- Estado promotor del crecimiento que subsidió a la clase empresarial con un cobro muy reducido de impuestos, y con el impulso de una importante infraestructura industrial.
- Régimen de exportaciones de materias primas, de fuerza de trabajo y de manufacturas mexicanas.
- Disminución de apoyo a la agricultura y transferencia de subsidios, capitales del campo a la industria y mayor inversión en ésta.
- Ritmo sostenido de la economía entre 6% y 8% anual.
- Deuda externa moderada, control de la inflación y parcialmente de la devaluación monetaria (aunque en 1954, la cotización del dólar pasó de $8.65 a $12.50 pesos mexicanos).
- Políticas de beneficio social, pero principalmente concentradas en grandes metrópolis: Guadalajara, Monterrey y ciudad de México, aunadas al crecimiento poblacional.

En este contexto, el Estado mexicano políticamente se caracterizó por ser presidencial, corporativo y autoritario. Aunque el desarrollo económico y el control político centralizado produjeron un contexto social estable, éste se fue transformando paulatinamente en cuanto la clase media comenzó a crecer, por lo que el control político se complicó. En este sentido, los conflictos sindicales se agudizaron y el régimen los resolvía de forma cada vez más represiva

El desarrollo estabilizador

Si bien es cierto que la economía mexicana experimentó el comportamiento ya descrito, también es verdad que a partir de 1954 manifestó los primeros síntomas de agotamiento, al suscitarse la devaluación de la moneda nacional y al incrementarse la inflación. La estrategia del Estado para amortiguar los efectos que estos factores ejercieron sobre la producción, el mercado y las finanzas se conoce como la política de **desarrollo estabilizador**, que logró impulsar el crecimiento y aminorar la intranquilidad social hasta 1970, cuando la caída de las exportaciones de México provocó un definitivo final del *Milagro mexicano*.

Entre 1958 y 1968, en México se presentaron varios movimientos sociales, como consecuencia de los desajustes estructurales en la economía nacional, tales como la inflación y la devaluación, pero también como resultado de una lenta descomposición social, ya que la concentración de la actividad económica y política en grandes ciudades contrastaba con la pobreza rural y la falta de servicios y beneficios en amplias zonas campesinas del país. Además, en la estructura social de México, la distribución de la riqueza generó otro

contraste, pues mientras que la clase empresarial mexicana –equivalente aproximado al 10% de la población– poco a poco iba acaparando más de 50% de la riqueza, los sectores laborales –campesinos, obreros y burocracia– enfrentaban las mayores carencias. No es de extrañar que, a pesar del crecimiento vigoroso de la economía en el marco del *Milagro mexicano*, en México fueran surgiendo gradualmente signos de descomposición social y política, misma que manifestó dos tendencias:

Expresiones clandestinas y armadas en forma de Guerrilla: Lucio Cabañas Genaro Vázquez	Movilizaciones y huelgas de sectores sociales campesinos y urbanos

Entre los principales movimientos sociales no armados que se gestaron en México en tiempos del desarrollo estabilizador, sobresalen en orden cronológico los siguientes.

- 1958: La huelga de trabajadores de la industria ferrocarrilera.
- 1961: Huelga de maestros normalistas.
- 1965: Huelga de médicos.
- 1968: Movimiento estudiantil en la UNAM y otras instituciones de educación pública.

La respuesta del Estado que distinguió a los gobiernos del desarrollo estabilizador fue el endurecimiento de los mecanismos represivos, lo cual representó un Estado antidemocrático con tendencia militarizada.

Apertura económica

Al agotarse el modelo de crecimiento conocido como *Milagro mexicano,* la economía del país quedó inmersa en una **severa crisis** en la que se combinaban factores muy graves:

- Caída del Producto Interno Bruto (PIB) y de las exportaciones.
- Incremento desorbitado de la deuda externa y devaluación monetaria.
- Tendencias inflacionarias y desempleo.
- Malestar social, movimientos campesinos y urbanos.

Las acciones del Estado para enfrentar las dificultades se basó en una triple estrategia. El gobierno de **Luis Echeverría** implementó un nuevo modelo económico, llamado c**recimiento compartido**, el cual combinó el incremento de impuestos a sectores de clase media y a los empresarios, así como la creación de empresas de participación estatal: las paraestatales.

También el presidente Echeverría inició una apertura democrática, buscando una cierta negociación con la izquierda mexicana para no incursionar en el camino de la movilización radical, como lo era la guerrilla urbana. Para lograr esa apertura democrática se promovió el registro oficial del Partido Comunista de México, de tal forma que éste pudiera postular candidatos a puestos de gobierno. No obstante, también se implementó la llamada *Guerra sucia*, contraparte de la apertura democrática, para enfrentar a las expresiones más radicales mediante el exterminio y la represión sistemática.

El siguiente gobierno, el de **José López Portillo**, procuró levantar la economía mediante una fuerte orientación del crecimiento con base en el auge petrolero que se suscitó a inicios de 1980. La exportación del petróleo mexicano hizo posible un efímero fortalecimiento de la productividad en México; López Portillo también fomentó el desarrollo agrícola del país al crear la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (SARH) y el Sistema Alimentario Mexicano (SAM).

De forma generalizada, a finales de la década de 1970, el petróleo era considerado el nuevo eje para el crecimiento económico. La exportación de otros productos se estancó y prácticamente la economía mexicana dependía de la exportación petrolera, además existió una inadecuada planeación del uso de los recursos que el sector petrolero le generaba al país.

En 1981, los precios del petróleo disminuyeron y esto produjo una gran reducción de divisas. México se endeudó en exceso y al contar con una economía dependiente de la exportación petrolera, con Estados Unidos

como prácticamente único mercado y con una creciente deuda externa, el petróleo dejó de ser el garante del desarrollo económico. La repentina caída de precios de los hidrocarburos en los mercados mundiales, provocó la ruina de la economía mexicana, el endeudamiento, devaluaciones y desajustes inflacionarios combinados con desempleo. López Portillo concluyó su mandato decretando la nacionalización de la Banca, para evitar una mayor fuga de divisas.

Para enfrentar el recrudecimiento de la crisis económica del país, los siguientes gobiernos tuvieron que practicar una nueva estrategia: la **apertura comercial**. Se conocen como **gobiernos tecnócratas** a toda la serie de mandatos que implementaron y motivaron esta apertura de la economía mexicana en el marco del neoliberalismo: **Miguel de la Madrid Hurtado, Carlos Salinas de Gortari** y **Ernesto Zedillo Ponce de León**.

La política neoliberal que distingue a la economía de todo el mundo en el contexto de la actual globalización tiene como principales signos la apertura de mercados mediante la eliminación de fronteras comerciales y arancelarias, la formación de bloques económicos regionales como el TLCAN o la la Unión Europea; liderazgo económico y financiero de grades organismos como son la Banca Mundial, el Fondo Monetario Internacional y la Organización Mundial del Comercio.

Modelo de desarrollo compartido (*economía mixta*), populismo y *petrolización*

<table>
<tr>
<td>Gobierno de Luis Echeverría Álvarez (1970-1976)
</td>
<td>

Durante el sexenio de Echeverría Álvarez, México adoptó el modelo económico de crecimiento compartido o economía mixta, por lo que se apoyó en el endeudamiento externo.
Luis Echeverría incorporó diversas industrias al Estado (paraestatales), creó una serie de organismos públicos y se fomentó la burocracia.
Favoreció la asistencia social y, dentro de esta tónica, se creó el Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (INFONAVIT), en 1973.
Luis Echeverría fue partícipe nuevamente de la represión estudiantil, esta vez ocurrida el 10 de junio de 1971, y después en la llamada guerra sucia. No obstante, oficialmente incorporó en su gobierno a intelectuales y líderes del movimiento estudiantil de 1968, intentando una conciliación con la izquierda.
El gobierno de Echeverría declaró su apoyo a los gobiernos socialistas de Fidel Castro, en Cuba, y Salvador Allende, en Chile, por lo que ofreció asilo político a refugiados chilenos después del golpe de Estado en ese país latinoamericano.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Gobierno de José López Portillo (1976-1982)
</td>
<td>

Su régimen fomentó un auge petrolero, pero mal administrado.
Realizó la reforma política que buscaba controlar la actividad clandestina del Partido Comunista Mexicano y de grupos guerrilleros.
Incorporó el sistema de candidatos plurinominales, para reconocer a la oposición en el Congreso.
Generó deuda externa, desempleo e inflación. En 1982, nacionalizó la Banca para detener la fuga de divisas y se devaluó la moneda.

</td>
</tr>
</table>

Los gobiernos *tecnócratas* y la adopción del modelo económico neoliberal en México

Gobierno de Miguel de la Madrid Hurtado (1982-1988) 	• Durante su administración se adoptó el modelo neoliberal que favorecía la apertura comercial hacia el capital foráneo. • Sus lemas fueron: renovación moral y reconversión industrial. • Reprivatizó la Banca y fomentó la inversión petrolera. • En 1985, la ciudad de México sufre un fuerte terremoto. • En 1986, México ingresa al Acuerdo General sobre Aranceles y Comercio (GATT), organismo antecesor de la Organización Mundial del Comercio (OMC).
Gobierno de Carlos Salinas de Gortari (1988-1994) 	• El ex presidente Carlos Salinas enfrentó críticas por *la caída del sistema de cómputo*, en las elecciones federales de 1988. • Creó el Plan Nacional de Desarrollo e instituyó el Programa Nacional de Solidaridad (PRONASOL), el cual no logró paliar la pobreza. • Fomentó la inversión extranjera, sobre todo en la Banca, y abandonó el modelo de crecimiento basado en las paraestatales e inició el proceso de privatización. • Reformó la Constitución para restablecer las relaciones entre Estado e Iglesia y finalizar el reparto agrario. • En 1989, Cuauhtémoc Cárdenas Solórzano fue fundador principal del Partido de la Revolución Democrática (PRD). • En 1990, Salinas de Gortari reprivatizó Teléfonos de México (TELMEX), creó el Instituto Federal Electoral (IFE) y el Fondo Bancario de Protección al Ahorro (FOBAPROA). • Fueron asesinados durante su gestión: El 1° de octubre de 1989, Manuel J. Clouthier, ex candidato presidencial de 1988 por el Partido Acción Nacional (PAN). En 1994, el 23 de marzo, Luis Donaldo Colosio, candidato presidencial por el Partido Revolucionario Institucional (PRI) y el 28 de septiembre, José Francisco Ruiz Massieu, secretario general del PRI. • El 1° de enero de 1994 se inició en Chiapas el levantamiento armado del Ejército Zapatista de Liberación Nacional (EZLN),.y entró en vigor el Tratado de Libre Comercio (TLCAN) con Estados Unidos y Canadá. • En el mismo año, México ingresó a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).
Gobierno de Ernesto Zedillo Ponce de León (1994-2000) 	• El ex presidente Ponce de León llegó a la presidencia en medio de un clima electoral de abstencionismo y tensión general, sobre todo por los asesinatos de Colosio y Ruiz Massieu, en 1994. • En diciembre de 1994, devaluó la moneda porque se presentó una grave crisis económica, conocida como *error de diciembre*. Se llamó *efecto tequila* a las consecuencias internacionales de dicha crisis. • En abril de 1995, creó la Unidad de Inversión (UDI) con el objetivo de disminuir el impacto de la inflación en las operaciones financieras y comerciales. • En febrero de 1996, firmó con la guerrilla zapatista los Acuerdos de San Andrés Larráinzar, convenios que constituían el compromiso del gobierno para modificar la Constitución y reconocer los derechos de los pueblos indígenas, medidas que no se han llevado a cabo aún, tal cual fueron pactadas en San Andrés Larráinzar. • El 22 de diciembre de 1997 ocurre la Matanza de Acteal, Chiapas, por parte de grupos paramilitares en contra de indígenas simpatizantes del zapatismo. • En diciembre de 1998, creó el Instituto para la Protección del Ahorro Bancario (IPAB). • En febrero del 2000, ordenó la intervención de la Policía Federal Preventiva (PFP) en las instalaciones universitarias, para terminar con la huelga más larga en la historia de la UNAM, protesta que se realizó en contra del llamado *plan Barnés* que buscaba modificar el reglamento general de pagos, así como condicionar el promedio y tiempo de los estudiantes universitarios para acceder al *pase automático* del bachillerato a la licenciatura.

Gobierno de Vicente Fox Quesada (2000-2006) 	• Las elecciones del año 2000 fueron identificadas con la transparencia, por lo que el ex presidente Fox Quesada ganó legitimidad al llegar al poder porque fue el primer presidente panista de la historia de México, cuyo triunfo representó la derrota priísta; el PRI se mantuvo en el poder por más de 70 años. • Promovió la aplicación del Impuesto al Valor Agregado (IVA) para artículos de primera necesidad, como alimentos y medicinas, así como una política similar en la industria editorial, medidas que atrajeron el rechazo popular. • Durante su gestión se agudizaron las problemáticas del secuestro y el narcotráfico, prácticas iniciadas desde los regímenes priístas antecesores. • En 2004, la administración foxista promovió un juicio de desafuero (que suprime privilegios de su cargo) contra Andrés Manuel López Obrador, quien había sido electo jefe de gobierno del Distrito Federal, en el año 2000, después de que, por primera vez, en 1997 se realizaran elecciones para ocupar ese cargo en la capital del país y resultara electo el perredista Cuauhtémoc Cárdenas y, posteriormente, Rosario Robles. • En mayo de 2004, por un tiempo breve México rompió relaciones con Cuba por conflictos diplomáticos entre los mandatarios de ambos países, ocurridos en la Cumbre de las Américas realizada en Monterrey, Nuevo León, en enero del mismo año en el país, con la intención, entre otras, de verificar los avances para el establecimiento de un Área de Libre Comercio de las Américas (ALCA). • En abril de 2006 se dio a conocer la llamada *Ley Televisa*, y en mayo del mismo año la sección 22 del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE) emplazó a huelga por motivos salariales y magisteriales.
Gobierno de Felipe Calderón Hinojosa (2006 - 2012) 	• El 2 de julio de 2006, el actual presidente de México, Felipe Calderón (PAN), obtuvo el triunfo de las elecciones federales, uno de los comicios presidenciales más competidos y controversiales de la historia del país, ya que fueron impugnados por la oposición, encabezada por Andrés Manuel López Obrador (PRD y *Coalición por el Bien de Todos*). El 1º de diciembre del mismo año, Calderón Hinojosa tomó protesta como presidente. • La administración de Calderón anunció desde su inicio, un álgido combate al narcotráfico y la búsqueda del fortalecimiento de la seguridad nacional. • Realizó importantes cambios en materia fiscal, energética (petrolera y energía eléctrica) y en la Ley del ISSSTE, reformas que buscan promover medidas neoliberales en empresas públicas.

Ejercicios

Responde correctamente los siguientes cuestionamientos.

1. Una de las principales repercusiones económicas que sufrió nuestro país, después de la Segunda Guerra Mundial.
   a) Comenzó un proceso de industrialización
   b) Se transfirieron recursos económicos de la ciudad al campo
   c) Se devaluó la moneda mexicana
   d) Se acabó la dependencia con Estados Unidos

2. Entre las décadas de 1940 y 1970, México se caracterizó por tener una economía estable y en crecimiento, con gran intervención estatal y que buscaba fortalecer al mercado interno y a la industria nacional. ¿Cómo se le conoce a dicho periodo?
   a) Estabilización de la economía
   b) Sustitución económica
   c) Neoliberalismo
   d) Milagro mexicano

3. Señala una característica del llamado *Milagro mexicano*.
   a) México se convirtió en la economía más estable de América
   b) Transferencia de subsidios del campo a la industria
   c) El Estado mexicano prohibió el pago de su deuda externa
   d) El gobierno estatal exentó a la población del pago de impuestos

4. El *Milagro Mexicano* es el nombre de un fenómeno económico que se caracterizó por:
   a) una salida permanente de las crisis
   b) una política que fortaleció la industria y el comercio
   c) enfocarse en la explotación del petróleo
   d) la sustitución del papel moneda por la plata

5. ¿Cuál es el nombre de la política que a partir de 1940 permitió en México el crecimiento de la industria y sus niveles de producción?
   a) Globalización
   b) Tercera vía
   c) Nuevo Trato
   d) Sustitución de importaciones

Respuestas de los ejercicios de Entorno socioeconómico de México

Unidad 1

1. b	2. d	3. c	4. c	5. a	6. c

Unidad 2

1. c	2. a	3. a	4. c

Unidad 3

1. a	2. d	3. b	4. b	5. d

Bibliografía

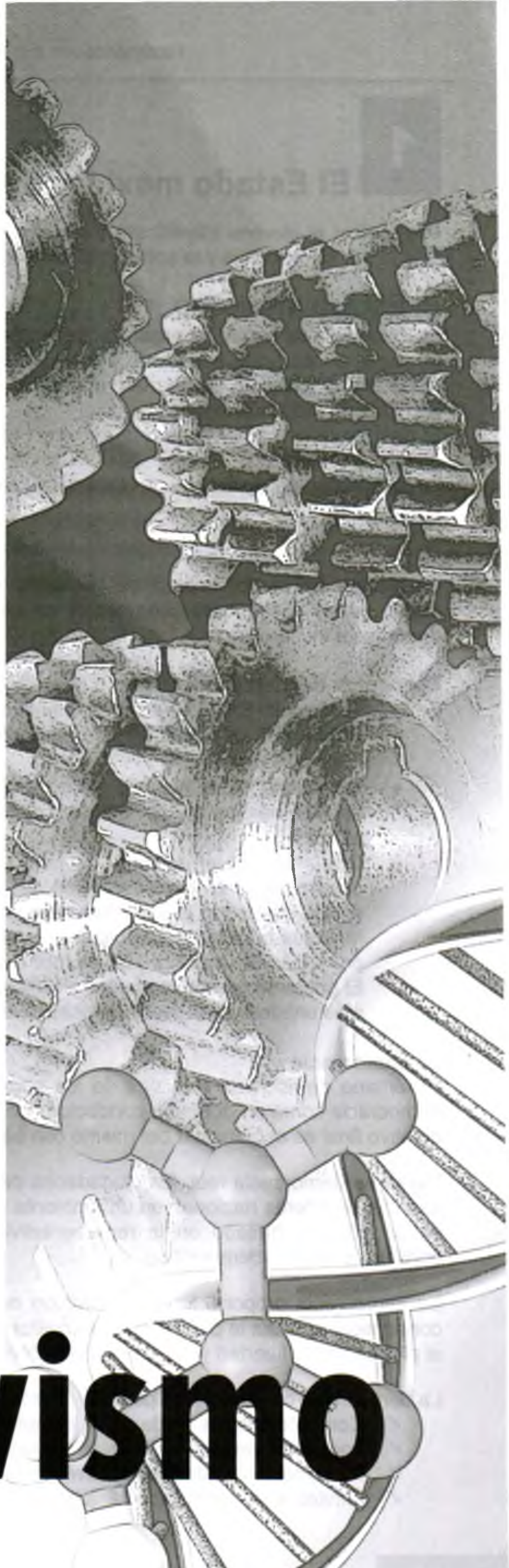
ABBAGNANO, Nicola. *Diccionario de filosofía*. México: Fondo de Cultura Económica, 1987.
ANDA Gutiérrez, Cuauhtémoc. *Introducción a las ciencias sociales.* 3ª ed. México: Limusa, 2005.
BROM, Juan. *Esbozo de Historia de México.* México: Grijalbo, 1998.
DELGADILLO Díaz Leal, Lourdes G. *El neoliberalismo y el descontento social en la globalización: el caso del EZLN en la lucha indígena en México (1994-2006)*. Tesis de Licenciatura. México: Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Aragón, 2008.
DELGADO de Cantú, Gloria M. *Historia Universal. De la era de las revoluciones al mundo globalizado.* 2ª ed. México: Pearson, 2006.
DI TELLA, Torcuato S. *Diccionario de ciencias sociales y políticas.* Argentina: Emecé Editores, 2001.
EL COLEGIO DE MÉXICO (COLMEX). *Nueva Historia mínima de México.* México: COLMEX, Centro de Estudios Históricos, 2004.
GALLO T. Miguel Ángel y Humberto Ruiz Ocampo. *Estructura Socioeconómica de México I (1910-1970).* México: Quinto Sol, 2007.
GUTIÉRREZ Rodríguez, Antonio. Ciencias sociales. *Una introducción a las disciplinas del hombre*. 2ª ed. México: Edére, 2005.
IANNI, Octavio. *Teorías de la globalización*. México: Siglo XXI, 1996.
MÉNDEZ M., José Silvestre. *Problemas Económicos de México.* 5ª ed. México: McGraw-Hill, 2003.
SÁNCHEZ, Córdova Humberto y otros. *Historia de México II. Un enfoque constructivista*. México: Pearson, 2008.
SCHETTINO Yáñez, Macario. *México. Problemas sociales, políticos y económicos*. México: Pearson, 2002.

Referencias de Internet:

www.biografiasyvidas.com
www.google.com (Librería de imágenes).

Unidad 1 El Estado mexicano
1. Elementos del Estado mexicano
2. La República Mexicana

Unidad 2 Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos
1. Organización de la Constitución Política



Civismo

1 El Estado mexicano

Propósito: el alumno identificará los elementos que componen al Estado Mexicano, las características de la democracia y la soberanía, así como los componentes de la República Mexicana.

El Estado mexicano

El Estado es la forma de organización social dentro de cierto territorio, en situación soberana, y regula la vida común de los ciudadanos, quienes conforman el pueblo, a través de un conjunto de instituciones.
El país se refiere al territorio que forma un espacio geográfico, político y cultural.
La diferencia entre Estado y Nación radica en el elemento poblacional.



La Nación es la comunidad de personas unidas por motivos de raza, lengua, religión, historia, cultura, tradiciones o costumbres comunes, y es regida por un gobierno, el cual está formado por un conjunto de personas e instituciones.

Elementos del Estado mexicano
En la actualidad, el Estado mexicano cuenta con tres elementos esenciales:

- **Población:** es el elemento humano del Estado, la sociedad o comunidad que se encuentra unida y que habita un territorio.
- **Territorio:** es el espacio físico, geográfico o límites espaciales del Estado. Abarca suelo, subsuelo, espacio aéreo y aguas. En México, el Estado es dueño de los recursos naturales del subsuelo, como el petróleo.
- **Gobierno:** es el conjunto de personas e instituciones que ejercen el poder público por un periodo determinado, en representación del pueblo soberano. El gobierno norma todos los actos de la vida social, desde los económicos hasta los culturales, como organizar el quehacer público, administrar los recursos públicos y garantizar el respeto a los derechos humanos, ya sea por medio de instituciones o por el uso de la fuerza pública, por ello cuenta con cuerpos de seguridad y un ejército.
  El gobierno tiene tres niveles en México: federal o nacional, estatal o local y municipal (este último es el más próximo a las problemáticas ciudadanas).

La democracia
El término democracia proviene de los vocablos griegos demos, *pueblo* y kratos, *autoridad*. Se define a la democracia como un *gobierno conducido con el consentimiento libremente otorgado por el pueblo*, por lo que su objetivo final es el bienestar del mismo con base en el principio de igualdad.

Para una democracia real, los ciudadanos deben tener la posibilidad de expresar sus ideas y participar en los asuntos de interés nacional, en un ambiente de respeto a la diversidad y la pluralidad. La democracia moderna es un proceso basado en la representatividad a través del ejercicio del sufragio o voto popular, lo cual constituye un acto democrático.

La democracia propone límites y división del poder de los gobernantes, realiza elecciones periódicas, crea consensos, propicia la participación ciudadana y el diálogo; asimismo busca la justicia social, practica la justicia, el pluralismo, la libertad y la igualdad de derechos, y promueve el respeto a los derechos humanos.

La democracia como sistema político y forma de gobierno tiene cuatro pilares fundamentales:

- ✓ Competencia: los ciudadanos compiten por cargos en el poder público.
- ✓ Legalidad: respeto a las leyes y a los derechos humanos.
- ✓ Participación ciudadana a través del voto.
- ✓ Límites al poder público: el gobierno democrático se divide en tres poderes.

Todos los procedimientos de la democracia se llevan a cabo con base en tres principios:



- **Principio de la mayoría:** cuando se realizan elecciones populares y se obtienen los resultados, la opción que tiene el mayor número de votos es la que representa legalmente el sentir de los demás, el bien común y lo que beneficia a más personas.
- **Principio de las minorías:** es la opción u opciones que obtuvieron menos votos en la elección, pero también se toman en cuenta sus opiniones y necesidades.
- **Ejercicio de la soberanía popular:** el único soberano legítimo en la democracia es el pueblo, es decir, los ciudadanos son los que ejercen o poseen la autoridad suprema e independiente.

Las características del voto democrático son: universalidad (todos los ciudadanos tienen derecho a votar sin importar su raza, credo, sexo, posición económica, condición social o profesión); igualdad (todos lo votos tienen el mismo valor), y es secreto (la decisión de cada ciudadano no debe darse a conocer). Es derecho del ciudadano ejercer su voto sin la intervención, influencia o presión de terceros. El requisito indispensable de este derecho es contar con la credencial de elector.

La participación y organización de las elecciones por parte del IFE, le otorgan legitimidad al proceso electoral, al mismo tiempo de proporcionar certeza a los partidos políticos y a los ciudadanos, debido a que este organismo es autónomo y promueve la participación de los mexicanos en el proceso.
Otro aspecto de legitimidad de las elecciones es la emisión de un voto libre y sustentado, ello se logra cuando la ciudadanía está informada de las diferentes propuestas políticas de los partidos.
La democracia, además de ser un sistema de gobierno, es una forma de vida y de organizar la sociedad, ya que valores como la libertad, igualdad o justicia se aplican en la vida diaria cuando se toman decisiones, se resuelven conflictos y se ejerce la autoridad.

Principio de soberanía
En México, el artículo 39 constitucional señala que la soberanía nacional reside en el pueblo, quien elige periódicamente a sus representantes en el gobierno, dividido en Poder Ejecutivo, Legislativo y Judicial.
La soberanía popular es un principio básico de la democracia, pues el pueblo designa a un integrante igual para que ejerza el poder público y tome decisiones para el bien de la sociedad, además de rendir cuentas del ejercicio del poder al pueblo.

Por otro lado, la soberanía también se aplica en las relaciones internacionales para expresar la independencia en los asuntos internos de un Estado (no injerencia) e igualdad frente a otros, es decir, que un pueblo tiene la capacidad para autogobernarse y ningún país puede intervenir en asuntos nacionales de otro. México, por ejemplo, es el único facultado para atender y resolver sus problemas, elegir su forma de gobierno y administrar los recursos que posee.

Partidos políticos: mecanismos de representación ciudadana
La democracia representativa en México funciona gracias a instituciones y procedimientos establecidos en la ley, como los partidos políticos y las elecciones, por medio de los cuales el pueblo ejerce su voluntad a través de representantes.

Los partidos políticos son organizaciones de ciudadanos que se reúnen libremente, que comparten una ideología y proyecto político, y buscan llegar al gobierno por medio del apoyo de la ciudadanía en las elecciones.

En México, una organización debe cumplir con ciertos requisitos para ser partido político, por ejemplo, contar con una declaración de principios y un programa de acción, tener 3 000 afiliados en al menos 10 estados, o bien, 300 afiliados en 100 distritos electorales.

Una vez cubiertos los requisitos, los partidos políticos deben registrarse ante el Instituto Federal Electoral (IFE) y mantener mínimo 2% de los votos para poder conservar su registro. Estas organizaciones proponen a sus candidatos para participar en una contienda electoral, además comunican a la ciudadanía su postura política, económica y social.

En la Constitución, el artículo 41 señala que los partidos tienen por objetivo promover la participación ciudadana en la vida democrática, contribuir a la integración de la representación nacional, y facilitar el acceso de los ciudadanos al ejercicio del poder público.

Los partidos deben respetar normas y mecanismos de control, y cumplir con derechos y obligaciones. Entre sus derechos están recibir fondos públicos para su funcionamiento, organizarse libremente y formar alianzas o coaliciones.

La República Mexicana

El nombre oficial de nuestro país es Estados Unidos Mexicanos y su forma de gobierno es la República (proviene del latín *res pública,* que significa cosa pública o del pueblo).

Características de la República Mexicana

El artículo 40 de la Constitución Política Mexicana declara que es voluntad del pueblo mexicano constituirse en una República:

- **Representativa:** es imposible que todos los ciudadanos participen en los asuntos públicos, por ello ejercen su soberanía mediante diputados y senadores. Este carácter representativo constituye la democracia indirecta.
- **Democrática:** se basa en la pluralidad, la soberanía del pueblo, la división de poderes, la elección periódica de los representantes que, a partir de los 18 años, los mexicanos tienen derecho al voto para elegirlos y aspirar a ser elegido como representante.
- **Federal:** formada por la unión de estados libres y soberanos en sus regímenes internos, pero unidos en una federación con base en lo estipulado en la Constitución.

Federalismo

El federalismo es una forma de organizar el poder político y de estructurar al Estado. Contiene en su organización política y administrativa, por lo menos dos niveles de gobierno, cada uno con atribuciones y responsabilidades públicas.



El sistema político mexicano tiene entre sus características fundamentales el federalismo. La división política de México se compone de 32 entidades federativas, cada una con su gobierno y leyes propias pero subordinadas a la Constitución bajo el pacto de unión y fundamentos de la federación.

La capital del país es el Distrito Federal, sede de los Poderes de la Unión.

Componentes de la República Mexicana

Los componentes de la República son los Estados Federados y los Poderes de la Unión. El artículo 49 constitucional declara que los Poderes de la Unión están divididos en Ejecutivo (Presidencia de la República), Legislativo (Honorable Congreso de la Unión) y Judicial (Suprema Corte de Justicia de la Nación).

Poder Legislativo

La Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos señala que el Legislativo representa el poder del pueblo.

DIVISIÓN DE PODERES
El Supremo Poder de la Federación, se divide para su ejercicio en :



Poder Legislativo Poder Ejecutivo Poder Judicial

Se encarga de aprobar las propuestas e iniciativas de nuestro Presidente y le autoriza a éste poder salir del país, nombra los consejeros electorales federales, analiza la política exterior de México y aprueba tratados internacionales, ratifica los nombramientos del Procurador General de la República, Embajadores y Cónsules,

nombra a los Ministros de la Suprema Corte de Justicia, y al titular de la Comisión Nacional de los Derechos Humanos. El Legislativo está integrado por representantes de todas las fuerzas políticas del país, y se deposita en un Congreso General, el cual se divide en dos cámaras:

Cámara de Diputados
Integrada por 500 representantes de la Nación, electos en su totalidad cada tres años por los ciudadanos mexicanos. Trescientos son diputados uninominales y doscientos plurinominales. Sus principales facultades son: aprobar el Presupuesto de Egresos, revisar la Cuenta Pública, declarar si hay o no lugar a proceder penalmente en contra de los servidores públicos, y nombrar los consejeros electorales federales.

Cámara de Senadores
Está conformada por 128 legisladores de la Nación, electos en su totalidad cada seis años por los ciudadanos mexicanos. Sesenta y cuatro senadores (dos por estado), treinta y dos senadores (1ra. minoría) y treinta y dos más (representación proporcional). Sus principales facultades son: analizar la política exterior de México, aprobar los tratados internacionales, ratificar los nombramientos del Procurador General de la República, Embajadores y Cónsules, nombrar a los Ministros de la Suprema Corte de Justicia, y al titular de la Comisión Nacional de los Derechos Humanos.

Poder Ejecutivo: se deposita en una sola persona, el Presidente de los Estados Unidos Mexicanos y actualmente el cargo lo ocupa el licenciado Enrique Peña Nieto. La elección del Presidente es directa, es decir, por los ciudadanos mexicanos; comienza a ejercer su cargo el 1 de diciembre por un periodo de seis años y no podrá volver a desempeñarlo.
Entre las funciones del Presidente están ejecutar la ley, administrar los recursos del pueblo, impulsar el desarrollo social, garantizar el respeto a los derechos humanos, mantener la paz y el orden público, entre otras.
El Presidente de la República, para realizar sus atribuciones y funciones, tiene la facultad de nombrar a los miembros de su gabinete: los titulares de las secretarías de Estado, quienes son ratificados por el Congreso de la Unión.

Poder Judicial: se deposita en una Suprema Corte de Justicia de la Nación, en un Tribunal Electoral, en el Consejo de la Judicatura Federal, en Tribunales Colegiados y Unitarios de Circuito, y en Juzgados de Distrito.
La Suprema Corte de Justicia está integrada por once Ministros elegidos por el Senado. Cada cuatro años, el Pleno elige de entre sus miembros al Presidente de la Suprema Corte de Justicia de la Nación, quien no podrá ser reelecto para el siguiente periodo. Sus principales funciones son: interpretar y aplicar la ley, vigilar la supremacía de la Constitución Política, defender el Estado de derecho, juzgar casos de competencia federal, resolver controversias entre la Federación y los estados, de una ley constitucional o impugnaciones en elecciones federales; así como revisar y declarar valida la elección y al Presidente electo, y proteger a los ciudadanos contra violaciones a sus garantías por parte de la autoridad.

Por otro lado, los tres diferentes niveles de gobierno en México, el federal, el estatal y el municipal, tienen diferentes funciones:

- **Federal:** elabora el Plan Nacional de Desarrollo en donde se asignan recursos públicos para atender las principales problemáticas que aquejan a la población.
- **Estatal:** coopera con el federal en el cumplimiento de dichas funciones, procura la seguridad de la población de ese estado, y elabora leyes locales sin contradecir la Constitución.
- **Municipal:** es la división política más pequeña del Estado y es llamado también Ayuntamiento, el cual proporciona diferentes servicios a la comunidad, como el agua potable, alumbrado y seguridad públicos, entre otros. También elabora planes de desarrollo municipal y otorga diversos permisos a sus ciudadanos.

En el Distrito Federal, que no es un estado ni municipio, los capitalinos pueden elegir por sufragio universal al Jefe de Gobierno, aunque bajo el esquema de territorio de la federación; cuenta con otros órganos de gobierno, como la Asamblea Legislativa y el Tribunal Superior de Justicia.

Por otro lado, el poder público en cada entidad federativa está representado por un Gobernador, la Cámara de Diputados del Estado y el Poder Judicial del Estado. Cada estado también es libre de promulgar sus propias leyes en materia electoral, penal, civil, etcétera.
Los gobernadores son elegidos por votación directa, es decir, por medio del voto ciudadano libre y secreto, su cargo no puede durar más de seis años y no tienen posibilidad de volver a ocuparlo.

Constitución Política de ios Estados Unidos Mexicanos 2

Propósito: el alumno identificará la estructura de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, así como las garantías individuales de los mexicanos contenidas en la Constitución Política.


Congreso Constituyente

El respeto a las leyes es el principio básico del Estado de derecho. La Constitución es el conjunto de principios normativos, prioritarios y permanentes del Estado, es decir, las decisiones sobre su régimen y organización políticos, funciones de los poderes públicos, los derechos y obligaciones de los ciudadanos. Es la norma reguladora de la vida de un pueblo, protege y promueve la igualdad entre los ciudadanos, además de impartir la justicia.
La Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos actual se promulgó el 5 de febrero de 1917, consta de 136 artículos, y se le considera la Ley Suprema y Fundamental del Estado.

Los principios que la caracterizan son:

- **Supremacía.** Principio consagrado en el artículo 133, significa que toda ley se encuentra subordinada a la Constitución. Ésta es el ordenamiento primario, superior en la jerarquía de las leyes y no debe ser contrariada o violada.
- **Legalidad.** Todos los actos jurídicos serán válidos si están de acuerdo con la Constitución.
- **Inviolabilidad.** En el artículo 136 se expone el vigor y la fuerza imperativa de la Constitución.

Organización de la Constitución Política

El contenido del texto constitucional está dividido en nueve títulos que a continuación se presentan:

Capitulos	Artículos
Garantías individuales	1º - 29
De los mexicanos	30 - 38
Soberanía nacional y forma de gobierno	39 - 48
División de poderes	49 - 107
Responsabilidad de los funcionarios públicos	108 - 114
De los estados de la Federación	115 - 122
Del trabajo y de la previsión social	123
Previsiones generales	124 - 134
De las reformas a la Constitución	135
De la inviolabilidad de la Constitución	136

Derechos fundamentales de los ciudadanos

Los valores son la fuente de los derechos fundamentales del ser humano, conocidos como derechos humanos: conjunto de facultades y libertades que protegen las exigencias de la dignidad humana. Los derechos humanos son aspectos de la naturaleza humana, es decir, todos tienen derechos por el simple hecho de ser personas; son normas jurídicas porque el hombre necesita leyes que le permitan exigir el respeto de sus derechos, y son producto de la Historia, ya que la conciencia de la dignidad y las normas jurídicas han evolucionado.

Los derechos humanos poseen tres características básicas:

1. Universalidad. Pertenecen a todas las personas, sin importar su sexo, edad, posición social e ideológica, creencia religiosa, origen familiar o condición económica.
2. Incondicionabilidad. Están supeditados a los límites de los propios derechos, es decir, hasta donde comienzan los derechos de los demás o los justos intereses de la comunidad.
3. Inalienabilidad. Son inalienables porque no pueden perderse ni transferirse por propia voluntad.

Los derechos humanos son fuente de valor, pues representan la ética y criterios universales que orientan el actuar y el juicio de las personas, sus relaciones sociales y organización política; estos derechos son importantes debido a que se basan en ideales de dignidad y buscan proteger la vida, libertad, dignidad, igualdad, seguridad, integridad física, cultura y ambiente de los seres humanos.
Los derechos humanos tienen más fuerza al vincularse con la democracia. En consecuencia, los valores de la democracia y de los derechos humanos orientan la organización política en México.
Algunos derechos humanos son la autonomía, la libertad, la justicia social y el respeto a las diferencias culturales.

En la Constitución Política Mexicana, desde el artículo 1° hasta el 29 se estipulan las Garantías Individuales, y se reconocen derechos y libertades sociales:

- ✓ **Art. 1°.** Derecho a la libertad, aboliendo la esclavitud y otorgando libertad a cualquier individuo dentro del territorio nacional. Queda prohibida toda discriminación motivada por origen étnico o nacional, género, edad, discapacidades, condición social y de salud, religión, opiniones, entre otros.
- ✓ **Art. 3°.** Derecho a la educación, siendo ésta otorgada por el Estado de manera laica, gratuita y obligatoria.
- ✓ **Art. 6° y 7°.** Derecho a la libre expresión, asociación y tránsito, libertades esenciales de la nación mexicana.
- ✓ **Art. 9°.** Derecho de huelga y organización de los trabajadores en sindicatos.
- ✓ **Art. 10.** Derecho a la posesión de armas de fuego en su domicilio para seguridad y legítima defensa.
- ✓ **Art. 24.** Derecho a la libre profesión de cultos.

Además del artículo 3°, el 27 y 123 recogen las principales demandas sociales de los mexicanos:

- ✓ **Art. 27.** La propiedad de tierras y aguas corresponden a la nación, la cual se encarga del dominio y explotación de los recursos naturales.
- ✓ **Art. 123.** La jornada máxima de trabajo de ocho horas, se prohíbe trabajar a los menores de doce años, el pago de salario en moneda circulante legal, el Estado interviene directamente para defender los intereses del trabajador como clase patronal y libera al campesino de la esclavitud de la hacienda y del latifundio, otorgándole la propiedad de la tierra como un derecho.

La Constitución también incluye tratados, pactos y declaraciones internacionales en materia de derechos humanos que nuestro gobierno firmó y ratificó.
En México existen muchos casos en donde no se respetan los derechos y libertades, por ejemplo, entre personas (delito) o de una autoridad hacia una persona (violación a los derechos humanos).
Cuando es un delito, las instituciones y leyes establecen la pena a cumplir para el delincuente, y si son las autoridades las que violan los derechos y libertades, los ciudadanos están protegidos por medio del juicio de amparo y la queja ante las comisiones de derechos humanos.
Existen instituciones en todo el país que se encargan de proteger a los derechos humanos de los mexicanos, quienes pueden presentar una queja ante la Comisión Estatal de Derechos Humanos si una autoridad estatal viola los derechos de una persona o grupo, o ante la Comisión Nacional de los Derechos Humanos (CNDH) si es una autoridad federal quien realiza esta violación.

Los derechos humanos son reconocidos en leyes nacionales e internacionales:

- En 1776 se promulgó la Declaración de los Derechos del Hombre como consecuencia de la independencia de las Trece Colonias de Norteamérica.
- En 1789, paralelamente al triunfo de la Revolución Francesa, se publicó la Declaración de los Derechos del Hombre y del Ciudadano que reconocían las facultades del hombre como naturales, inalterables y sagradas.
- En diciembre de 1948 se estableció la Declaración Universal de Derechos Humanos, apoyada por 58 países, miembros de la Organización de las Naciones Unidas, entre los que se encuentra México; esta declaración tiene el objetivo de defender fundamentalmente la democracia, libertad, igualdad y justicia. Aborda una serie de derechos como al trabajo, la educación, al tiempo libre, la libertad de expresión, entre otros.

La defensa o la protección de los derechos humanos tiene la función de contribuir al desarrollo integral de la persona, delimitar, para todos los individuos, una esfera de autonomía dentro de la cual puedan actuar libremente, protegidos contra los abusos de autoridades, servidores públicos y particulares, establecer límites a las actuaciones de todos los servidores públicos a fin de prevenir los abusos de poder, negligencia o

desconocimiento de funciones, crear canales y mecanismos de participación en los asuntos públicos y en la adopción de las decisiones comunitarias.

Los derechos humanos surgen de la acción humana encaminada a crear cierta visión de los requisitos mínimos para una vida digna. El verdadero valor de un derecho surge cuando su disfrute se ve amenazado o negado; se llega a demandar un derecho cuando éste no se ha cumplido a través de los medios legales o políticos ordinarios.[1]

En el ámbito moral, los valores son cualidades especiales que han estado presentes a lo largo de la historia de la humanidad, ya que para los seres humanos siempre han existido conceptos valiosos, tales como el bien, la verdad, la belleza, la felicidad. Los valores son creencias y convicciones de que ciertas cualidades son buenas, justas, bellas o preferibles frente a otras. Por lo tanto, los valores son nuestra guía para tomar decisiones y actuar, además de ser un medio de transmisión de la cultura de una determinada época y lugar.
Existen diversos contextos para la adquisición de valores. La familia es, por excelencia, de los principales marcos de referencia moral y de transmisión de valores fundamentales. También la escuela es un espacio importante para la transmisión de valores.

Artículos constitucionales reformados

Después de su independencia, México ha tenido varias constituciones, entre ellas se encuentran las promulgadas el 3 de febrero y 4 de octubre de 1824, la del 5 de febrero de 1857 y la que nos rige actualmente, del 5 de febrero de 1917. La Constitución actual ha sufrido reformas, entre las más significativas destacan la de 1953, en la que se le otorgó el derecho a las mujeres de votar; la de 1969, en la que se declaró ciudadano a todos los mexicanos mayores de 18 años y las de 1977, 1986, 1990, 1993, 1994 y 1996, que tienen que ver con reformas electorales, entre otras.

Se le han realizado alrededor de 600 modificaciones, se ha cambiado nuestra Ley Suprema unas seis veces cada año. La Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos ha sufrido modificaciones en 98 artículos. Tres de ellos recogen las principales demandas sociales de los mexicanos:

Artículo 3°: el derecho a la educación se convirtió en una de las principales demandas de los sectores populares. En 1940 este artículo se modificó para agregar las características de educación integral, nacional, laica, democrática y científica. En 1993, otra reforma estableció que la educación primaria y la secundaria son obligatorias además de permitir a las congregaciones religiosas la impartición de educación, previa autorización.

Artículo 27: la Constitución Política de 1917 incluyó el artículo 27 con el fin de resolver el problema de la propiedad de la tierra y atender las reclamaciones de las comunidades campesinas y grupos étnicos. Este artículo declaró nulas todas las asignaciones y expropiaciones de tierra llevadas a cabo de manera ilegal y la prohibición de latifundios en México

Artículo 123: se introdujo en la Constitución de 1917 con el fin de regular las relaciones entre trabajadores y propietarios de las empresas.

---

[1] (Mazú Sifuentes Fátima Guadalupe. Situación de los derechos humanos de los migrantes centroamericanos en México. Tesis de Licenciatura. México: Universidad Nacional Autónoma de México, enero 2008, pp. 26-28.)

Ejercicios

Elige la respuesta correcta.

1. Forma de organización en la cual existe un grupo de estados autónomos, unidos mediante un pacto de manera voluntaria.
   a) Federación
   b) Descentralización
   c) Nacionalismo
   d) Centralismo

2. En México, todas las personas mayores de edad con un modo honesto de vivir pueden decidir quién los gobernará y, por lo tanto, representará sus intereses. Los ciudadanos elegidos deben cumplir sus promesas electorales, si no lo hacen, pueden ser sustituidos por otros en su cargo. Este proceso es fundamental para el progreso social. El planteamiento anterior hace referencia a la:
   a) tolerancia
   b) civilidad
   c) democracia
   d) justicia

3. Selecciona de las siguientes características las que correspondan a un gobierno democrático.
   1. División de poderes
   2. Elección de presidente de forma representativa
   3. Nula desigualdad económica
   4. Respeto de los derechos humanos
   5. Sufragio popular
   6. Libertad de expresión

   a) 1, 2, 4 y 5
   b) 1, 2, 3 y 5
   c) 1, 3, 4 y 6
   d) 2, 4, 5 y 6

4. De las siguientes opciones, ¿cuál menciona las características de la República Mexicana?
   a) Representativa, laica y tolerante
   b) Representativa, democrática y federal
   c) Democrática, incluyente y federal
   d) Federalista, democrática y centralista

5. Es el nivel de gobierno que elabora el Plan Nacional de Desarrollo y está relacionado con la capital de la República.
   a) Dictatorial
   b) Municipal
   c) Estatal
   d) Federal

6. Es la carencia de disposición de las personas en orientar sus conocimientos, habilidades y actitudes para ayudar a quienes solicitan ayuda.
   a) Altruismo
   b) Falta de compromiso
   c) Honestidad
   d) Falta de espíritu de servicio

7. Son organizaciones que se forman en torno a las ideas políticas.
   a) Sindicatos
   b) Partidos políticos
   c) Sectas
   d) Organizaciones sociales

8. ¿Cuáles son los elementos objetivos consagrados en la Constitución Política de México?
   a) La función y organización políticas de los estados
   b) El federalismo y la autonomía de los estados
   c) La división de poderes y el sufragio universal
   d) La autonomía de los poderes de la Federación

9. Artículo que establece que la educación deberá ser laica, gratuita y obligatoria.
   a) Art. 24
   b) Art. 27
   c) Art. 3°
   d) Art. 12

10. Condición jurídica que podrán tener los hombres y mujeres mayores de 18 años con un modo honesto de vivir.
    a) Nacionalidad
    b) Ciudadanía
    c) Individualidad
    d) Gobernabilidad

11. Artículo reformado que establece las normas que limitan la propiedad de la tierra, de la que originalmente es propietaria la Nación.
    a) Art. 3°
    b) Art. 24
    c) Art. 27
    d) Art. 33

12. Es una forma de obtener la nacionalidad mexicana.
    a) Residir mínimo 3 meses en territorio mexicano
    b) Nacer en una embarcación mexicana
    c) Adoptar hijos mexicanos
    d) Presentar solicitud de nacionalización

13. Poder de la Unión encargado de realizar las acciones necesarias para el buen desarrollo de la sociedad y del que se habla en el artículo 80 constitucional.
    a) Legislativo
    b) Ejecutivo
    c) Federal
    d) Judicial

14. Es el modelo gubernamental de México basado en la reunión de un grupo para dialogar respecto a sus problemas, tomar decisiones consensuadas y en beneficio de todos sus integrantes, eligiendo representantes para delegar funciones en ellos.
    a) Totalitarismo
    b) Monarquía
    c) República
    d) Dictadura

15. ¿Qué organismo atiende y da seguimiento a las quejas de los ciudadanos cuando son agredidos, ofendidos, obligados contra su voluntad, o lastimados físicamente por autoridades o servidores públicos?
    a) Comisión Nacional de los Derechos Humanos
    b) Procuraduría General de la República
    c) Secretaría del Trabajo y Previsión Social
    d) Suprema Corte de Justicia de la Nación

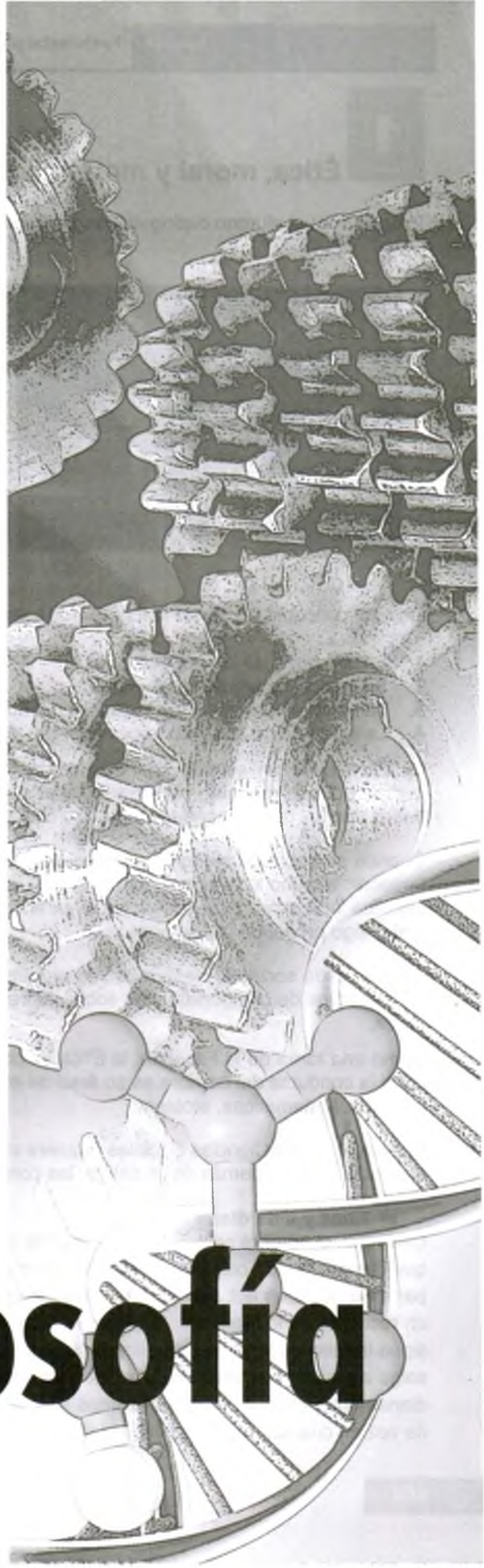
16. Completa correctamente el siguiente planteamiento.
    En el Estado mexicano, si bien todos debemos respetar las garantías individuales, la ____________________ atiende quejas sobre violaciones a estas garantías cometidas por autoridades públicas.
    a) Comisión Mexicana de Derechos Humanos (CMDH)
    b) Comisión Nacional de Derechos Humanos (CNDH)
    c) Secretaría de Desarrollo Social
    d) Comisión de Derechos Humanos de la ONU

17. En México, es el principal fundamento e instrumento jurídico para hacer valer los derechos humanos:
    a) la Declaración Universal de Derechos Humanos
    b) el artículo 1° de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos
    c) las garantías individuales consignadas en los primeros 29 artículos constitucionales
    d) la Comisión Nacional de Derechos Humanos

18. Elige la opción que menciona dos derechos consignados en la Declaración Universal de Derechos Humanos.
    a) El trabajo y el tiempo libre
    b) La tolerancia y el respeto
    c) La libertad y la honestidad
    d) Los valores y los principios

Respuestas de los reactivos de Civismo

1. a	10. b
2. c	11. c
3. a	12. b
4. b	13. b
5. d	14. c
6. d	15. a
7. b	16. b
8. c	17. c
9. c	18. a



Filosofía

1 Ética, moral y moralidad.

Propósitos: el alumno distinguirá los conceptos de Ética, moral y moralidad.



La palabra ética tiene su origen en la cultura griega; su significado es diverso. En su sentido más antiguo es entendido como el lugar donde se habita. Su origen etimológico proviene del término **êthika** de **êthos**, el cual se define como comportamiento o costumbre. En latín, ética se relaciona con "**mos**", cuyo plural es "**mores**", que por su significado equivale a **êthos**.
Para Aristóteles significó manera de ser, carácter. Sobre estas definiciones, parciales, Adolfo Sánchez considera que se debe entender por "*ética a la teoría o ciencia del comportamiento moral de los hombres en sociedad*". En consecuencia, la ética se define como *el estudio de las costumbres del hombre.*

De este concepto podemos identificar las características distintivas de la Ética:

1. Es una rama de la Filosofía.
2. Su campo de estudio es la moral.
3. La moral es una creación exclusiva del hombre.
4. La moral es un fenómeno social porque rige la vida del hombre.

La Ética tiene un sentido eminentemente filosófico. **Êthos** representa en la vida del hombre lo que cada persona puede modelar, construir o forjar en su manera de ser, donde los principios de conducta forman las bases con los que se conduce todos los días su vida.

Cuando se habla de *persona*, es necesario recordar el origen del vocablo. La palabra viene del latín *personare 'resonar'* término con el que se designaba a las máscaras usadas por los personajes teatrales, así *persona* significa 'máscara', 'papel del actor' o 'caracterización'. Pero el referente más antiguo está en el Etrusco: *phersu* y el griego *prósopon* (πρόσωπον).

Aunque cada sociedad desarrolla sus propios modelos éticos de vida, se intenta que las reglas de conducta y los principios de comportamiento social, logren la aceptación consciente, fundamentándose en el ejercicio de la razón.

Como una rama de la Filosofía, la Ética se considera una disciplina que se encarga del estudio de las *normas,* pues la conducta del hombre es su área de estudio. La Filosofía es diferente de cualquier ciencia exacta, como la Física, Matemáticas, etcétera.

El estudio en las Ciencias Sociales requiere clarificar la relación existente entre principios éticos particulares y la conducta social, además de investigar las condiciones socioculturales que fomentan dichos principios.

a) Ética y vida diaria

Cada día, el hombre se enfrenta a una serie de actos casi rutinarios, que invariablemente conforman su vida. Lo que llamamos vida cotidiana hace referencia a todas las actividades que realizamos en forma sistemática como parte de nuestras actividades habituales; en ellas incluimos todo lo que hacemos para VIVIR. Basta con hacer un recuento de lo realizado, hora por hora al día, para descubrir que hay actos que no varían. Regularmente se sigue la misma mecánica al bañarse por las mañanas; probablemente prepare su desayuno de manera similar y salga a realizar sus actividades vestido de una forma que sea aceptada por el grupo humano con el que convive diariamente, pero, ¿por qué debemos vivir así?, ¿para qué vivir?, posiblemente estas preguntas se presentan de vez en cuando; sus respuestas están en relación directa con la vida e historia del individuo.

Aunque también se puede llegar a cuestionar si lo que hace día a día es bueno o malo, quién dicta los patrones que definen la bondad y la maldad, qué límites deben aceptarse. La certeza de calificar como bueno lo que se hace, es similar a diferenciar lo que puede ser bello o feo. Para ejemplificarlo hay que atender, por un momento el personaje de Dulcinea; al buscar en el texto su descripción encontrará dos versiones: la primera la ofrece Don Quijote de la Mancha: él adivina una dulce mujer, hermosa, refinada, candorosa y llena de cualidades. Mientras que para Sancho Panza, la misma mujer es sucia, rústica, fea, una fregona de posada. ¿Por qué, la misma mujer es descrita por dos hombres, en el mismo tiempo y espacio, de forma tan distinta?, aunque es un personaje de ficción, ¿una situación similar no es posible en una mujer real?; ¿qué determina la forma de interpretar esta realidad?

La Ética se encarga del estudio de las normas. Para clarificarlo, se debe hablar de la existencia de normas jurídicas y sociales. Baste mencionar el robo como un acto reprobable; categóricamente es una conducta que va en contra de la sociedad; por ello, si la persona acepta que el robo es un acto que no debe ejecutarse, bajo ninguna situación, lo realizará, porque tiene la convicción de su repudio, pero, ¿no existe la posibilidad de que se presente un atenuante para quienes lo ejecuten?, ¿por qué se castiga de maneras tan diversas?; ¿por qué se considera que unos actos son válidos y otros no?

Otro ejemplo es el contrato de fidelidad y monogamia en las relaciones matrimoniales de nuestra sociedad, haciendo que sea inadmisible y legalmente perseguido el adulterio; pero es sabido que en algunas sociedades el concubinato es legal y puede establecerse sin sanción alguna. Entonces, ¿los cánones morales buscan legitimar y fundamentar la conducta dependiendo de la cultura a la que se pertenece?; ¿es posible establecer parámetros universales de validez?

b) Moral

El origen de la Ética se encuentra en la reflexión sobre la vida inspirada en la bondad, los griegos la incorporaron como parte de la Filosofía, estudiando las costumbres del hombre y determinando qué se puede considerar bueno o malo, para llegar así a lo que se puede calificar como moral o inmoral.



El término **moral** proviene del latín, sus raíces se encuentran en *morales, mos, mores,* que significan costumbre. Así, la palabra **morales** se aplicó a las normas específicas que regulan las acciones del hombre. Poca es la distancia entre Ética y moral; ambas hacen referencia a hechos parecidos. Pero no son sinónimos, pues en esencia, su definición es distinta, aunque sean utilizadas en forma incorrecta frecuentemente. La moral es el objeto de estudio de la Ética, de la misma forma que en Matemáticas se estudia Cálculo diferencial.

Existen diversos conceptos de moral, entre los más importantes la definen como:

1. El conjunto de normas que regulan la conducta individual y social del hombre.
2. Un sistema de reglas, deberes o normatividad que regulan las acciones de los hombres entre sí.
3. El conjunto de reglas o normas que el hombre respeta al vivir en sociedad, cuando estas reglas no son respetadas, la sociedad separa a quien infringe la norma.
4. El conjunto de normas y formas de vida a través de las cuales el hombre busca alcanzar el valor de la bondad.

De estas definiciones podemos resumir que *la moral es un conjunto de normas que tienen como propósito regular la conducta del hombre al vivir en sociedad; estas normas deben ser ejecutadas y respetadas consciente y libremente, al tiempo que el hombre las ha interiorizado, ya que es a través de ellas, que puede alcanzar el valor de lo bueno.*

Por ello, la moral integra los juicios que permiten distinguir el bien del mal. Con ello, los actos de la conducta humana se rigen día a día, haciendo que cada persona se cuestione sobre lo que debe o no hacer, pues los juicios morales se van adquiriendo a lo largo de la vida y se adoptan sólo si el hombre así lo quiere.

Debemos puntualizar que la moral tiene un doble aspecto, por un lado es de carácter *individual* y por el otro, tiene repercusión *social*. Cada decisión *individual* se manifiesta en las valoraciones y convicciones personales, como puede ser el hablar con la verdad, mientras que el impacto *social* se puede advertir en la familia, la comunidad, el sistema cultural, político y económico que rodea al hombre, por ejemplo podemos hablar de corrupción al impartir justicia porque existen muchas situaciones que avalan esta concepción.

c) Ética y moral



En cada momento de la vida, desde que es posible tener uso de razón, estamos en contacto con una serie de lineamientos que integran las normas o preceptos morales. En la casa, escuela, o iglesia, de la boca de sacerdotes, padres y maestros, recibimos los principios éticos que regulan la conducta moral, haciendo que lo teórico se vuelva práctico al enfrentarse a la situación real, y que el comportamiento moral sea dirigido por los principios éticos.

El fundamento de **la moral** se encuentra en prácticas sociales que tienen normas específicas, impuestas, obligatorias, legales y coercitivas. Como ejemplo están los sentimientos como: la compasión, el temor, la piedad, el amor por nuestros semejantes, padres, hijos, maestros, etcétera, porque ellos, en su conjunto, forman nuestro mundo, en donde se ha dado nuestro desarrollo espiritual y físico a lo largo de la vida. La suma de todo lo anterior son las vivencias reales, que se van pasando de generación en generación, modificándose en cada sociedad y época. Aunque se debe aclarar que las normas morales son externas al hombre y se aprenden.

A diferencia de la moral, **la Ética** obtiene sus normas de la conciencia y la voluntad, pues su origen está en la razón, ejercida en libertad, con las normas y preceptos morales que el hombre adopta en su mentalidad y que, al ponerlos en práctica, permiten un proceso reflexivo con el que se puede elegir y justificar ante los demás y ante sí sus actos, haciendo la clara distinción entre el bien y el mal, para concluir lo que debe ser.
Con frecuencia el hombre se enfrenta a conflictos morales, en los que debe aplicar en forma práctica, lo que sólo había sido una teoría en su esquema moral.

d) Moral y moralidad

La moral posee dos planos que la fundamentan y sustentan, éstos son: *el plano normativo* y *el plano fático.*

El *plano normativo* lo identificamos al reflexionar que la moral es un conjunto de normas que existen para que el hombre las realice y respete, socialmente las aceptamos y las consideramos valiosas y por ello podemos llevarlas a cabo o no. Es esta normatividad la que se estudia con más frecuencia en el ámbito filosófico.

El *plano fático* es el momento práctico de la moral, ya que es la posibilidad de llevar a cabo la norma, pongamos como ejemplo a un sujeto que tiene la posibilidad de tomar una billetera que han olvidado, podría tomarla sin problemas y quedársela, pero no lo hace y decide entregarla al departamento de objetos perdidos esperando que su verdadero propietario la reclame. Al entregarla dio pruebas de *moralidad*, puesto que su regla moral le dicta que el robo es un acto reprobable y quedarse con un objeto que no le pertenece es equivalente a robar, entonces, **la moralidad es la moral hecha realidad, es la forma cotidiana en que el hombre vive las normas morales con que fue educado, es decir, es el acto concreto que realiza cotidianamente**.

e) Normas

Una norma es una regla, un estándar o una medida; es algo fijo con lo que podemos comparar alguna otra cosa acerca de cuyo carácter, tamaño o calidad dudamos. Así, pues, una norma de moralidad será una regla, estándar o medida con los que podremos calibrar la moralidad de un acto, su bondad o su maldad. Es algo con lo que el acto deberá concordar positivamente, por ser moralmente bueno, de lo que habrá de discrepar para ser moralmente malo, y hacia lo cual habrá de ser neutral, para ser moralmente indiferente.
Una norma puede ser próxima o última. Para averiguar si un espacio mide un metro de largo, le aplicamos una escala métrica con el metro oficialmente reconocido, más allá del cual no se da apelación posible; como una fracción matemática concreta del metro que se conserva en París. Por regla general, la norma próxima o derivada es una norma directamente aplicable a lo que se quiere medir, y se tiene listo para el uso, al alcance de la mano; en tanto que la norma última y original es la última razón de que la norma próxima sea aquello que es. Teóricamente, la misma cosa puede realizar las funciones de norma tanto última como próxima. Es posible, en efecto, llevar una norma de moralidad; es un elemento de referencia con el que podemos comparar actos humanos, para averiguar su bondad o maldad. Una norma próxima es inmediatamente aplicable a actos, en tanto que la norma última garantiza la validez de la norma próxima.

Los problemas de las normas

Se ha mencionado que las normas se aprenden, que son la influencia externa que se recibe de la escuela, la familia, la iglesia, en general de la sociedad; esto hace que cada hombre tenga en la conciencia un conjunto de principios, pero cada persona posee su punto de vista. En consecuencia, ante un mismo hecho existe una consideración diferente, los problemas que provoca esta diversidad son:



La pluralidad de sistemas morales

Las normas morales que el hombre posee suelen ser tan diversas, que resulta complicado unificar los criterios sobre un hecho. Tal es el caso de hechos como: la adopción, el aborto, la eutanasia, etc. Aceptar o rechazar estas prácticas es el resultado de las normas morales que el individuo tiene y que son aceptadas o rechazadas en la sociedad que vive.

Los valores morales

Un valor, en términos generales hace referencia a cualquier bien que atrae de cualquier manera; los valores humanos sólo se presentan en el hombre libre que realiza actos voluntarios, su carácter es universal y hacen que la persona sea buena. Los valores morales ocupan el sitio más elevado en el ideal de la vida humana. Aunque su problemática radica en su objetividad y subjetividad.

Los medios para llegar a un fin

Todo hombre actúa para llegar a un fin. Bajo esta premisa resulta obvio entender que los medios son todas las acciones que se emprenden, pero no se debe olvidar la intención con la que se debe conducir y la finalidad, pues el *El fin no justifica los medios*.

La libertad

De los valores morales, la libertad es uno de los más apreciados, ya que permite al hombre preservar la conciencia, y que la persona actúe bajo su propio criterio. El conflicto se presenta cuando la libertad que el hombre pudiera ejercer se enfrenta a las normas morales aprendidas.

La libertad absoluta no existe, pues la existencia de leyes implica una limitante, aunque en boca de **J. J. Rousseau**, las leyes que en apariencia limitan, garantizan la libertad, pues "**el hombre ha nacido libre, sin embargo, vive en todas partes entre cadenas**".

Las clases de libertad son:

- Libertad de espontaneidad
- Libertad de elección
- Libertad de independencia

La obligación moral

Se define como todo aquello que el hombre hace por convencimiento, no por imposición o coerción.

La diferencia entre Ética y moral

La moral integra la totalidad de normas que se aprenden del exterior (escuela, casa, iglesia, etcétera), en cambio, la Ética incorpora las normas que surgen del interior del hombre, como reflejo de su capacidad racional.

1. **Actitudes morales**



Iniciamos pensando en el ser humano, indudablemente es complejo tratar de determinar su estructura física, resulta más difícil si lo orientamos al ámbito de la Ética, por naturaleza los seres humanos somos complicados ya que en nuestro comportamiento intervienen, hábitos, deseos, instintos, pasiones, necesidades e impulsos, incluso, algunos de ellos o casi todos forman parte del comportamiento de los animales irracionales, es en este punto donde el hombre se diferencia ya que poseemos razón y conciencia, ambos aspectos son exclusivos de nuestra especia, posibilitando nuestra vida moral.

La moral es el reflejo de la conciencia humana, nos permite actuar en libertad para tomar decisiones, plantearnos propósitos o alcanzar fines que consideremos importantes, valiosos o adecuados.
Para identificar qué es un *acto moral*, debemos distinguir cuáles son **los hechos de la naturaleza, éstos ocurren de forma libre y son independientes de la voluntad humana**, por ejemplo un sismo, un eclipse, la respiración de un niño, la salida del Sol al amanecer, son hechos que ocurren siguiendo la ley de la naturaleza y no se relacionan con ninguna ley moral.
En cambio, **los actos humanos pueden ser considerados como buenos o malos**, porque implican un proceso de interiorización o toma de conciencia de las normas y valores que conforman la moral, por ejemplo la solidaridad, la justicia, la honestidad, el soborno y el asesinato, se convierten en **actos morales** puesto que pueden ser juzgados como buenos o malos.

El ser humano posee *conciencia moral*, con ella distingue lo bueno de lo malo, esta conciencia también hace posible trascender las necesidades básicas como comer, instinto sexual, necesidades fisiológicas, etcétera.

La dualidad de que posee el hombre, contempla su naturaleza biológica y los actos que lo vinculan al mundo moral, por ello se distinguen dos tipos de actos que se pueden realizar, por una parte hablamos de los *actos del hombre* y por el otro, de los *actos humanos*.

Actos humanos: se realizan libre y conscientemente, y desde el punto de vista de la moral podemos considerarlos buenos o malos, según sea el caso. En estos actos se manifiesta la voluntad, el querer y la conciencia, todos en su conjunto. El altruismo es un ejemplo de estos actos.

Actos del hombre: se ligan al ámbito biológico y por ello, compartimos estos actos con los animales irracionales, son espontáneos, instintivos y mecánicos, puesto que son el resultado de una necesidad física propia del ser humano. Son totalmente ajenos al ámbito moral. Toser, dormir, respirar, sentir miedo si un perro nos ladra, todos son ejemplo de actos del hombre.

Ejercicios

1. Lee el fragmento siguiente, al terminar contesta lo que se te pregunta.

"Teoría o ciencia del comportamiento moral de los hombres en sociedad"

¿A qué concepto hace referencia el fragmento anterior?

a) Ética
b) Moral
c) Ciencia
d) Filosofía

2. Lee las siguientes características, indica cuáles son propias de la Ética.

I. Es una rama de la Filosofía
II. Es el estudio del conocimiento
III. Su campo de estudio es la moral
IV. Es el estudio del Ser en cuanto Ser
V. La moral es una creación exclusiva del hombre
VI. La ontología forma parte fundamental en su contenido

a) I, III, V
b) I, III VI
c) II, IV, VI
d) II, V, VI

3. Lee el siguiente fragmento, al terminar contesta la pregunta.
"Es un conjunto de normas que tienen como propósito regular la conducta del hombre al vivir en sociedad; estas normas deben ser ejecutadas y respetadas consciente y libremente, al tiempo que el hombre las ha interiorizado, ya que es a través de ellas, que puede alcanzar el valor de lo bueno."
¿A qué concepto hace referencia el texto anterior?
a) Ética
b) Moral
c) Norma
d) Filosofía

4. Lee el siguiente texto, al terminar contesta la pregunta.
"Es la forma cotidiana en que el hombre vive las normas morales con que fue educado, es decir, es el acto concreto que realiza cotidianamente."
¿A qué concepto hace referencia el texto anterior?
a) Ética
b) Norma
c) Filosofía
d) Moralidad

5. Lee el siguiente texto, al terminar contesta la pregunta.
"Es una regla, estándar o medida con los que podremos calibrar la moralidad de un acto, su bondad o su maldad."
¿A qué concepto hace referencia el texto anterior?
a) Ética
b) Norma
c) Filosofía
d) Norma de Moralidad

2 Doctrinas éticas

Propósitos: el alumno conocerá las principales doctrinas éticas.

Existen diferentes formas de estudiar las teorías o doctrinas éticas, la forma más sencilla es considerando sus periodos históricos, los cuales son:

ANTIGUEDAD (CLÁSICO)	
1. Ética griega: desde Sócrates en 470 a.C. y los sofistas, hasta la muerte de Aristóteles en 322 a.C.	2. Ética helenístico-romana: desde la muerte de Aristóteles hasta el neoplatonismo en 500 d.C.

EDAD MEDIA	
3. Ética medieval: de San Agustín en el siglo V, hasta Nicolás de Cusa en el siglo XV.	4. Ética del Renacimiento: siglo XV hasta el XVII.

MODERNIDAD	
5. Ética de la Ilustración: de John Locke en 1689, hasta la muerte de Lessing en 1781.	6. Ética de la filosofía alemana: de Kant en 1781, hasta Hegel y Herbart en 1830.

CONTEMPORANEO	
7. Ética del siglo XIX con los filósofos: Augusto Comte, Carlos Marx, Jean Paul Sartre y W. Jame.	8. Ética del siglo XX con A. Caso y sus contemporáneos.

Antigüedad, ética griega (400 a 450 a.C.)

Sofistas

El término *sofista* se utilizó para designar a los **sabios ambulantes** de la época clásica en Grecia, estos pensadores enseñaban dialéctica, lógica, gramática y retórica entre otras disciplinas del pensamiento. Al paso del tiempo la palabra sofista cobró un sentido despectivo, ya que se redefinió como **charlatanería**, Aristóteles argumentaba que los sofistas sólo poseían un saber aparente.

El iluminismo griego encontró en los sofistas a sus promotores más importantes, fueron escéticos y relativistas, intentaron plantear y resolver los problemas del valor de la vida y las instituciones sociales, para ello utilizaron la luz de la razón.

Otra característica indica que Sócrates y los sofistas rechazaron la tradición cosmológica y su interés por el hombre.

El *relativismo* fue postulado por **Protágoras,** quien es considerado uno de los sofistas más importantes, en el relativismo se afirma que la verdad es relativa, ya que depende de la opinión personal, por tanto es cambiante y depende de las circunstancias.



Pensamientos sofistas:

- *Nada es verdad ni mentira, todo es según el color del cristal con que se mira.*
- *La verdad es relativa ya que depende de la opinión personal.*
- *Cualquiera puede aprender, la evolución humana es posible, se puede lograr el perfeccionamiento del hombre.*

Sofistas destacados:

Protágoras de Abdera (480-411 a.C.)
Hípias de Elís (siglo V a.C.)
Georgías de Loontini (483-375 a.C.)

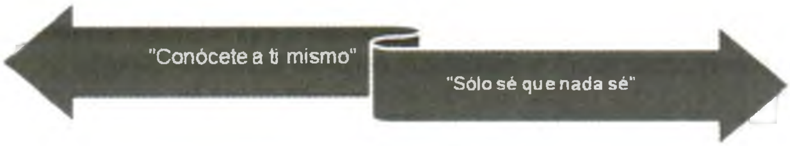
Sócrates



Sócrates
Alópeké, Ática. 470– Atenas 399 a.C.

Saber quién fue Sócrates resulta complicado, pues las referencias que se tienen de este filósofo fueron escritas por sus contemporáneos, ya que él no escribió nada. La interpretación que se hace de él, fue la que sus contemporáneos **Aristófanes, Jenofonte y Platón** le hicieron al conocerlo.
Aristófanes se burló de él; Jenofonte lo calificó como un moralista simplón, pero para Platón en su carácter de discípulo, fue una gran influencia y lo coloca como personaje principal en el texto de *Los Diálogos*.
Sócrates fue hijo de una partera, lo que lo llevó a autodenominarse como partero de almas, al proponer el método Mayéutica. Sócrates afirma que si una persona debe aprender algo, sólo lo podrá lograr si parte de sí, por ello Sócrates coloca como eje de su filosofía la frase "conócete a ti mismo", misma que aparece inscrita en el oráculo de Delfos.

El pensamiento filosófico de Sócrates posee estas frases fundamentales:



"Conócete a ti mismo", significa que cada persona debe encontrar su verdadera vocación, aquello para lo que ha nacido; puntualiza que no existen saberes menores, puesto que el saber de un campesino es como el de un senador. Cuando cada ciudadano encuentra su virtud y ejerce su vocación, se logra la justicia.
"Sólo sé que nada sé", con esta frase Sócrates expresa su rechazo a las doctrinas cosmológicas y se inclina por el problema del hombre como ser moral. El conocimiento del hombre posee estas características:

- Es conocimiento universal
- Es conocimiento orientado hacia la moral
- Es conocimiento práctico

La ética socrática presenta un eudemonismo idealista, es decir, solo se logra con la práctica de la virtud y presenta un intelectualismo ético, por ello es profundamente racionalista.

La moral socrática

Jonofonte calificó a Sócrates como un moralista simplón, la moral socrática fue resumida por Aristóteles en:

- La virtud es lo mismo que el conocimiento
- El vicio es ignorancia
- Nadie hace el mal voluntariamente

Sócrates defendía la virtud que conducía al hombre hacia el bien, mientras que para los sofistas, era lo contrario, pues consideraban que la virtud se sometía a actitudes prácticas como el placer; este pensamiento opuesto, llevó al propio Sócrates a la muerte.
Acusado por los Melito y Agatón, de corromper a la juventud con sus enseñanzas y de negar la existencia de los dioses que el politeísmo griego defendía, fue juzgado; él se defendió argumentado razones, negó los cargos, pero fue condenado a muerte, negándose a huir, para no caer en contradicción con la filosofía que toda su vida había defendido.

Platón



Platón
Atenas h 427- íd. 348 o 347 a. C.

Su verdadero nombre fue Aristocles, Platón, es en realidad su sobrenombre, pasando a la historia con él, perteneció a una familia aristocrática. Por la línea paterna estaba emparentado con el último Rey de Atenas, mientras que por la línea materna, con Solón.
Su admiración por el gobierno oligárquico terminó cuando su maestro Sócrates fue ejecutado. A la muerte de Sócrates, Platón abandona Atenas y viaja a Egipto y Sicilia para desempeñarse como político e investigador. A su regreso en el año h. 387 funda La Academia, la que sería la primera universidad del mundo, donde había estudios sobre la justicia, la medida, las Matemáticas y la virtud.
Durante la etapa de su vida madura escribió algunos de sus famosos diálogos. Después de viajar a Siracusa –invitado por su alumno Dión– regresó a Atenas debido a que la ciudad era gobernada por un tirano y retomó sus clases en la Academia y continuó enseñando Filosofía.

Diálogos que escribió en su etapa madura		Obras que escribió cuando regresó a Atenas	
Obra	**Tema**	**Obra**	**Tema**
Fedro	Trata del amor y de la belleza	*El Teetetes*	Define la ciencia
Fedón	Trata de la inmortalidad del alma	*El Sofista*	Define a los sofistas
El Banquete y las Gorgias	Trata de la justicia	*El Político*	Es una modificación de *la República*
La República	Trata el estado ideal	*El Parménides*	Critica su propia filosofía
		El Filebo	Reconstruye su pensamiento

El sistema filosófico de Platón se sostiene en su *teoría de las ideas,* en ella afirma que el mundo concreto en que vivimos es un mundo cambiante y relativo. Todo lo que nos rodea, incluyéndonos está de paso.
En la teoría de las ideas, se plantea que el hombre, a diferencia de los animales, posee la capacidad de "saber ver y contemplar el mundo" que le rodea, el potencial cognoscitivo innato en el hombre fue distinguido por Platón en uno de sus diálogos, pero el término hombre, que tan acostumbrados estamos a escuchar, posee una raíz etimológica latina (**homo**), pero para los griegos proviene del término *anthropos:*

"Este hombre anthropos significa que los demás animales ven las cosas sin examinarlas ni dar razón de ellas ni contemplarlas; mientras que cuando el hombre ha visto una cosa, lo cual también se expresa con la palabra opone, contempla y se da razón de ella"

Platón

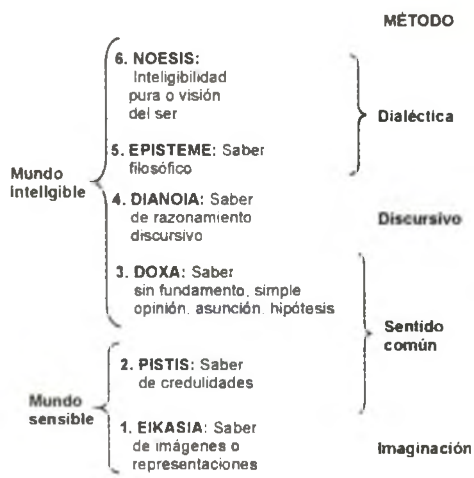
En la explicación que Platón sostiene para argumentar qué son las ideas, primero se debe clasificar que en sus ideas filosóficas, los términos que definen las cosas se empezaban a clarificar, una idea, en términos platónicos, hace referencia a algo visto, a un aspecto externo, a la apariencia de las cosas. Bajo esta interpretación, las ideas no cambian ni admiten variación, por lo que éstas son seres con existencia propia, independiente de nuestro mundo. Por lo tanto, una idea, es la esencia de las cosas a la que hacen referencia. Como ejemplo se debe pensar, que en el proceso de cambio permanente y eterno que tiene el mundo, todo lo existente se está modificando, a cada instante.



Una naranja, antes de llegar a ese estado fue flor, antes de ser flor, fue árbol y antes de ser árbol fue semilla. En este conjunto de modificaciones no hay final, pues aún cuando ya es una naranja, sigue cambiando. Todo en el mundo ***deviene*** *(tránsito entre los opuestos; para Platón, el mundo sensible se opone al mundo ser),* ese cambio permanente, hace las ideas, primero como una suposición, después con una serie de pruebas racionales.

Jerarquía del saber de Platón

Para entender el esquema anterior, hay que partir de la premisa básica, Platón consideró que el mundo, en su devenir permanente, era interpretado por el hombre con dos posibilidades, la más común corresponde al mundo de la sensibilidad, a este mundo corresponden los cinco sentidos con los que, de manera primaria se percibe todo lo que rodea al hombre, con estos sentidos, se capta la apariencia que posee el ser, pues lo más importante, permanece oculto para los sentidos y para poder descifrarlo, es necesario explorar el mundo inteligible, formado de cosas verdaderas, por modelos, por **eídos** como los llamó Platón. Cuando se reúnen ambos mundos, Platón empieza a explicar las discordancias existentes entre las teorías de Parménides y Heráclito.
Platón une los atributos que Parménides atribuye al Ser con la idea de Heráclito, así es como explica que cada cosa presenta dos caras, por un lado, la parte que cambia, que se modifica en su carácter de evolución y transformación permanente, por otra parte, el lado de las cosas que es permanente, que siempre está ahí y que sólo se ve con la inteligencia.



En la teoría de las ideas que propone Platón, se puede identificar su deseo de resaltar las virtudes humanas, la finalidad de jerarquizar las ideas, está en buscar alcanzar el saber de perfección suprema, recorriendo una serie de niveles ascendentes.

Los grados del saber para Platón

Eikasia	Comprende el saber de las apariencias o conjeturas, es el saber ordinario.
Pistis (credulidad)	Encuadra el saber del sentido común, en su orientación positiva, en este nivel, se establecen juicios de certeza, sin llegar a conceptuar o desarrollar conocimiento.
Doxa	Es el punto intermedio entre el mundo sensible y el mundo inteligible, comprende el saber sin fundamento, una opinión. Para Platón, esta opinión se desarrolla como una asunción, incluso como una hipótesis.
Dianoia (razonamiento discursivo)	Elabora razonamientos que se derivan de conceptos. Platón afirma que en este nivel se inicia el mundo inteligible y a él, corresponden las Matemáticas, la Aritmética y la Geometría.
Episteme (saber bien fundado)	Alcanza el saber que se funda en la contemplación reflexiva, en este nivel se puede llegar a saber acerca del Ser.
Noesis (visión directa del Ser)	Es el grado supremo en la jerarquía platónica, es la inteligibilidad pura o intuición intelectual la que se alcanza, gracias a la cual el espíritu aprehende el Ser.

Destaca de estos grados del saber su orientación hacia las virtudes humanas (**axios**), en la actualidad se reconocen como virtudes los valores humanos, lo cual remite a Platón al problema ontológico del estudio del Ser.

Los grados del saber y su método

Imaginación	Es el método del grado elemental, en el que el hombre, dejándose llevar por la imaginación, obtiene conjeturas.
Sentido común	En este método el hombre propone conjeturas y/o creencias, con las que somete al entendimiento las cosas que quiere descifrar.
Discursivo	En el método discursivo se desarrolla el proceso de razonamiento, de manera similar como se realiza en los procesos matemáticos.
Dialéctica	Es el método de la conversación filosófica, en el que se exponen diferentes *tesis,* donde cada interlocutor sostiene sus puntos de vista sobre un tema, argumentándolos.

Ética y psicología platónicas



Para Platón, el hombre puede explicarse a través del mito que narra a un cochero, que posee dos caballos alados, uno blanco que es noble y aspira al bien (la voluntad) y otro negro que arrastra el carro hacia el mundo de lo sensible y fenomenológico (apetitos sensibles). Este carro es conducido por la razón, su misión será controlar a los dos corceles y debe lograr que el caballo blanco alcance su misión.
En palabras de Platón, el alma está formada por tres partes: *inteligencia, voluntad y sensibilidad*, cada parte posee una virtud que la identifica, éstas son:

Virtudes

- Inteligencia → sabiduría o prudencia
- Voluntad → valor
- Sensibilidad → templanza

Cuando se logra armonizar las virtudes, es posible generar una virtud más elevada: **la justicia**.
En el libro *La República,* Platón afirma que *la justicia regula el interior del hombre, no permite que ninguna de las partes del alma realice nada que le sea extraño ni trastorne sus funciones… Ninguno de nosotros será justo, ni cumplirá su deber, sino en cuanto cada una de estas partes de sí mismo cumpla su tarea.*



Ética y política platónicas

En el libro *La República*, Platón propone la posibilidad de un estado ideal, en la ciudad (polis) existen tres clases sociales, las cuales identifica y caracteriza de esta forma:

Clases sociales	Parte del alma	Virtudes	Características
Dorada	Razón	Prudencia o sabiduría	Ilustran y dirigen el Estado, a ella pertenecen los filósofos, los sabios y los gobernantes.
Plata	Voluntad	Fortaleza	Defienden, guardan y luchan por el Estado, a ella pertenecen los guerreros.
Cobre	Apetitos	Templanza	Trabajan para alimentar el Estado, es la clase inferior y a ella pertenecen los artesanos y labradores.

Aristóteles



Aristóteles Estagira, Macedonia, 385-Calcis–Eubea. 322 a.C.

Alumno de Platón en La Academia, desde pequeño demostró su interés por el estudio de las Ciencias naturales, fue maestro de Alejandro Magno en el año 335 a.C., con el tiempo fundó su propia escuela, a la que llamó El Liceo, considerada la segunda gran escuela del mundo occidental, a esta escuela también se le conoce como *peripatética o paseante*, porque se enseñaba Filosofía a los alumnos, mientras Aristóteles caminaba con ellos por los jardines.

La obra de Aristóteles es muy distinta a la de su maestro, porque sus trabajos fueron estructurados con un enfoque enciclopédico, haciendo de ellos, tratados. Aristóteles es el verdadero fundador de la lógica.

De las obras de Aristóteles debemos considerar por tu trascendencia, como las más relevantes para la Ética: *Ética nicomaquea*, *Ética a Eudemo* y la *Magna Ética*, revisaremos brevemente sus conceptos más destacados.

En *Ética nicomaquea* se habla sobre el problema del **bien supremo**, Aristóteles define como **bien supremo** aquel bien que es el fin último, un que es tan elevado que ya no puede ser un medio para alcanzar un bien superior, un estado definitivo. En palabras de Aristóteles *es lo perfecto, lo definitivo, lo completo, es lo que, siendo eternamente digno de ser buscado por sí mismo, no es buscado en relación con otro objeto que él mismo.*

Cada actividad que se realiza tiene un bien que desea alcanzar, en la Medicina el bien es la salud, la arquitectura tiene en sus construcciones su bien, para el humano el bien a alcanzar es la **felicidad**.

La felicidad

Aristóteles considera que la felicidad es el bien supremo, en sus palabras: *tanto la multitud como los refinados, dicen que es la felicidad, y admiten que vivir bien y obrar bien es lo mismo que ser feliz.*

El problema ahora se orienta a determinar cómo definir la felicidad, un hecho es que cada persona considera su mayor felicidad aquello que más anhela, al paso del tiempo puede variar su circunstancia y cambiar de opinión, por ello un hombre solo considera su mayor felicidad encontrar la compañera ideal, pero si pierde su empleo, cambiaría su postura y volver a tener trabajo se convierte en su mayor felicidad.

Por esta razón, Aristóteles considera que *la felicidad consiste en el ejercicio ininterrumpido de una vida activa contemplativa o teorética, que es superior a la vida de placeres y diferente a la vida de política que busca honores.*

El mismo Aristóteles termina su concepto de felicidad afirmando que en efecto, la vida teorética es fundamental, pero que alcanzar la felicidad también requiere otras condiciones, éstas son:



Las virtudes
Para Aristóteles, las virtudes son *los modos o hábitos constantes de obrar de manera deliberada, consistente en una mediedad relativa a nosotros, la cual está racionalmente determinada, y tal como la determinaría el hombre prudente*.
Para entender esto consideremos que una virtud es la generosidad, la cual podemos colocar entre dos vicios: avaricia y prodigalidad, el justo medio es la generosidad y no dejarse llevar por el defecto o el exceso es una actitud sabia.

DEFECTO –	VIRTUD +	EXCESO ++
Insensibilidad Avaricia Cobardía	Templanza Generosidad Valentía	Desenfreno Prodigalidad Temeridad

Edad Media, ética cristiana
Se llama así a la época que abarca el periodo intermedio entre la Antigüedad y la Era Moderna, se inicia con la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, su fin se sitúa con la toma de Constantinopla por los turcos en el año de 1453, aunque algunos historiadores consideran que se extiende hasta el año 1517 con el inicio de la Reforma. Esta época comprende diez siglos.
Para los humanistas del siglo XV, la época medieval es un periodo de barbarie y oscurantismo, que sirvió como puente para lo que se alcanzaría durante el Renacimiento, este periodo de diez siglos suele dividirse en las siguientes épocas:

La alta Edad Media
Se inicia en el siglo V con la caída del Imperio Romano de Occidente y termina en el siglo XII. Durante este período ocurren los siguientes hechos:



- La sociedad adopta la organización feudal, haciendo que la figura del rey se apoye en la nobleza.
- El Imperio Romano de Occidente termina, dará paso a la formación de núcleos políticos.
- El patrimonio cultural heredado de la antigüedad sobrevivirá a los grandes cambios y habrá otros Interesados en su preservación, además de que buscarán continuar con la producción artística, entre ellos: el rey Teodorico, San Bena el Venerable y sobre todo, el llamado Renacimiento Carolingio en el siglo VIII.



La baja Edad Media
Se inicia con la formación de monarquías nacionales en el siglo XII, terminando en el siglo XV con el esplendor del Renacimiento y los grandes descubrimientos geográficos en América. Durante este periodo ocurren los siguientes hechos:
- Las cruzadas ocurridas entre los siglos XII y XIII, que tienen como finalidad inicial recuperar los "Lugares Santos" de Medio Oriente de manos infieles, tiene como consecuencia la modificación de las estructuras sociales y la aparición de la clase burguesa.
- Para la cultura, será el siglo XIII el más importante, pues en la producción literaria se fomenta la poesía culta y popular, la épica, lírica, prosa y teatro.

El Cristianismo
Durante la época medieval es indudable la importancia de pensamiento cristiano, cuyo fundador es Jesús de Nazareth, nacido de María Virgen en Belén, las investigaciones históricas apuntan que dicho suceso ocurrió entre el año 747 y 749 de la era romana, y de siete a cinco años antes del comienzo de la era cristiana. Hijo adoptivo del carpintero José, vivió hasta los 30 años en Nazareth. Durante los tres años siguientes anunció que era el Mesías, al tiempo que prometió a sus seguidores que salvaría al mundo y redimiría a los hombres de sus pecados.
A los 33 años fue detenido y entregado a los fariseos y saduceos para ser juzgado como blasfemo y peligroso agitador público, pero Poncio Pilato lo mandó azotar y lo condenó a morir crucificado en el monte Calvario, muy cerca de Jerusalén. Como lo prometió a sus discípulos, Jesús resucitó y después de 40 días, subió al Monte de los Olivos y de ahí, ante la mirada de sus discípulos, ascendió al Cielo. De esta manera, sus apóstoles se fueron a predicar su Evangelio por el mundo.

El Cristianismo alteró el pensamiento religioso pues en esencia, Jesús es un Dios humanado, que habitó entre los hombres y a su muerte, asciende al Cielo para habitar a la derecha del padre celestial. El cristiano acepta por un voto de Fe, que todo el relato anterior es cierto y que sin lugar a dudas todo ocurrió así.
Desde el punto de vista de la Ética, el cristianismo obtuvo de los *Diez mandamientos* la ley fundamental con la que rige su pensamiento desde sus inicios, a demás de hacer hincapié en las enseñanzas morales que se ejemplifican con la vida de Cristo.

Patrística
A medida que el cristianismo se fue difundiendo, la reflexión y la crítica se elevó, a tal grado que inicia el periodo helenístico-romano.
Es en esta época, los discípulos de Jesús, los discípulos de los discípulos y así todos los que les siguieron, se encargaron de difundir una doctrina que interpreta en su dogmatismo que hay un solo Dios, integrado por tres personas: Padre, Hijo y Espíritu Santo. Que este Dios omnipotente y omnipresente creó el mundo, haciendo al hombre a su imagen y semejanza. Pero los pecados cometidos por la humanidad rompieron la unidad entre Dios padre y la humanidad, haciendo que con el nacimiento, muerte y resurrección de Jesús se restableciera la unidad del hombre con Dios.
De esta forma, el cristianismo invita a la imitación de la vida de Jesús, haciendo de este acto el camino para llegar al Cielo y habitar junto con él a la derecha de su padre.
Al paso del tiempo aparecen los primeros defensores del cristianismo, agrupados en tres periodos:

- Primer periodo (1-125 d. de C.): Padres Apostólicos, a esta época pertenecen: San Clemente de Roma, San Ignacio de Antioquia, San Policarpo de Esmirna, San Papías, etcétera.
- Segundo periodo (125-255 d. de C.): Los Apologistas, ellos defienden la fe cristiana y combaten los errores de los herejes, a este grupo de autores pertenecen: Arístides de Atenas, San Justino y San Ireneo.
- Tercer periodo (255-312 d. de C.): Los escritores griegos y latinos, son quienes analizan y profundizan en la verdad religiosa escribiendo tratados científicos que demuestran la solidez de la religión cristiana.

Edad de oro de los padres de la Iglesia
Al iniciar el siglo IV se dan las circunstancias históricas necesarias para que los padres de la Iglesia puedan realizar una síntesis del pensamiento pagano (griego) con el pensamiento filosófico cristiano, fue San Agustín quien realiza una de las primeras síntesis.


San Agustín
Tagaste, actual Suq-Ahras, Argelia 354, Hipona 430

Considerado uno de los padres de la Iglesia, teólogo, filósofo y moralista, ejerció una gran influencia en la concepción teológica de Occidente. Hijo de Patricio (un pagano) y Mónica (Santa), esta última fue la influencia determinante en su vida filosófica.
De niño su educación tuvo fundamentos cristianos, pero decepcionado, a los 16 años se dirige a la ciudad de Cartago, donde se alejará de su formación religiosa declarándose discípulo de Cicerón y practicante de retórica.
Durante su juventud se cuestionó repetidamente el porqué de la existencia del mal, con esta duda llega a las propuestas maniqueistas, las cuales sostienen que el mundo está regido por dos principios: el bien y el mal, la luz y las tinieblas.

Sin embargo, las propuestas maniqueistas dejan de ser de su interés, cuando San Agustín habla con Fausto (doctor maniqueo), para que le ayude a resolver sus inquietudes, y éste le contesta que "No puede resolver racionalmente todos los problemas que le plantea".
Posteriormente recibirá tres influencias:

- Los Neo-académicos, seguidores lejanos de Platón, conservan su preferencia por entablar discusiones para alcanzar la verdad.
- Ambrosio (obispo de Milán).
- Mónica (su madre). Ella lo llevará de regreso hacia la fe cristiana.

También se le reconoce como *Doctor de la gracia*, opositor del maniqueísmo, donatismo y del pelagianismo.

Textos de San Agustín:

Contra académicos
De beata vita
Soliloquios
De la Trinidad
De la naturaleza del bien
Confesiones
La ciudad de Dios

El pensamiento cristiano y el amor cristiano

El pensamiento cristiano, también llamado Teología, no puede ser considerado Filosofía, de la misma forma que no se puede afirmar que la religión, en un sentido general, sea Filosofía. Por tanto, en el pensamiento religioso, se plantea que el camino correcto de la vida es seguir los pasos marcados por Cristo, de esta forma, al morir se hará merecedor del perdón y de la gracia eterna.

Este es un concepto de amor sobrenatural, que proviene de Dios y se proyecta a los hombres, para que ellos a su vez lo brinden a sus semejantes.

Los grados del saber religioso

La jerarquía de los grados del saber para Platón describen la existencia de dos mundos, de ellos, el mundo de las ideas está por encima del sensible, pero, posteriormente Filón propone una jerarquía que invierte la propuesta por Platón, colocando los grados del saber como se muestra en el esquema de la derecha.

El Uno El Logos o Nous El alma del mundo

Este esquema fue modificado por San Agustín, adaptándolo al dogma cristiano, donde *"Dios, uno y trino, son esencia eterna, inmutable e infinita, idéntica a las tres divinas personas: El Padre, el Hijo y el Espíritu Santo".*

Con San Agustín se determinan nuevos grados del saber desde una influencia religiosa. Observe el cuadro de la derecha.

Teológico Místico De Santidad

La interpretación que San Agustín hace no es en línea recta como lo plantea la dialéctica, ya sea en forma ascendente o descendente, por el contrario, la entiende en forma circular, en el centro coloca a Dios y de él se desprenden: la creación y todas las realidades.

Por ello, Dios es concebido como:

1. Ser Supremo, creador y fuente del ser de todas las cosas.
2. La verdad suprema y luz intelectual, fuente de la verdad de todas las cosas.
3. La Bondad Suprema.

La escolástica

La filosofía cristiana alcanzó su madurez en este periodo, a él pertenecen filósofos como: San Anselmo, San Alberto, Magno, Santo Tomás de Aquino, San Buenaventura, Juan Duns Scoto, Guillermo de Occam, etcétera. De estos pensadores, el caso de Santo Tomás de Aquino es particularmente relevante.



Santo Tomás de Aquino Roccasecca, Aquino, prov. de Frosinone, 1226-abadía de Fosanuova, prov. De Latina 1274.

Nació en el castillo de Roccasecca, muy cerca del pueblo de Aquino, no muy lejano de Nápoles, en 1226. Esta región se ubica al sur de Italia, se caracterizó por incorporar a su cultura una gran influencia musulmana.

Perteneció a una familia de feudales, el menor de 12 hijos, sus primeros estudios fueron con los padres benedictinos en Montecassino, muy cerca del castillo de sus padres, pero los continúa en la Universidad de Nápoles, su inteligencia lo hace destacar entre sus compañeros; la orden de los Padres Dominicos recién se había fundado, por lo que al ingresar a esta orden recibió de su familia una rotunda oposición, de tal manera que llegó a ser secuestrado por sus hermanos mayores, quienes lo sorprenden por el camino, lo dejaron encerrado por dos años en el castillo donde nació para hacerlo cambiar de opinión sin llegar a lograrlo, sus hermanos intentan hacerlo pecar enviándole a una meretriz, pero Tomás la confronta amenazándola con quemarle la cara si se le acerca, por lo que la mujer huye.

Padre Dominico y maestro en Teología, profesó sobre todo en París, donde fue educado por Alberto el Grande, y fue ahí, donde se acercó a la filosofía aristotélica.

Recibió el doctorado en Teología en la Universidad de París, haciendo de su cátedra una de las más concurridas de la universidad.

Santo Tomás introdujo el pensamiento filosófico de Aristóteles en las universidades.

Obras de Santo Tomás *Suma teológica* *Metafísica*

Influencia aristotélica en Santo Tomás

Es indudable que Aristóteles determina el rumbo del pensamiento de Santo Tomás, en el campo de la lógica Aristóteles es considerado como el verdadero padre de su estudio. La lógica tiene como objetivo el estudio del concepto, del juicio y el proceso de raciocinio, lo que se interpreta como:

- **Concepto:** aprehensión que la inteligencia humana hace de la esencia o conjunto de determinaciones necesarias para hacer que una cosa sea tal cosa.
- **Juicio:** es la relación de conceptos, en la que se afirma o niega algo.
- **Raciocinio:** es el enlace de juicios para llegar a una conclusión.

Santo Tomás estaba totalmente convencido de que la filosofía aristotélica era completamente compatible con la fe cristiana, por ello adoptó muchas tesis aristotélicas, entre las que destacan:

- Teoría aristotélica del movimiento
- Composición hilemórfica de las sustancias naturales
- Distinción entre sustancia y accidentes
- Teoría de las cuatro causas

El saber teológico y filosófico

Poder distinguir entre un saber que proviene de la Teología y otro que surge de la Filosofía, fue motivo de análisis para Santo Tomás, él propuso la conducción hacia una concepción de un saber de orden natural (Filosofía) y otro de carácter sobrenatural (Teología), en el caso del saber filosófico, éste se basa en la investigación, mientras que el teológico es eminentemente una revelación.

La Teología presenta dos tipos, que Santo Tomás define como:

"Teología, que pertenece a la Sagrada doctrina, difiere, según el género, de aquella teología que se considera parte de la filosofía".

Con esta clasificación se derivan los grados que dan jerarquía al saber.

La jerarquía de los grados de saber

Los grados del saber propuestos por Santo Tomás, reflejan su inclinación por las interpretaciones realistas, para él, los grados por los que debe transitar el hombre son ascendentes, también se les ha llamado *movimiento especulativo de la inteligencia*, pero si el movimiento fuera descendente, se le llamaría *movimiento práctico de la inteligencia*.

SABIDURÍA
- Sobrenatural
  - Saber Teológico
- Natural
  - Saber Teológico Natural
  - Saber Filosófico
  - Saber Filosófico Especializado
  - Saber Práctico
  - Saber del Sentido Común

En este proceso de abstracción se va descubriendo el Ser, hasta llegar a la inteligencia pura que revela el Ser en cuanto Ser.

Los grados de abstracción

Del *movimiento especulativo de la inteligencia*, que ya había contemplado Aristóteles, se desprenden los grados de abstracción, con los que busca conducir el pensamiento cristiano hacia los niveles más altos del amor y la fe.

► **Primer grado**

A este grado corresponde la *Física*, en este grado se estudian a los seres como entes inseparables de la materia, que pueden ser puestos en movimiento. En este nivel se estudian las cualidades sensibles, aquellas que ponen a los seres en un devenir.

► **Segundo grado**

En el segundo nivel Santo Tomás de Aquino coloca las *Matemáticas*, la razón es el estudiar a los seres en tanto que son inmóviles, en tanto que independientes. En este grado se estudian los seres en cuanto a la cantidad.

► **Tercer grado**

En el tercer grado de abstracción, Santo Tomás considera que la *Filosofía* es el grado adecuado. La razón de ello es que la considera como teoría primera; puesto que estudia el Ser en cuanto Ser su esencia y propiedades.

La ética en la Summa teológica

En la *Summa Teológica*, Santo Tomás de Aquino aborda problemas relativos al fin y los valores morales, a la obligación y a la conciencia.

Para este filósofo, todos los seres tienen un fin prefijado, en palabras de Santo Tomás: *El objeto propio de la voluntad es el fin y el bien: por consiguiente, todas las acciones humanas, necesariamente, se ordenan a un fin. El bien o fin del hombre es Dios, objeto supremo de conocimiento.*

Sobre la **obligación moral** señala que es un eco de la **Ley eterna**, en ella se señala a Dios como fin de toda criatura; este plan de es propio de cada ser y se adapta naturalmente a su naturaleza, puesto que cada ser posee una inclinación hacia lo divino.

También hace referencia a la **conciencia moral,** sobre ella argumenta que la ley natural humana es una participación de la ley eterna que se adecua a la criatura racional, misma que se da a conocer por medio de la razón. La capacidad intelectual ordena al hombre que apunte hacia Dios, aunque respetando su naturaleza de ser libre.

Las **virtudes morales** se explican como un sistema, prudencia, fortaleza, justicia, templanza, son estudiadas. De ellas destaca la justicia.

Modernidad y pensamiento Kantiano

La modernidad ética se inicia en el Renacimiento, y se prolongará hasta principios del siglo XIX, esta época se caracteriza por considerar al hombre como el centro de todas las manifestaciones de la cultura (política, ciencia, moral, etcétera). Sus características distintivas son:

- *Sociedad*: la clase social predominante es la burguesía, el comerciante, el banquero, etcétera, desplazando a la Iglesia, el terrateniente y el guerrero.
- *Ciencia*: la ciencia remplaza a la religión y se convierte en el centro del pensamiento del hombre.
- *Filosofía*: se orienta hacia el racionalismo.
- *Política*: se crean los estados modernos, de esta forma se termina con la sociedad feudal.
- *Religión*: la Iglesia deja de ser el poder central.

Ética formal

Se conoce como *ética formal* a la doctrina moral creada por Emmanuel Kant, se llama ética formal porque prescinde de elementos empíricos y se funda exclusivamente en la razón.



Emmanuel Kant Königsberg 1724-id. 1804.

Este filósofo alemán del siglo XVIII atestiguó las grandes trasformaciones europeas, entre ellas la Revolución Francesa y la Independencia de los Estados Unidos. De naturaleza física enfermiza y contra las predicciones vivió largo tiempo. Fue profesor y rector de la Universidad de Königsberg, su ciudad natal, llevó una vida particularmente sobria en todos los aspectos.

En Europa se vivía el Siglo de las Luces, llamado así porque el pensamiento ilustrado se desarrollaba, aparecían pensadores como Rousseau, Smith, Leibniz, Newton, Kant y muchos más. Para Kant, la Ilustración se define en la frase siguiente: **"Ten valor de servirte de tu propia razón".** Hay que recordar que durante este periodo histórico, se impone la razón a la fe.

En este ambiente cultural aparece la Enciclopedia, cuya valía radica en ser el instrumento de lucha que se opuso a las ideas tradicionales en política, sociedad, economía, e incluso, religión. Uno de los creadores de la Enciclopedia fue Diderot: él define su obra como: "El carácter de un buen diccionario debe ser el de cambiar la manera general de pensar", dejando de manifiesto la actitud crítica de la Ilustración.

A su filosofía también se le ha llamado Criticismo, en ella expone las pretensiones de alcanzar la verdad de la metafísica tradicional, pero conserva como camino el saber racional a la par del conocimiento científico, evitando en todo momento el escepticismo y le otorga un valor total a la ley moral.

Obras de Emmnuel Kant

La Crítica de la razón pura
La Crítica de la razón práctica
La Lógica trascendental
La Crítica del juicio
Los Prolegómenos a toda metafísica futura
La Metafísica de las costumbres
La Religión dentro de los límites de la razón
La Paz perpetua

La Ética para Kant, se encuentra principalmente en dos obras:

Fundamentación metafísica de las costumbres	Descubre y expone el principio fundamental de la moralidad y critica su posibilidad.
Crítica de la razón práctica	Habla sobre el principio de la moralidad y critica su posibilidad, pero desde un sentido más técnico y filosófico.

Los imperativos y *La crítica de la razón práctica*

En *La Crítica de la razón práctica*, Kant establece los fundamentos que explican los hechos de la vida moral partiendo de la conducta del hombre. A lo largo de la vida se aprenden formas de comportamiento que se resumen en frases como: "No robarás", "Amarás a tu padre y madre", etc., estos son imperativos, órdenes que no dejan lugar a dudas y cuya observancia es obligatoria. Este filósofo difiere en esta concepción clásica, pues él considera que los fundamentos de Epicuro y Platón son inconsistentes, ya que ellos argumentan:

- **Epicuro.** La interpretación que hace, parte de lo que **sucede de hecho** en la naturaleza, para decir lo que se **debe hacer** en la acción.
- **Platón.** Argumenta que saber qué es el mundo metafísico y entender que las ideas son racionales y que el mundo de las ideas debe servir de modelo, conducen al hombre, sin lugar a dudas, a orientar su vida por la razón.

Kant llama a estas posturas: **morales heterónomas,** pues en ambos casos se parte de lo que **es**, para llegar a lo que se ***debe hacer,*** lo que constituye un error, ya que dichas posturas morales parten de algo que en esencia no es moral, además de que se basan en una deducción lógica falaz. Kant resume su postura argumentando la imposibilidad de establecer juicios de valor de existencia, pues "no es posible decir lo que debe hacerse a partir de lo que se hace de hecho". La razón indica que de lo que es, sólo se puede deducir lo que es, no lo que debe ser.

Para Kant, lo opuesto a la moral heterónoma es la moral autónoma, la que define como: "La autonomía de la voluntad es el único principio de todas las leyes morales y de los deberes conforme a ellas", por lo que sus principios fundamentales son: voluntad libre y deber, pues cada persona "es lo que es", o bien, "debes lo que debes".

Este pensador explica la diferencia entre la moral heterónoma y autónoma considerando los imperativos, hipotéticos y categóricos.

- **Los imperativos hipotéticos**

Dependen de una hipótesis inicial para llegar a un resultado obligado, aunque su planteamiento es moralmente dudoso, e indudablemente corresponden a la moral heterónoma, sirva como ejemplo el siguiente juicio:

"Si robo, seré encarcelado"

- **Los imperativos categóricos**

En sus enunciados, proponen una moral totalmente autónoma, fundamentada en la libertad absoluta de la voluntad y en la ley del deber moral puro. Kant dice al respecto:

"Obra de tal modo, que la máxima de tu voluntad pueda valer siempre, al mismo tiempo, como principio de una legislación universal"

Ética de los propósitos

En la ética formal es muy importante la **autonomía** con que se reviste todo acto ético, para Kant, la validez de un acto moral no se encuentra en la acción misma, sino en la voluntad que determina dicho acto. La moralidad se encuentra en la voluntad, está en el sujeto y no en la acción, en la concreción del acto. Por ello Kant distingue tres tipos de acciones:

- **Acciones conforme al deber**. Son aquellas donde el individuo actúa por temor o por inclinación a la ley, no por respeto al deber. Por ejemplo, cuando se contrae una deuda y se paga solo por temor a las consecuencias.
- **Acciones conforme al deber y por deber.** Son las que se realizan guiado por la *buena voluntad*. Por ejemplo, cuando se paga una deuda porque es obligación.
- **Acciones contrarias al deber**. Son aquellas en las que no se realiza la acción ni por temor a las consecuencias, ni por obligación, es en resumen una acción inmoral. Como aquel hombre que no paga jamás sus deudas.

Contemporáneo

Para concluir este tema abordaremos brevemente algunas corrientes contemporáneas (siglos XIX y XX), durante esta época ocurrieron múltiples cambios que marcaron la historia actual, si bien es cierto que es un momento donde la técnica se desarrolló a pasos agigantados, también se debe reconocer que los conflictos armados han sido en extremo violentos.

Aún así, las propuestas filosóficas que se iniciaron a final del siglo XIX continuaron evolucionando durante el siglo XX, a continuación se presentan las más importantes.

Corrientes filosóficas	Concepto general	Representantes
Existencialismo	Doctrinas filosóficas que afirman que la existencia precede a la esencia.	Miguel de Unamuno, Karl Jaspers, Gabriel Marcel, Heidegger y Jean – Paul Sastre.
Pragmatismo	Teoría filosófica de la verdad que define a ésta por su utilidad. Sigue la línea del empirismo inglés.	Charles Pierce y William James.
Materialismo	Rechaza la existencia del espíritu, por tanto los conceptos: alma, mundo inteligible y Dios no son posibles. El materialismo es dialéctico, pues la realidad no es estática, sino por el contrario, evoluciona y cambia constantemente.	Karl Marx

Existencialismo
Este concepto lo utilizó por vez primera Heidegger, con él designa a la forma de pensamiento que reacciona contra el racionalismo que se ha manifestado en diversas épocas de la historia de la Filosofía.
Para Heidegger y Sartre, el existencialismo se origina en la existencia humana tomada en su totalidad y considera al individuo ligándolo con el mundo y la sociedad. De esta forma, se deja de lado todo principio universal, pues el existencialismo busca resolver por la sola consideración de la existencia individual, los problemas del origen, de la esencia y del significado de la vida.
Este significado no se deriva de la naturaleza humana considerada en sí misma, puesto que el hombre, por su inclinación a pensar en el futuro, no es por sí mismo sino un puro vacío, en resumen, un "no ser"; lo que hace que la vida del hombre tenga un sentido es el hecho de que cada individuo se encuentra comprometido en toda situación presente y actual; y este compromiso efectivo es el que crea para él aquellos valores que dan sentido a su vida.


Sartre

Obras:
El Ser y la nada
La Náusea
(obra literaria)


Heidegger

Obras:
Introducción a la metafísica
El Ser y el tiempo

Pragmatismo
Tiene su origen en un artículo *Cómo clasificar nuestras ideas*, publicado en 1878 por Charles Pierce, en él se afirma que *toda la función del pensamiento es producir hábitos de acción.*
La tesis central radica en la acción y la utilidad; la verdad, según el pragmatismo, consiste en la utilidad. De ello se deriva considerar que la veracidad de las ideas, o de una conducta ética, consiste en el buen éxito que puedan tener. El pensamiento pragmático cambia el sentido de la verdad tradicional y lo hace relativo a una casuística de la producción y de la utilidad.
En el pragmatismo se considera que toda concepción abstracta tiene sentido sólo y en cuando influye en la experiencia concreta. Presupone que toda realidad tiene un carácter práctico, y éste se manifiesta del modo más eficaz en la función de la inteligencia.
El valor de las ideas se obtiene de su sentido práctico, puesto que todo pensamiento es un instrumento para resolver problemas inmediatos. Las ideas tienen valor en la medida en que desembocan en la experiencia.
Para finalizar, para el pragmatismo, los hombres están constituidos para actuar más que para teorizar.

Marxismo


Karl Marx
Tréveris 1818,
Londres, 1883

Hablar de la vida del filósofo alemán requiere considerar los momentos distintivos que la integran, ya que en este periodo se vivía en Europa el vertiginoso desarrollo de la economía capitalista. Con ello, la sociedad comenzaba a experimentar el costo social que implican las industrias; las relaciones laborales de la nueva economía, con un capitalismo represor y forjador de obreros explotados. Todas estas modificaciones ocurrían, mientras Marx era testigo.
Hasta el año de 1836 transcurre su infancia y juventud en una familia de ascendencia judía. Marx olvidó lo que aprendió en este periodo y se convierte en un joven protestante liberal, poseedor de un pensamiento religioso casi nulo.

De 1836 a 1848 sigue las enseñanzas filosóficas de Hegel, entablando amistad con otros jóvenes seguidores de esa misma corriente. De 1845 a 1848 asume una actitud política revolucionaria que lo lleva a escribir El Manifiesto del Partido Comunista.

Entre 1848 y 1870, Marx ocupa todo su pensamiento y esfuerzos en la lucha por los trabajadores y funda la **"I Internacional"** (1864), escribe *El Capital*, donde critica la economía política.
Como filósofo materialista, ateo y progresista, refleja en sus obras una marcada influencia de:

- La filosofía de Hegel
- La teoría política de los socialistas franceses
- La economía política británica

Obras de Marx
El Capital
El Manifiesto del Partido Comunista (escrito con Engels)
Ideología alemana
La Sagrada Familia
Miseria de la Filosofía
Las luchas de clases en Francia

El materialismo
En el materialismo se rechaza la existencia del espíritu, por tanto los conceptos: alma, mundo inteligible y Dios no son posibles. Para Marx el materialismo es dialéctico, pues la realidad no es estática, sino por el contrario, evoluciona y cambia constantemente.
La dialéctica es la ley del cambio de la realidad, esta ley se ajusta a la propuesta de Hegel, quien contempló: tesis – antítesis = síntesis. La aplicación más importante de esta fórmula se encuentra en el concepto "Lucha de clases", Marx afirma que "siempre han existido diversas clases sociales, siempre en pugna; según predomina una u otra, se llega a la síntesis", esta síntesis se acelera con las luchas armadas (revolución) por lo que la lucha de clases es el motor de la historia.
En consecuencia, para el pensamiento marxista, la revolución es un medio para establecer el cambio en las sociedades capitalistas:

"Los comunistas no tienen por qué guardar encubiertas sus ideas e intenciones. Abiertamente declaran que sus objetivos sólo pueden alcanzarse derrocando por la violencia todo el orden social existente. Tiemble, si quiere, las clases gobernantes, ante la perspectiva de una revolución comunista. Los proletarios, con ella, no tienen nada que perder, como no sea sus cadenas. Tienen, en cambio, un mundo entero que ganar.
¡Proletarios de todos los países, uníos!

Manifiesto del Partido Comunista, Carlos Marx

Doctrina de la enajenación
Marx define la enajenación como una forma de vida pasiva, dicho estatismo se dirige hacia el hombre mismo y hacia todo lo que le rodea. La enajenación se observa fundamentalmente en temas religiosos y económicos, para lograrlo, se inventan seres que el hombre considera reales, los cuales facilitan el proceso para esclavizar a las sociedades, el fin de todo es controlar.
La idea de que Dios exista es totalmente rechazada argumentando que: Dios no crea al hombre a su imagen y semejanza, por el contrario, los hombres crean a sus dioses para proyectar sus deseos y fantasías.

El Capital
Para entender la evolución y formación económica de la humanidad, Marx establece que la historia tiene su base en las relaciones económicas y sociales, mientras que la religión, el arte y la Filosofía son la superestructura que resulta de la estructura económica.
Como estructuras económicas distingue:

- **Sistemas productivos que dependen de las estructuras patriarcales**. Propiedad familiar de tipo primitivo.
- **Sistemas productivos que dependen de la esclavitud**. El trabajo de los esclavos es la base de la economía y se dan las condiciones para iniciar el desarrollo del arte, la ciencia y la Filosofía.
- **Sistemas productivos que dependen de la economía feudal**. El señor feudal obtiene su sustento y riqueza de la explotación de sus siervos.
- **Sistemas productivos que dependen de la economía capitalista**. Marx explica que el trabajador se convierte en capital viviente, pues sólo posee su fuerza de trabajo, mientras que la riqueza se queda en manos de los dueños de las fábricas, este proceso se resume: "La explotación del hombre por el hombre".

Ejercicios

1. Lee el siguiente texto, al terminar contesta la pregunta.
   La ética presenta un eudemonismo idealista, es decir, solo se logra con la práctica de la virtud y presenta un intelectualismo ético, por ello es profundamente racionalista.
   ¿A qué pensamiento filosófico pertenece el texto?
   a) Ética sofista
   b) Ética socrática
   c) Ética platónica
   d) Ética aristotélica

2. Lee este concepto:
   En palabras de Platón, el alma está formada por tres partes: ____________, ___________ y_____________, cada parte posee una virtud que la identifica.
   ¿Qué palabras completan correctamente el texto
   a) Fe, esperanza y caridad
   b) Sabiduría, valor y templanza
   c) Inteligencia, esperanza y templanza
   d) Inteligencia, voluntad y sensibilidad

3. Lee el siguiente texto y contesta la pregunta.
   "La felicidad consiste en el ejercicio ininterrumpido de una vida activa contemplativa o teorética, que es superior a la vida de placeres y diferente a la vida de política que busca honores."
   ¿Qué filósofo es el autor de este concepto de felicidad?
   a) Platón
   b) Sofistas
   c) Sócrates
   d) Aristóteles

4. Lee el siguiente texto, al final contesta la pregunta.
   El objeto propio de la voluntad es el fin y el bien: por consiguiente, todas las acciones humanas, necesariamente, se ordenan a un fin. El bien o fin del hombre es Dios, objeto supremo de conocimiento.
   ¿A qué se hace referencia en el texto?
   a) Habla sobre la ideología medieval
   b) Propone el concepto de modernidad
   c) Presenta al hombre como un sujeto racional
   d) Habla de los problemas relativos al fin y a los valores morales

5. Relaciona las columnas del cuadro siguiente

1. Materialismo	A) Teoría filosófica de la verdad que define a ésta por su utilidad. Sigue la línea del empirismo inglés.
2. Pragmatismo	B) Rechaza la existencia del espíritu, por tanto los conceptos: alma, mundo inteligible y Dios no son posibles. El materialismo es dialéctico, pues la realidad no es estática, sino por el contrario, evoluciona y cambia constantemente.
3. Existencialismo	C) Doctrinas filosóficas que afirman que la existencia precede a la esencia.

   a) 1A, 2B, 3C
   b) 1B, 2C, 3A
   c) 1B, 2A, 3C
   d) 1C. 2A, 3B

3 Derechos humanos

Propósitos: el alumno conocerá los derechos humanos.

Hablar del origen, definición y practicidad de los derechos humanos es materia de reflexión, ya que siempre encontraremos posturas encontradas a favor y en contra.
Partimos de la *Declaración Universal de los Derechos Humanos* que contempla estos artículos:



Artículo 1. Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, dotados como están de razón y conciencia, deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2. Toda persona tiene todos los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición.

Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona, tanto si se trata de un país independiente, como de un territorio bajo administración fiduciaria, no autónomo o sometido a cualquier otra limitación de soberanía.

Artículo 3. Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4. Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre, la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.
De estos artículos podemos concluir que los derechos humanos tienen su **origen** en la naturaleza humana, por tanto es la comunidad quien los otorga, somos nosotros los responsables de promover su observancia y respeto, así mismo debemos castigar a quien viole estos derechos.
Los derechos establecidos poseen un **alcance**, por su contenido sabemos que son de carácter universal, son valederos para todos los seres humanos de todos los tiempos, nacionalidades, razas, cultos e ideologías existentes.
Su **eficacia** radica en la postura que se tome respeto a ellos, por una parte adoptar la cultura de los derechos humanos, ha erradicado muchos problemas como la tortura, la privación ilegal de la libertad, la explotación, entre otros.
Pero para muchos también han servido para defender a delincuentes que escudándose en los derechos humanos, burlan la leyes y son liberados, además de que persisten nuevas formas de esclavitud, la discriminación persiste, no es posible el libre tránsito entre países, solo por mencionar algunos casos.

La cultura de los derechos humanos
Hemos señalado que los derechos humanos nacen en la comunidad, nuestro primer contacto con ellos es en la familia, es común que durante nuestra infancia hagamos pactos familiares de respeto y convivencia, por ejemplo levantar el plato al terminar de comer, si lo hacemos recibimos una felicitación y poco a poco se va convirtiendo en una conducta habitual; pero si no lo hacemos recibimos una sanción que puede ir de un llamado de atención, hasta un castigo.
Al crecer trasladamos estos convenios a nuestra vida en comunidad, como ciudadanos gozamos de derechos y obligaciones otorgados por la ley, en nuestra vida diaria respetamos los derechos y reclamamos si éstos son vulnerados.
Por ello, la creación de instituciones que vigilen el respeto a nuestros derechos humanos es una práctica en las sociedades actuales.

Violación de los derechos humanos
Existen muchas formas de violación y explotación a nuestros derechos humanos: desamparo a los niños, rechazo, prostitución, adicciones, corrupción, discriminación a mujeres, niños, migrantes, enfermos de VIH/SIDA, etcétera. Veremos algunas de ellas.

Corrupción
La corrupción facilita, perpetúa e institucionaliza las violaciones a nuestros derechos humanos, por ello combatirla resulta tan importante. Recientemente se forma la organización **Transparencia Internacional** con la finalidad de luchar contra la corrupción y crear conciencia en la población de los efectos negativos que ejerce.
Las leyes de trasparencia hacen posible que los ciudadanos sepamos el destino de los recursos públicos, de esta manera se controla y vigila el uso del dinero estatal.
Ahora bien, a nivel ciudadano no basta con no violar las leyes, o rendir cuentas de los recursos públicos, es necesario que los funcionarios públicos realicen su labor y cumplan las tareas que la ciudadanía les encomendó, puesto que se depositó en ellos la confianza y deben cumplir a cabalidad su tarea sin abusar del cargo.

Discriminación
Al revisar la historia encontramos múltiples ejemplos de discriminación, el Holocausto judío, el Apartheid en Sudáfrica, la masacre de Ruanda, la conquista de América en el siglo XVI, por mencionar algunos casos.



La palabra **discriminación** hace referencia a la actitud desfavorable, agresiva o despectiva de una persona o grupo social hacia otros, dicha actitud es motivada por diferencias de tipo religioso, físico, étnico, cultural, educativo, ideológico, sexual, etcétera.
Se manifiesta en diversas conductas que van desde la exclusión, a los insultos, agresiones físicas, falta de oportunidades, segregación, prohibición del libre tránsito, incluso puede llegar a ocasionar guerras.

Se conoce como **prejuicio racial** aquel que tiene como raíz el que una persona o grupo se crea superior por sus rasgos físicos, tal es el caso de la política del *apartheid.*
Los prejuicios religiosos surgen cuando los seguidores de una religión creen que la suya es la única verdadera y que las demás son falsas, con este argumento se creen con el derecho a combatirlas, tal es el caso del conflicto Árabe-Israelí.

Niños de la calle
Durante 1980 y 1990, en el marco de los estudios del Sistema Nacional para el Desarrollo Integral de la Familia (DIF), se llamó *niños de la calle,* a los menores que habían roto comunicación con su familia, no trabajaban y propiamente vivían en la calle.
Estos niños, provienen de zonas urbano-marginales y de diferentes estados de la República Mexicana. Suelen dejar su casa entre los 5 y 14 años, fueron abandonados o expulsados de su hogar a causa del hacinamiento, abuso sexual, violencia familiar, abandono, adicciones, pobreza y tráfico de estupefacientes.
Los niños en situación de calle carecen de servicios, satisfactores, cuidados y oportunidades que establece la Convención de los Derechos del niño.
Es obligación del Estado y de la sociedad la procuración de garantías para estos niños, ya que no están en las calles por vagos o flojos, son el resultado de equivocadas políticas económicas y de la falta de responsabilidad y compromiso de los adultos que son responsables de su cuidado.

Ejercicios

1. Lee el siguiente texto y contesta la pegunta.
   "Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, dotados como están de razón y conciencia, deben comportarse fraternalmente los unos con los otros."
   ¿A qué artículo de la Declaración Universal de los Derechos Humanos corresponde el texto?
   a) Artículo 1
   b) Artículo 2
   c) Artículo 3
   d) Artículo 4

2. Lee el siguiente texto y contesta la pregunta.
   "Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona".
   ¿A qué artículo de la Declaración Universal de los Derechos Humanos corresponde el texto?
   a) Artículo 1
   b) Artículo 2
   c) Artículo 3
   d) Artículo 4

3. Lee el siguiente texto y contesta la pregunta.
   "Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre, la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas."
   ¿A qué artículo de la Declaración Universal de los Derechos Humanos corresponde el texto?
   a) Artículo 1
   b) Artículo 2
   c) Artículo 3
   d) Artículo 4

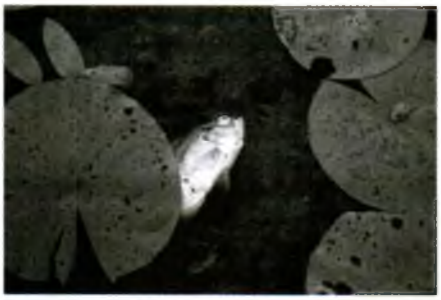
4. Lee el texto, y al terminar contesta la pregunta.
   Es la actitud desfavorable, agresiva o despectiva de una persona o grupo social hacia otros, dicha actitud es motivada por diferencias de tipo religioso, físico, étnico, cultural, educativo, ideológico, sexual, etcétera.
   ¿A qué concepto se hace referencia en el texto?
   a) Corrupción
   b) Discriminación
   c) Niños de la calle
   d) Derechos humanos

5. Lee la siguiente situación y contesta la pregunta.
   Fátima necesita obtener una copia de su cédula profesional, en la ventanilla de trámite le dicen que tardará 30 días, pero que si quiere agilizar el trámite tendría que ofrecer un incentivo económico al empleado que la atiende.
   ¿Qué se ejemplifica en esta situación?
   a) Un acto de corrupción
   b) Un acto de discriminación
   c) Un acto de abuso de autoridad
   d) Un atentado a los derechos humanos

4 Desarrollo sustentable

Propósitos: el alumno estudiará el conceptos de Desarrollo sustentable.

En la actualidad muchos países están preocupados por implantar modelos de *desarrollo sustentable*, recibe este nombre un intento de conciliar la aspiración de los hombres por alcanzar los bienes que la tecnología ofrece, pero por otro lado, busca mejorar y conservar el medio ambiente para que el presente y el futuro que se le heredará a las siguientes generaciones sea provechoso en materia de medio ambiente. De esta forma se busca frenar el deterioro ambiental, la escasez de agua, la extinción de especies, entre otros problemas en materia ecológica.



La Ética es responsable de proponer valores y fundamentar teorías que procuren alcanzar el equilibrio, o conciliación entre el progreso industrial y la conservación del medio ambiente.
El desarrollo sustentable nos lleva a replantear nuestros valores, a valorar cosas como el uso de nuevas tecnologías y la satisfacción de necesidades humanas que sean indispensables para el bienestar.
Si bien es cierto la comunicación es importante, en un proyecto de desarrollo sustentable, la utilización discriminada de aparatos telefónicos portátiles se convierte en un problema cuando deben desecharse ya que son fuente importante de contaminación.

Ejercicios

1. Lee el texto, y al terminar contesta la pegunta.
   "Es un intento de conciliar la aspiración de los hombres por alcanzar los bienes que la tecnología ofrece, pero por otro lado, busca mejorar y conservar el medio ambiente para que el presente y el futuro que se le heredará a las siguientes generaciones sea provechoso en materia de medio ambiente."
   ¿A qué concepto hace referencia el texto anterior?
   a) Ecología
   b) Medio ambiente
   c) Desarrollo sustentable
   d) Contaminación residual

2. Lee este texto y al terminar contesta la pregunta.
   La ____________________ es responsable de proponer valores y fundamentar teorías que procuren alcanzar el equilibrio, o conciliación entre el progreso industrial y la conservación del medio ambiente.
   ¿Qué palabra completa el texto?
   a) ética
   b) Filosofía
   c) Ecología
   d) naturaleza

3. Lee la siguiente situación y contesta la pregunta.
   Los proyectos de ecoturismo donde el respeto al medio ambiente y el trabajo de las comunidades locales se manifiesta, son ejemplo de un trabajo colectivo comprometido y responsable con la naturaleza.
   ¿Qué se ejemplifica en esta situación?
   a) Ecología
   b) Medio ambiente
   c) Desarrollo sustentable
   d) Contaminación residual

5 Clasificación de los valores

Propósitos: el alumno estudiará la clasificación de los valores y sus conceptos.

Axios, palabra griega que se traduce como **valor**, utilizar la palabra valor implica una serie de concepciones tan diversas, que van desde un objeto altamente estimado por su significado emocional, pasando por bienes monetarios contenidos en una cuenta bancaria, e incluso, puede hablarse de actos humanos que se consideran trascendentes, o bien, de juicios que permiten establecer la diferencia entre lo bello, bueno, verdadero, fuerte, etcétera.
A la Ética le interesa analizar los valores morales, tales como la justicia, honestidad, fidelidad, lealtad, bondad, ,entre otros, y para ello se apoya en la *axiología* o tratado de los valores, misma que estudia los valores buscando de llegar a su esencia.



Lo bueno, bello, verdadero, santo, sublime, etcétera, son ejemplos de valores que la humanidad ha perseguido a lo largo de su historia, el hombre es un ser axiológico, por ello valora el mundo que lo rodea. Los valores dirigen nuestra conducta de manera decisiva, le dan sentido a nuestras vidas de manera individual y social.
Constantemente hacemos *juicios de valor*, cada juicio nos indica si los actos que realizamos concuerdan con las normas o reglas que regulan nuestra vida en sociedad. Estos juicios tienen una implicación moral, por ejemplo si decimos *Enrique es justo*, hacemos un juicio de valor, mientras que un juicio de hecho es *hace mucho calor.*

La existencia de los valores
Los valores existen en un mundo aparte y autónomo, es decir, no existen de manera física ya que no son cosas. Esta realidad supera la realidad material con la que acostumbramos vivir, por ello, hablar de la existencia de los valores ha generado diferentes corrientes, las más relevantes son la corriente subjetivista de los valores y la corriente objetivista de los valores, ambas se explicarán más adelante.

El valor económico
Al pensar en la aplicabilidad del concepto valor, se debe partir de lo que puede ser considerado como verdaderamente valioso, cuál es su utilidad y cuáles son los requisitos que debe cubrir para poder alcanzar este status. En este sentido, es pertinente definir las diversas posibilidades de valores existentes y qué las distingue entre sí.
El término valor aplicado a la economía, fue utilizado por Marx, siendo él quien proporcionó las características esenciales que lo distinguen. Pero la explicación ofrecida por este filósofo es determinante. Para entender en forma general qué es un valor, su exposición parte de explicar que un **objeto es útil** para el hombre cuando **satisface una necesidad**, por lo que tiene un **valor de uso.** Un ejemplo es un lienzo de seda, que adquiere valor en el momento que puede ser utilizado por sus características sensibles o materiales. Su valor de uso sólo existe, cuando la tela propiamente es utilizada en la confección de un objeto (mercancía).
En el ejemplo anterior están los dos elementos esenciales del valor; por una parte, las propiedades materiales de la seda como objeto, y por el otro, se encuentra el valor que le proporciona el sujeto que usa la mercancía.
De lo anterior se concluye que el valor de uso de un objeto natural sólo es posible para el hombre, pues él como ser social lo sabe apreciar. El objeto posee propiedades que lo distinguen en sí mismo, sólo adquiere un valor estimativo práctico, cuando es apreciado por el hombre.
Para que un objeto tenga valor de uso es necesario que sirva para satisfacer una necesidad humana, independientemente si es producto natural o es el resultado del trabajo humano. Pero cuando dicho producto también puede ser intercambiado, en ese momento adquiere el carácter de mercancía y, en consecuencia, adquiere un doble valor: **valor de uso y valor de cambio**. El valor de cambio de una mercancía se obtiene al compararlo con otras mercancías y no tiene que ver con el uso que se le vaya a dar, pues no importa la necesidad que pueda satisfacer, lo que interesa es el valor de cambio para el hombre.

En las sociedades capitalistas, donde el mercado rige el precio de una mercancía, para fijar su valor monetario, se evalúan las propiedades útiles, el trabajo necesario que implicó que dicha mercancía y la relación que tiene con las necesidades del hombre.
El valor de uso y de cambio de una mercancía está determinado por la relación que guarda con el hombre, ya sea con una propiedad humana o social.
Para Adolfo Sánchez Vázquez el valor se define como:

"El valor no lo poseen los objetos de por sí, sino que éstos lo adquieren gracias a su relación con el hombre como ser social pero los objetos, a su vez, sólo pueden ser valiosos cuando están dotados efectivamente de ciertas propiedades objetivas"

Subjetivismo

Volviendo al ejemplo inicial, un lienzo de seda adquiere valor cuando un hombre como ser social se interesa en él, proporcionándole un valor de uso y cambio, pero, considerarlo así es totalmente subjetivo, puesto que limita el valor de lienzo a un estado psíquico subjetivo, es decir, a una vivencia.
La subjetividad de la relación entre el objeto y sujeto, radica en que el hombre se dé cuenta de que hay una relación psíquica que le da valor a las cosas por el deseo o necesidad de poseerlas, haciendo que su posesión sea lo mejor para él.
El subjetivismo argumenta de manera acertada que el valor del objeto se traslada al sujeto, de tal forma que el sujeto es afectado si posee dicho objeto o no. Por ejemplo, la adquisición de un cuadro, sólo tiene importancia en la medida de la satisfacción que proporciona a su propietario la certeza de saber que es suyo.
En la explicación sobre el valor subjetivo de las cosas no se considera que los objetos poseen propiedades naturales o creadas por el hombre que pueden inducir al mismo hombre a considerar que el objeto posee valor en sí mismo. Tampoco contempla que el hombre, como sujeto social, sigue los lineamientos que la sociedad a la que pertenece le marca, y como individuo pertenece a una época histórica que lo determina.

Objetivismo

El subjetivismo axiológico fue propuesto por autores como R. B. Perry, I. A. Richards, Charls Stevenson y Alfred Ayer, en oposición al planteamiento del subjetivismo, autores de la filosofía clásica como Platón o autores alemanes como Max Scheler y Nikolai Hartman, quienes afirman que "los objetos son valiosos por sí mismos, independientemente de la relación que pudieran o no, establecer con el sujeto".
Para el objetivismo existen dos tesis fundamentales que lo caracterizan de manera definitiva:

La distancia absoluta que existe entre el valor que se le da a un objeto y la realidad del valor que posee, frente a los bienes en los que se encarna dicho valor. La afirmación anterior se sustenta en el hecho de que:

- Los valores son permanentes en sí mismos, por lo que son inmutables, puesto que cambian con el tiempo, algo que no ocurre con las cosas. También son absolutos, imperecederos e incondicionales.
- Los valores son independientes de los bienes que pudieran poseerlos, ya que pueden existir sin que se encuentren en objetos reales.
- Los bienes sólo son importantes por el valor que encarnan.
- La existencia de los valores se interpreta como un ideal a alcanzar.

La independencia del valor del objeto en relación de cualquier sujeto que pudiera llegar a poseerlo. De ésta, la segunda tesis se deduce que los valores:

- Los valores existen en sí y para sí, y no para el hombre.
- Los valores no requieren ser representados en bienes.
- No existen cambios históricos o inadvertencia de la importancia que tienen los valores que afecten la existencia intemporal, incondicionada y absoluta de los valores.

Objetivismo y subjetivismo

Si se comparan las características que distinguen el objetivismo frente al subjetivismo, encontraremos que, existe una oposición radical entre la concepción que se tiene entre el: **valor–bien** y **valor–existencia humana.** Entre ello, hay que recordar que el objetivismo le otorga al valor un carácter absoluto, incondicionado e intemporal. Mientras que para el subjetivismo el valor existe cuando el hombre lo otorga. En ambos casos (objetivismo y subjetivismo) no se logra desentrañar una explicación del modo de ser de los valores, pues no pueden ser reducidos a vivencias humanas (subjetivismo), o bien, a una existencia independiente y autónoma (objetivismo). El hombre crea los valores, y los bienes que representan, en la sociedad que vive. Los valores son creaciones humanas, que sólo existen y son realizables por y para el hombre.

Clasificación de los valores



Hemos dicho que los valores son intangibles, que los adquirimos a lo largo de nuestra vida y se convierten en el motor de nuestras acciones, ya que actuamos en función de ellos, por lo que en cada situación consideramos que tan digna de aprecio y estimación es para llevarla a cabo o no.
Un ejemplo es el amor, damos muestras de amor a nuestros seres queridos porque valoramos el amor, apreciamos ese sentimiento y por ello lo preservamos.
El amor por nuestra pareja nos lleva a valorar su amor y estimamos profundamente su presencia.

Valoramos porque vivimos un proceso en el que intervienen dos factores:



Valoramos el amor porque creemos en él, no obstante habrá ocasiones en las que creamos pero no lleguemos a apreciar o viceversa.
Por ejemplo, es posible que creamos en el valor de la independencia, pero por diversas circunstancias no se aprecia, la razón es que es más cómodo depender de otros y se vive a expensas de otros por conservar la seguridad que da su protección.
Cuando no existe congruencia entre lo que se cree y se aprecia, es importante reflexionar el porqué, de esta forma se tomarán las decisiones más justas para dirigir nuestra vida.
Existen diversas formas de clasificar los valores, la más pertinente es considerar un agrupamiento por categorías, esta forma de ordenamiento facilitará su comprensión

Categorías de los valores

- Atendiendo a su función
  - Valores finos o supremos
    - Nos remiten a lo que se estima por sí mismo, como fin último o supremo. Por ejemplo, alcanzar la felicidad.
  - Valores medios o instrumentales
    - Valor de las cosas u objetos, útiles para lograr los valores fines o supremos. Por ejemplo, un disco es un valor instrumental si tu valor fin es el arte musical.
- Atendiendo a su alcance
  - Valores individuales
    - Mejoran la vida de cada persona como sujeto moral. Por ejemplo, la amistad, la valentía, la honestidad.
  - Valores sociales
    - Mejoran la vida en sociedad. Por ejemplo, la justicia, paz, solidaridad.
  - Valores universales
    - Se consideran válidos por todos, sin importar la época o lugar. Por ejemplo, el amor.
  - Valores relativos
    - Se consideran válidos para un grupo cultural en determinada época. Por ejemplo, la familia.
- Atendiendo a su clase o tipo
  - Max Scheler: Los seres humanos tienen inclinación o predisposición hacia ciertos valores (preferencias prerracionales)
    - *Nivel más bajo*. Valores de la sensibilidad o del placer. Corresponden el placer o dolor sensibles.
    - *Segundo nivel.* Valores del sentimiento vital. Corresponde el bienestar y todos los estados que lo determinan como la salud, la vejez, la muerte.
    - *Tercer nivel.* Valores espirituales, predominan sobre los espirituales o del placer.
    - *Valores de lo sagrado*. Concepto puro de Dios.
  - Dietrich Von Hildebrand
    - *Valores vitales*: ánimo, vitalidad.
    - *Valores intelectuales:* lucidez, ingenio.
    - *Valores estéticos:* belleza.
    - *Valores morales*: pureza, honestidad, generosidad.
  - Milton Rokeach
    - *Valores instrumentales:* que son por los bienes, pueden considerarse morales, sirven para lograr otros más elevados.
    - *Valores últimos:* son los estados superiores de la existencia.

Valores de identidad nacional

Hablar de valores de identidad nacional nos conduce a reflexionar en las características de nuestra cultura, pero debemos hacerlo sin caer en excesos, puesto que es indudable que México es una nación pluricultural, poseedora de factores que nos identifican como mexicanos y que al mismo tiempo, nos distinguen del resto del mundo.



Podemos definir como *cultura* el conjunto de rasgos característicos de un grupo humano en una época y lugar, como rasgos distinguimos el idioma, religión, comida, vestido, tradiciones, costumbres, habitación, valores, arte, folclore, consumo, y todo aquello que integra nuestra cultura nacional.

La pluriculturalidad de México es evidente al reflexionar que el idioma oficial es el español, no obstante, existen una gran cantidad de lenguas indígenas que se hablan dentro del territorio.

Una situación semejante ocurre con la alimentación, si bien es cierto, el maíz es fuente fundamental de nuestra dieta diaria, la forma de consumirlo varía en relación a la zona del país donde nos encontremos; nuestras costumbres y tradiciones son otra muestra de esta diversidad de la que podemos sentirnos orgullosos o avergonzados, esto dependerá de nuestra forma de entender nuestra cultura nacional.

En este sentido, es posible reflexionar en la identidad y autenticidad que poseemos, la cual nos ayuda a resistir la penetración cultural que sufrimos cuando llegan productos culturales de otros pueblos, los cuales son ajenos a nosotros y no promueven el enriquecimiento material y espiritual de nuestra identidad nacional, por el contrario nos alejan de los valores que dan sustento a nuestra identidad.

Es un hecho que quien defiende su identidad individual y colectiva, preserva su cultura nacional.

Como hemos dicho previamente, nuestra cultura se expresa de diversas formas, las más representativas son:

- Religión
- Costumbres
- Tradiciones
- Organización política
- Ideología

Ejercicios

1. Lee el siguiente texto y al terminar contesta la pregunta.
   "Nos remiten a lo que se estima por sí mismo, como fin último o supremo. Por ejemplo, alcanzar la felicidad".
   ¿A qué tipo de valor hace referencia el concepto?
   a) Valores supremos
   b) Valores universales
   c) Valores individuales
   d) Valores instrumentales

2. Lee el siguiente texto y al terminar contesta la pregunta.
   "Valor de las cosas u objetos, útiles para lograr los valores fines o supremos. Por ejemplo, un disco es un valor instrumental si tu valor fin es el arte musical".
   ¿A qué tipo de valor hace referencia el concepto?
   a) Valores supremos
   b) Valores universales
   c) Valores individuales
   d) Valores instrumentales

3. Lee el siguiente texto y al terminar contesta la pregunta.
   "Mejoran la vida de cada persona como sujeto moral. Por ejemplo, la amistad, la valentía, la honestidad".
   ¿A qué tipo de valor hace referencia el concepto?
   a) Valores supremos
   b) Valores universales
   c) Valores individuales
   d) Valores instrumentales

4. Lee el siguiente texto y al terminar contesta la pregunta.
   "Se consideran válidos por todos, sin importar la época o lugar. Por ejemplo, el amor".
   ¿A qué tipo de valor hace referencia el concepto?
   a) Valores supremos
   b) Valores universales
   c) Valores individuales
   d) Valores instrumentales

5. Lee el siguiente texto y al terminar contesta la pregunta.
   "Se consideran válidos para un grupo cultural en determinada época. Por ejemplo, la familia".
   ¿A qué tipo de valor hace referencia el concepto?
   a) Valores relativos
   b) Valores supremos
   c) Valores individuales
   d) Valores instrumentales

Respuestas a los reactivos de Filosofía

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4	Unidad 5
1. a	1. b	1. a	1. c	1. a
2. a	2. d	2. c	2. a	2. d
3. b	3. d	3. d	3. c	3. c
4. d	4. d	4. b		4. b
5. d	5. c	5. a		5. a

Bibliografía

GUZMÁN, Leal Roberto, *Historia de la Cultura,* Porrúa, México, 1994.

GAGOTHEY, Agustín, *Ética, teoría y aplicación,* McGraw-Hill, México, 2001.

XIRAU, Ramón, *Introducción a la Historia de la Filosofía,* UNAM, México, 2000.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, Adolfo, *Cuestiones estéticas y artísticas contemporáneas,* FCE, México, 2003.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, Adolfo, *Filosofía de la praxis,* Siglo XXI, México, 2003.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, Adolfo, *Filosofía y circunstancias,* Anthropos, México, 1997.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, Adolfo, *Ética,* Grijalbo, México, 2001.

La guía, Fundamentos para el Examen de ingreso al Nivel superior Politécnico es una herramienta indispensable para el aspirante que desea ingresar al Nivel Superior como Politécnico.

El propósito de esta obra es ayudar al aspirante a explorar y conocer cómo contestar el examen de ingreso a Nivel superior.

Con esta guía el aspirante reforzará los conocimientos que adquirió durante el bachillerato y desarrollará las habilidades y competencias necesarias en las áreas de:

- Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas
- Ciencias Médico Biológicas
- Ciencias Sociales y Administrativas

www.conamat.com

9 789685 126588

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

CONAMAT
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS